

# Approches Fractales en Traitement du Signal

Jacques Lévy-Véhel

INRIA Domaine de Voluceau-Rocquencourt - B.P. 105  
78153 LE CHESNAY Cédex FRANCE  
e-mail: jlv@inria.fr

## Résumé

Nous exposons quelques applications récentes de l'analyse fractale en traitement du signal. La première partie du papier présente de manière succincte les outils théoriques, qui sont ensuite appliqués à des problèmes en segmentation d'images et synthèse de la parole.

## Abstract

We review a few recent applications of fractal analysis to signal processing. The first part of the paper briefly presents the theoretical tools, which are then applied to problems such as image segmentation and speech synthesis.

## 1 Introduction

Les progrès récents en analyse fractale permettent d'aborder avec de nouveaux outils des problèmes classiques en traitement du signal. Le but de ce papier est de présenter un survol de quelques unes de ces nouvelles techniques et du parti que l'on peut en tirer.

Nous décrivons dans un premier temps les bases de l'analyse multifractale et de l'analyse de la régularité ponctuelle d'un signal déterministe ou stochastique. Nous appliquons ensuite ces concepts à deux problèmes: segmentation d'image et synthèse de la parole.

## 2 Les outils

### 2.1 Analyse multifractale

L'analyse multifractale, introduite dans les années 80 par des physiciens pour rendre compte de phénomènes apparaissant en turbulence, s'est ensuite développée sous l'impulsion de physiciens et de mathématiciens [5, 6, 8, 11, 10, 12, 9, 7]. La principale motivation est d'effectuer une analyse fine des comportements "singuliers" de mesures:

Soient  $\nu_n$  une suite croissante,  $\mu$  une mesure et  $\{(I_{n,j})_{1 \leq j \leq \nu_n}\}_{n \geq 1}$  une suite de partitions de  $[0, 1[$ , en intervalles emboîtés semi-ouverts à droite, et dont la taille tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

On note  $I_n(t)$  l'intervalle  $I_{n,j}$  qui contient  $t$ .

On considère pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$X_n(x, y) = \frac{1}{\nu_n} \log \sum_{j=0}^{\nu_n-1} \mu(I_{n,j})^{x+1} |I_{n,j}|^{-y}$$

où  $\sum'$  signifie que la somme est prise sur les  $j$  tels que  $\mu(I_{n,j}) \neq 0$ .

Soient:

$$X(x, y) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n(x, y) \text{ et } \Omega = \{(x, y) / X(x, y) < 0\}$$

On peut montrer [5] qu'il existe une fonction concave  $\phi$  telle que:

$$\dot{\Omega} = \{(x, y) / y < \phi(x - 0)\},$$

on pose alors:

$$\tau(q) = \phi(q - 1) \text{ et } f_l(\alpha) = \inf_q [q\alpha - \tau(q)] = \tau^*(\alpha)$$

où  $*$  désigne la transformée de Legendre.

D'autre part, soient

$$\alpha_n(x) = \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log |I_n(x)|}$$



et  $\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(x)$  quand elle existe.  
 On définit alors :

$$E_\alpha = \{x / \alpha(x) = \alpha\}$$

et on note :

$$f_h(\alpha) = \dim_H E_\alpha$$

où  $\dim_H$  est la dimension de Hausdorff.

Finalement, on considère la double limite suivante (quand elle existe) :

$$f_g(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N_n^\varepsilon(\alpha)}{\log \nu_n}$$

avec

$$N_n^\varepsilon(\alpha) = \text{card}\{I_{n,j} / \alpha_n(t_{n,j}) \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]\}$$

