



Application de l'algorithme des sous-espaces pondérés aux réseaux d'antennes

*I. Fabret**, *P. Forster** et *F. Martinerie***

* Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue St-Martin, 75141 Paris Cedex 03, France.

** THOMSON SINTRA ASM, 1 Av. A. Briand, 94117 Arcueil CEDEX

RÉSUMÉ

Cet article traite de la localisation de sources à l'aide d'un réseau de macrocapteurs dont les positions sont inconnues. On résout ce problème par un algorithme du maximum de vraisemblance approché pour lequel une méthode d'initialisation ad hoc est développée. Les résultats de simulations sont présentés pour des macrocapteurs constitués de trois capteurs directifs en site et en gisement.

ABSTRACT

This article treats of sources localization with an array of sensors with unknown positions. This problem is solved with an approximate maximum likelihood algorithm for which an appropriate initialization method is developed. Simulations results are presented for sensors constituted of an omnidirectional sensor and two crossed dipoles.

I- INTRODUCTION

Le problème du traitement d'antennes de géométrie inconnue a des applications en sonar, radar, radiogoniométrie. Les méthodes habituelles (formation de voies, goniomètre à vecteurs propres) ne sont pas applicables et de nouveaux traitements doivent être proposés. Nous avons développé dans des travaux antérieurs une méthode de localisation basée sur l'algorithme ESPRIT appliqué à un réseau de capteurs dipolaires dont la géométrie est inconnue [1-2]. Cet article présente une extension de ces travaux au cas d'un réseau de géométrie inconnue constitué de M macrocapteurs identiques, chaque macrocapteur comprenant n capteurs. Des résultats de simulations sont ensuite présentés pour des macrocapteurs comportant $n=3$ capteurs.

II- FORMULATION DU PROBLEME

Considérons un réseau de géométrie inconnue constitué de M macrocapteurs identiques, chaque macrocapteur comprenant n capteurs élémentaires. Les macrocapteurs étant identiques, leurs vecteurs sources le sont aussi. A une fréquence f donnée, notons $\delta(\theta, \varphi) = [1 \ \delta_2(\theta, \varphi) \ \dots \ \delta_n(\theta, \varphi)]^T$ le vecteur source en sortie de l'un de ces macrocapteurs correspondant à une source en champ lointain de gisement θ et de site φ , et \mathbf{d} le vecteur source à M composantes correspondant à la propagation du signal d'un macrocapteur à l'autre. La géométrie du réseau étant inconnue, $\mathbf{d}(\phi_2, \dots, \phi_M) = [1 \ e^{i\phi_2} \ \dots \ e^{i\phi_M}]^T$ est un vecteur dont les

déphasages ϕ_2, \dots, ϕ_M sont tous inconnus pour une source donnée. Ainsi, le vecteur source δ est paramétré par la direction de la source, et \mathbf{d} par les déphasages d'un macrocapteur à l'autre. Notons que, par convention, les premières composantes de δ et \mathbf{d} sont prises égales à un: autrement dit, on prend pour référence le signal présent sur le premier capteur du premier macrocapteur. Désignons par $x_i^m(t)$ l'observation en sortie du i -ème capteur pour le m -ième macrocapteur. Posons $\mathbf{X}_i(t) = [x_i^1(t) \ \dots \ x_i^M(t)]^T$ le vecteur contenant les M signaux issus des capteurs i , et

$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n(t) \end{bmatrix}$ l'observation en sortie du réseau. Dans ces

conditions, le vecteur source \mathbf{a} en sortie du réseau s'écrit comme le produit de Kronecker des vecteurs sources δ et \mathbf{d} :

$$\mathbf{a} = \delta \otimes \mathbf{d} \quad (1)$$

Considérons P sources de matrice spectrale Σ , de gisements $\theta_1, \dots, \theta_P$ et de sites $\varphi_1, \dots, \varphi_P$. Notons δ_p , $\mathbf{d}_p = [1 \ e^{i\phi_{2p}} \ \dots \ e^{i\phi_{Mp}}]^T$ et \mathbf{a}_p les vecteurs sources δ , \mathbf{d} et \mathbf{a} associés à la p -ième source. En présence de bruit spatialement blanc, la matrice spectrale \mathbf{R} de l'observation $\mathbf{X}(t)$ s'écrit ainsi à une fréquence donnée:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \Sigma \mathbf{A}^* + \sigma \mathbf{I} \quad (2)$$

où $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_P]$ est la matrice ($nM \times P$) des vecteurs sources en sortie du réseau. La matrice \mathbf{A} admet aussi l'expression suivante qui s'avérera utile par suite:



$$A = \begin{bmatrix} D \\ D\Delta_2 \\ \vdots \\ D\Delta_n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

où :

- $D = [d_1 \ \dots \ d_p]$,
- $\Delta_i = \text{diag}\{\delta_i(\theta_1, \varphi_1), \dots, \delta_i(\theta_p, \varphi_p)\}$.

Le problème est alors le suivant : estimer les azimuts, sites et déphasages des P sources à partir d'une mesure \hat{R} de la matrice spectrale.

III- SOLUTION DANS LE CAS « IDEAL »

On suppose que l'on connaît R de manière exacte. La démarche alors utilisée se base sur l'algorithme ESPRIT [3]. Soit U la matrice des P vecteurs propres associés à l'espace signal : tout comme A , elle engendre le sous-espace signal et elle est de rang P. Il existe par conséquent une transformation linéaire biunivoque T reliant U et A :

$$U = A T,$$

que l'on peut écrire de façon équivalente en tenant compte de l'expression (3) de A et en partitionnant U en

$U = [U_1^T \ \dots \ U_n^T]^T$ où les matrices U_i sont de taille $M \times P$:

$$\begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & D\Delta_2 & \dots & D\Delta_n \end{bmatrix} T \\ = \begin{bmatrix} E & EM_2 & \dots & EM_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

où :

$$M_i = T^{-1} \Delta_i T \quad (5)$$

$$E = D T = U_1 \quad (6).$$

Partant de la relation (4), on peut calculer tous les paramètres inconnus : les matrices Δ_i s'obtiennent par diagonalisation des matrices M_i , T^{-1} est la matrice des vecteurs propres droits des M_i , et $D = U_1 T^{-1}$.

IV-CAS REEL

En pratique, on ne dispose que d'une mesure \hat{R} de R et de l'estimée \hat{U} de U . Sous des conditions peu contraignantes \hat{R} suit une loi de Wishart à K degrés de liberté. Dans ces conditions, l'optimisation du critère h suivant, dit critère des Sous-Espaces Pondérés (SEP), fournit un estimateur efficace des inconnues [4] :

$$h = \left\| \hat{U} W - \begin{bmatrix} D \\ D\Delta_2 \\ \vdots \\ D\Delta_n \end{bmatrix} T \right\|_f^2 \quad (7)$$

où $\| \cdot \|_f$ désigne la norme de Frobenius et où W est une matrice de pondération [4] définie à partir des valeurs propres de \hat{R} .

La minimisation du critère h est réalisée en 2 étapes : une **première estimation des paramètres** du problème sert ensuite d'initialisation à l'**algorithme de Gauss-Newton**.

Par la suite, nous présentons une nouvelle méthode d'initialisation de cet algorithme. Par souci de clarté, on se limite au cas de macrocapteurs constitués de n=3 capteurs avec :

$$\Delta_2 = \text{diag}\{g r_p \cdot e^{-j\theta_p}\} \\ \Delta_3 = \text{diag}\{g r_p \cdot e^{j\theta_p}\} \quad (8),$$

où g est un paramètre connu et $r_p = \cos\theta_p$.

On décompose \hat{U} sous la forme :

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \\ \hat{U}_3 \end{bmatrix}.$$

La méthode peut aisément être généralisée à n quelconque.

IV-1 Initialisation

L'initialisation utilise les propriétés des décompositions de matrices en valeurs singulières (SVD).

Posons $V = [\hat{U}_1 \ \hat{U}_2 \ \hat{U}_3]$. En l'absence d'erreurs d'estimation, on a, compte tenu de la relation (4) :

$$\begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} I & M_2 & M_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

ce qui montre que V est idéalement de rang P. C'est pourquoi on calcule d'abord la meilleure approximation \hat{V} de V par une matrice de rang P à l'aide de sa décomposition en valeurs singulières :

$$\hat{V} = B S C \quad (10)$$

où $C = [C_1 \ C_2 \ C_3]$ et où S contient les P plus grandes valeurs singulières de V .