Effectuer une analyse multifractale de  $\mu$  consiste à calculer les trois fonctions  $f_h, f_g, f_l$ , qui fournissent des informations complémentaires:  $f_h$  renseigne sur la répartition géométrique des singularités, alors que  $f_g$  renseigne sur leur distribution statistique. Ces deux fonctions sont en général très difficiles à calculer, aussi bien quand on dispose d'un modèle que quand on travaille sur des données numériques. C'est ici qu'intervient  $f_l$ , qui présente l'intérêt d'être facile à calculer. Le formalisme multifractal s'intéresse au lien entre les fonctions  $f_g, f_h$  et  $f_l$ . Un cas favorable est celui où ces trois fonctions sont égales. Ceci se produit notamment lorsque l'on a affaire à des mesures dites multiplicatives. Dans le cas général, on peut seulement prouver que [3, 5] :

$$f_h \leq f_g \leq f_l.$$

On peut généraliser cette analyse à l'étude de suites de capacités de Choquet, classe plus générale que celle des mesures, et qui s'introduisent naturellement dans plusieurs applications, notamment en segmentation d'images. On montre alors que :

- Pour une large classe de suites de capacités, on a :

$$\tilde{f}_g^{**} = f_l$$

où  $f_g^{**}$  désigne l'enveloppe concave de  $f_g$ .

- Quelles que soient une mesure  $\nu$  dont le spectre vérifie certaines conditions de régularité, et une fonction  $f$  appartenant à une classe assez générale, il existe une suite de capacités, définie à partir de  $\nu$ , dont le spectre  $f_h$  est exactement  $f$ .

## 2.2 Régularité locale des signaux

Rappelons la définition suivante :

Une fonction  $f$  est d'exposant de Hölder  $\beta$  au point  $t_0$  si :

i) Pour tout réel  $\gamma$  vérifiant  $\gamma < \beta$ , on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(t_0 + h) - P(h)|}{|h|^\gamma} = 0$$

ii) if  $\beta < +\infty$ , pour tout  $\gamma > \beta$ , on a :

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|f(t_0 + h) - P(h)|}{|h|^\gamma} = +\infty$$

où  $P$  est un polynôme qui ne dépend que de  $t_0$ , et qui est de degré inférieur ou égal à la partie entière de  $\beta$ .

Appelons fonction de Hölder  $\alpha_f$  d'une fonction continue  $f$ , la fonction qui à tout point  $t$  associe l'exposant de Hölder de  $f$  au point  $t$ . On se pose le problème suivant :

Étant donné une fonction  $s(t)$  vérifiant éventuellement certaines conditions, et  $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, N\}$  un ensemble de  $N$  points, construire une fonction continue  $f$  telle que :

$$\alpha_f(x) = s(x) \quad \text{et} \quad f(x_i) = y_i \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Un premier résultat est le suivant :

Soit  $s(t)$  est une fonction continue de  $[0; 1]$  dans  $[a; b] \subset ]0; 1[$ , telle que  $s(t) < \alpha_s(t)$  pour tout  $t \in [0; 1]$ . La fonction de Weierstrass généralisée :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-ks(t)} \sin(\lambda^k t)$$

est telle que :

$$\alpha_f(t) = s(t)$$

dès que  $\lambda$  est suffisamment grand.

Dans [1], le problème est résolu de manière plus complète: le résultat principal est que, dès que

$s$  est limite inférieure d'une suite de fonctions continues, on peut effectivement construire une fonction  $f$  qui répond à la question.  $f$  peut être obtenue en rendant la fonction de Weierstrass encore plus "lacunaire", ou bien comme attracteur d'un IFS (système de fonctions itérées), ou encore à partir d'une construction par ondelettes.

### 2.3 Processus stochastiques

On peut se poser le même type de question qu'au paragraphe précédent, mais cette fois pour des processus stochastiques au lieu de fonctions déterministes. Il s'agit donc de construire un processus non stationnaire dont l'exposant de Hölder ponctuel est prescrit

On généralise pour cela le classique mouvement Brownien fractionnaire (mBf) de la manière suivante :

Soit  $H : (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$  une fonction de Hölder d'exposant  $0 < \beta \leq 1$ . La fonction aléatoire notée  $W_H(t)$  ou  $W_{H_t}(t)$ , de paramètre la fonctionnelle  $H$ , définie par l'intégrale stochastique suivante pour  $t \in (0, \infty)$ ,

$$W_{H_t}(t) = \frac{1}{\Gamma(H_t+1/2)} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H_t-1/2} - (-s)^{H_t-1/2}] dW(s) + \int_0^t (t-s)^{H_t-1/2} dW(s) \right\}$$

est appelée mouvement Brownien multifractionnaire (mBm).

Les principales propriétés du mBm sont les suivantes [4] :

- $W_{H_t}$  est continu presque sûrement.
- Soit  $(Y_t)_{(t>0)}$  un mouvement Brownien multifractionnaire et soit  $t \mapsto H_t$  son paramètre fonctionnel Höldérien d'ordre  $0 < \beta \leq 1$ , tel que pour tout  $t > 0$ ,  $H(t) < \beta$ . Alors, il existe une unique fonction positive continue  $t \mapsto \sigma_t$  telle que le processus  $(Z_t)_{(t>0)}$  défini par  $Z_t = \sigma_t Y_t$  soit continu et vérifie la propriété suivante

$$\text{Var} \left( \frac{Z_{t+h} - Z_t}{h^{H_t}} \right) \rightarrow 1 \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0.$$

Le processus  $(Z_t)_{(t>0)}$  est appelé mouvement Brownien multifractionnaire standard.

- Soit  $(Y_t)_{t>0}$  un mBm muni du paramètre fonctionnel  $H$ . Alors, avec une probabilité un, le graphe de  $(Y_t)_{t>0}$  vérifie la propriété suivante :

Pour tout  $t_0 > 0$  et  $\eta > 0$ ,

$$\begin{aligned} 2 - \max_{|t-t_0|<\eta} H_t &\leq \underline{\dim}_B \{ \text{Graph}(Y_t, |t-t_0| < \eta) \} \\ &\leq \overline{\dim}_B \{ \text{Graph}(Y_t, |t-t_0| < \eta) \} \\ &\leq 2 - \min_{|t-t_0|<\eta} H_t \end{aligned}$$

- Soit  $(B_H(t))_{t \geq 0}$  un mouvement Brownien fractionnaire d'index  $H$  ( $0 < H < 1$ ), alors pour toute constante  $K > 0$  et pour tout intervalle  $[a, b] \subset ]0, 1[$  nous avons presque sûrement

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \sup_{a \leq H, H' \leq b, |H'-H| < \eta} \sup_{t \in [0, K]} |B_H(t) - B_{H'}(t)| = 0.$$

## 3 Applications

### 3.1 Segmentation d'Images

Un étape importante dans l'analyse des images est la segmentation, qui consiste à obtenir une description de l'image en termes de contours et de régions.

Les approches classiques dans ce domaine supposent généralement qu'une image est la trace discrète d'un processus sous-jacent  $C^1$  par morceaux. En effectuant un filtrage, on peut alors par exemple extraire le gradient du signal, dont les extrema de la norme correspondent à peu près aux contours. On peut aussi raffiner les résultats en appliquant des méthodes multirésolutions, en particulier fondées sur des transformées en ondelettes.

Les inconvénients d'une telle conception sont les suivants : un filtre donné n'est adapté qu'à un seul type de contours ; le lissage préalable entraîne une perte en localisation ; l'hypothèse d'un processus  $C^1$  par morceaux sous-jacent n'est pas toujours réaliste : en présence de textures, ces détecteurs échouent.

Une alternative est de considérer que l'image induit une mesure, connue jusqu'à une résolution fixée, et aussi irrégulière que l'on veut, et de quantifier alors ses singularités. L'approche multifractale s'inscrit dans ce cadre.



Le principe général est le suivant : à partir des niveaux de gris de l'image, on définit diverses mesures et capacités. On peut alors effectuer une analyse multifractale de ces capacités, et en déduire des informations sur la structure de l'image. Une spécificité de cette approche est qu'elle tient compte à la fois des comportements locaux (via  $\alpha$ ) et globaux (via  $f(\alpha)$ ) [2]. D'autre part, aucune hypothèse n'est faite quant à la régularité du signal étudié.

**Aspect local :**

Les contours et autres points remarquables de l'image (coins, lignes, etc . . . ) induisent des valeurs particulières des exposants de Hölder. Ces exposants permettent de détecter des singularités de toutes sortes, même quand le gradient n'est pas calculable, et ce sans lissage.

Voici quelques exemples de suites de capacités que l'on peut définir : soit  $(I_{n,j})$ , l'ensemble des pixels de l'image à la résolution  $n$ , et soit  $p_n(I_{n,j})$  le niveau de gris de  $I_{n,j}$ . On définit, pour une région  $\Omega$  de l'image :

$$\mu_{\Sigma}^n(\Omega) = \sum_{I_{n,j} \subset \Omega} p_n(I_{n,j})$$

$$\mu_{\max}^n(\Omega) = \sup_{I_{n,j} \subset \Omega} p_n(I_{n,j})$$

$$\mu_{\min}^n(\Omega) = \inf_{I_{n,j} \subset \Omega} p_n(I_{n,j})$$

$$\mu_{\text{ISO}}^n(\Omega) = \#\{I_{n,j} \subset \Omega \mid |p_n(I_{n,j}) - p_n(I_{n,j_0})| \leq \delta\}$$

où  $I_{n,j_0}$  est un pixel fixé de  $\Omega$  et  $\delta$  est un seuil arbitraire.

**Aspect global :**

Le lien entre analyse multifractale et théorie des grandes déviations (c'est-à-dire entre  $f_h$  et  $f_g$ ) est à la base du processus global de segmentation.

Celui-ci ne nécessite en pratique que l'hypothèse "faible" que  $f_h = f_g$ . Si on suppose de plus que  $f_h = f_l$  (hypothèse "forte"), alors, en appliquant le théorème d'Ellis avec :

$$Y_n = \log \mu(A_n)$$

où  $A_n$  est une région de taille  $\epsilon_n = 2^{-n}$ , on montre que  $f(\alpha)$  est directement liée à la fonction de taux de grande déviation, i.e :

$$Pr(\alpha_n > \alpha / \alpha > \alpha_M) \sim 2^{n(f(\alpha) - D_0)}$$

où  $D_0$  est la dimension du support de la mesure,  $\alpha_M$  la valeur qui rend  $f(\alpha)$  maximum, et  $\alpha_n$  l'exposant de Hölder calculé à la résolution  $n$ .

Intuitivement, cette relation signifie que  $f(\alpha)$  est relié à la fréquence d'apparition d'une valeur donnée de  $\alpha$  dans une image vue à une certaine résolution. Or, comme le montre la figure 1, la perception visuelle d'un contour, par exemple, est liée non seulement à la singularité locale que ce contour induit, mais aussi à la rareté d'observation de cette singularité. Suivant la valeur de  $f(\alpha)$ , on pourra ainsi décider à quel type de zone appartient un point donné.



FIG. 1 - Trois lignes. Une texture binaire. Trois coins. Une texture binaire.

Ces idées peuvent être formalisées dans le cadre d'une approche Bayésienne, qui permet d'obtenir des résultats robustes, en utilisant conjointement plusieurs capacités.

La méthode employée est la suivante: tout point  $(x, y)$  est caractérisé par un type de singularité  $t$  (variable discrète), comme par exemple une marche ou une ligne, et par la hauteur relative  $h$  de cette singularité (variable continue). On cherche le couple  $(t, h)$  le plus probable, connaissant un vecteur  $A$  d'exposants de Hölder calculés en ce point. On écrit classiquement:

$$Pr((t, h)/A) = \frac{Pr(A/(t, h))Pr(t, h)}{Pr(A)}$$

et on cherche à maximiser le membre de gauche. Cela revient à maximiser le produit  $Pr(A/(t, h)) \times Pr(t, h)$ , puisque  $Pr(A)$  est ici constant. Si le point  $(x, y)$  n'est pas dans une région uniforme, il est raisonnable d'admettre que  $t$  et  $h$  sont indépendants:  $Pr(t, h) = Pr(t)Pr(h)$ .

Les probabilités *a priori* sont reliées aux spectres multifractals. En effet, on montre que:

$$Pr(t \in T) = Pr(\alpha_{iso}^n \in A_i)$$

et

$$Pr(h \in \wedge) = Pr(\alpha_{max}^n \in A_m)$$

Ainsi, calculer  $Pr(t, h)$  revient à évaluer les deux spectres  $f_g(\alpha_{iso})$  and  $f_g(\alpha_{max})$ , ce qui peut être fait directement sur les données.

En ce qui concerne la probabilité conditionnelle, les calculs analytiques ne peuvent être menés que dans certains cas particuliers. En général, les lois sont obtenues par simulation.

La figure 2 montre un résultat de segmentation obtenu avec cette méthode.

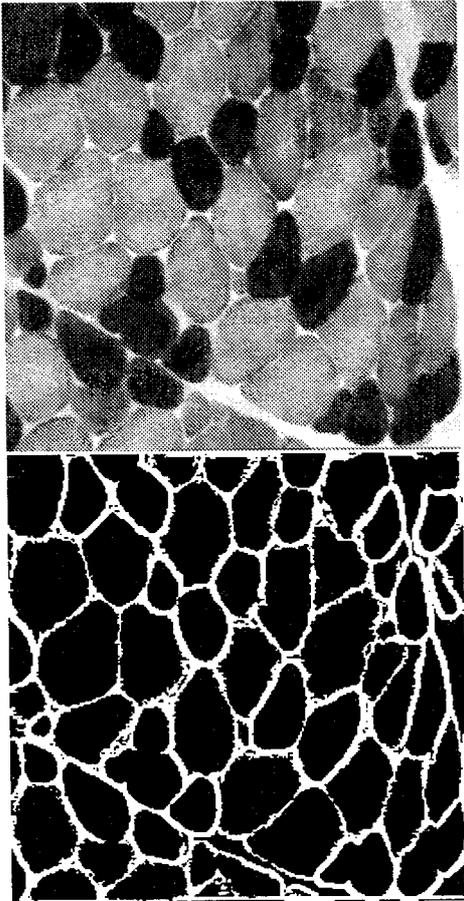


FIG. 2 - Image originale et contours obtenus par segmentation multifractale

### 3.2 Synthèse de la parole

La méthode de synthèse de la parole développée par le CNET consiste à segmenter une voix humaine enregistrée, stocker les unités acoustiques (logatomes) obtenues dans un dictionnaire, puis les concaténer pour créer la même voix. Ces concaténations d'unités acoustiques sont effectuées suivant un algorithme, appelé PSOLA, d'addi-

tion et de recouvrement qui fournit une bonne qualité de voix. Il serait cependant souhaitable de pouvoir créer une voix de synthèse sans enregistrer tout un dictionnaire. L'enjeu économique de cette application est important. La création d'un dictionnaire est en effet une étape longue et coûteuse : il faut quelques trois mois pour enregistrer et segmenter les 1200 logatomes nécessaires en Français.

Dans le cadre fractal, une solution possible repose sur le codage de chaque diphone d'un dictionnaire par un IFS. Les avantages d'un tel codage sont multiples : l'utilisation de bases de fonctions quelconques pour l'IFS (affines, polynômiales, homographiques, polynômiales en sinus, etc . . . ) autorise la génération de signaux très divers, et pas seulement de ceux ayant un aspect self-similaire. Le codage IFS met d'autre part en évidence certaines propriétés structurelles du signal (dimension, nombre et type de fonctions). Il permet aussi de le synthétiser à différentes résolutions, de le déformer suivant une trajectoire contrôlée (interpolation fractale entre deux signaux), et enfin d'effectuer de la compression de données. La difficulté essentielle est la résolution du problème inverse : il s'agit de la détermination automatique, à partir du signal, des éléments composant le code IFS.

On montre qu'un IFS peut effectivement coder de façon satisfaisante un signal vocal (cette représentation permet en particulier d'effectuer des rééchantillonnages qui respectent la nature du signal). Un exemple de reconstruction sur le son /a/ est présenté figure 3.

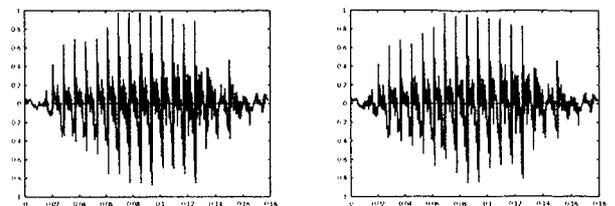


FIG. 3 - Voyelle /a/, signal original (à gauche) et reconstruction (à droite) à l'aide d'un codage IFS.

La procédure de synthèse est alors la suivante :



à partir de 2 dictionnaires,

- Trouver l'IFS correspondant à chaque diphone des dictionnaires.
- Faire une interpolation fractale entre chaque diphone des dictionnaires.

Sous certaines conditions techniques, chaque stade de l'interpolation génère une "voix" intermédiaire. Le calcul des IFS (résolution du problème inverse) peut se faire en estimant la régularité locale en chaque point, et en effectuant ensuite une synthèse suivant les techniques exposées en 2.2

## 4 Bibliographie

- [1] K. Daoudi, J. Lévy Véhel, and Y. Meyer. Construction of continuous functions with prescribed local regularity. Submitted to *Constructive Approximation*, 1995.
- [2] J. Lévy Véhel and P. Mignot. Multifractal segmentation of images. *Fractals*, 2(3):371–377, 1994.
- [3] J. Lévy Véhel and R. Vojak. Mutual Multifractal Analysis of Sequences of Choquet Capacities: Preliminary Results. to appear in *Advances in Applied Mathematics*, 1995.
- [4] R. Peltier and J. Lévy Véhel. Multifractal Brownian Motion: definition and preliminary results. Submitted to *Stochastic Processes and their Applications*, 1995.
- [5] G. Brown, G. Michon, and J. Peyrière. On the multifractal analysis of measures. *Journal of Stat. Phys.*, t. 66:775–790, 1992.
- [6] P. Deheuvels. Fractales aléatoires générées par des processus empiriques. *The Annals of Probability*, 1994.
- [7] K.J. Falconer. The multifractal spectrum of statistically self-similar measures. Technical Report PM 93.01, School of Mathematics, Univ. of Bristol, 1993.
- [8] U. Frisch and G. Parisi. *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*, page 84. M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi, Amsterdam (Holland), 1895.
- [9] S. Jaffard. Construction de fonctions multifractales ayant un spectre de singularités prescrit. *C.R. Acad. Sci. Paris*, pages 19–24, 1992. T. 315, Serie I.
- [10] B.B. Mandelbrot. A class of multinomial multifractal measures with negative (latent) values for the dimension  $f(\alpha)$ . L. Pietronero, editor, *Fractals (Proceedings of the Erice meeting)*, New York, 1989.
- [11] L Olsen. A multifractal formalism. A paraître dans *Advances in Mathematics*.
- [12] R. Riedi. An improved multifractal formalism and self-similar measures. A paraître dans *Journal Math. Anal. Appl.*