On peut réécrire \hat{V} sous la forme :

$$\hat{V} = B S C_1 \begin{bmatrix} I & C_1^{-1} C_2 & C_1^{-1} C_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

qui nous fournit par identification avec (9) les estimées de E , M_2 et M_3 :

$$\hat{E} = B S C_1 \quad (12)$$

$$\hat{M}_2 = C_1^{-1} C_2 \quad (13)$$

$$\hat{M}_3 = C_1^{-1} C_3 \quad (14)$$

Les valeurs exactes de E , M_2 et M_3 sont reliées aux azimuts et aux sites par les relations (5) et (6). C'est pourquoi on choisit d'effectuer la diagonalisation de \hat{M}_2 qui donne $\hat{\Delta}_2$ et \hat{T} :

$$\hat{M}_2 = \hat{T}^{-1} \hat{\Delta}_2 \hat{T} \quad (15)$$

On utilise ensuite cette valeur de \hat{T} pour calculer \hat{D} et diagonaliser approximativement \hat{M}_3 :

$$\hat{D} = \hat{E} \hat{T}^{-1} \quad (16)$$

$$\hat{\Delta}_3 = \hat{T} \hat{M}_3 \hat{T}^{-1} \quad (17)$$

On obtient finalement les estimées suivantes des azimuts, des sinus des sites et des déphasages :

$$-\hat{\theta}_p = \frac{1}{2} [\arg(\hat{\Delta}_3(p, p)) - \arg(\hat{\Delta}_2(p, p))]$$

$$-\hat{r}_p = \frac{1}{2g} [|\hat{\Delta}_3(p, p)| + |\hat{\Delta}_2(p, p)|]$$

$$-\hat{\phi}_{i,p} = \arg(\hat{D}(i, p))$$



Remarque :

La détermination de $\hat{\Lambda}_3$ à partir de la matrice \hat{T} selon (17) est insensible au premier ordre aux erreurs sur T . En effet, soit M une matrice carrée et $\Lambda = TM T^{-1}$ une diagonalisation de M . Supposons que T est perturbée en $T + \Delta T$. Alors $\Lambda' = (T + \Delta T) M (T + \Delta T)^{-1}$ n'est plus diagonale. Néanmoins, par un DL à l'ordre 1, on a : $(T + \Delta T)^{-1} \approx T^{-1} - T^{-1} (\Delta T) T^{-1}$. D'où :

$$\begin{aligned} \Lambda' &= T M T^{-1} + (\Delta T) M T^{-1} - T M T^{-1} (\Delta T) T^{-1} \\ &= \Lambda + \underbrace{(\Delta T) T^{-1} \Lambda - \Lambda (\Delta T) T^{-1}}_{\text{de diagonale nulle}} \end{aligned}$$

Donc Λ' et Λ ont même diagonale.

IV-2 Optimisation du critère

L'estimation des différents paramètres décrite précédemment sert d'initialisation à un algorithme d'optimisation. La forme particulière du critère h permet d'utiliser celui de Gauss-Newton. Un exemple d'implémentation en a été donné dans l'algorithme MI-ESPRIT [5].

V-PERFORMANCES DE L'ESTIMATEUR

L'objet de ce paragraphe est de **quantifier le gain en précision apporté par l'utilisation de plusieurs macrocapteurs**, par rapport au traitement d'un seul macrocapteur.

Le critère h fournit un estimateur efficace des paramètres inconnus : ses performances asymptotiques sont déterminées par la borne de Cramer-Rao. Celle-ci a pour expression [1] :

$$V = \frac{\sigma}{2K} \left\{ \text{Re} \left[\underbrace{\left[\left(\Sigma (\Sigma + \alpha (A^* A)^{-1})^{-1} \Sigma \right)^T \otimes \mathbf{1}_L \mathbf{1}_L^T \right]}_{(a)} \cdot \underbrace{\left(A^{(1)*} \Pi^\perp A^{(1)} \right)}_{(b)} \right] \right\}^{-1} \quad (18)$$

où :

- L est le nombre de paramètres inconnus dans l'expression du vecteur source,
- $\mathbf{1}_L$ est le vecteur de dimension L dont toutes les composantes sont égales à 1,
- \otimes est le produit de Kronecker de 2 matrices,
- \bullet est le produit de Hadamard de 2 matrices,
- Π^\perp est le projecteur sur le sous-espace bruit,
- $A^{(1)}$ contient toutes les dérivées de \mathbf{a} par rapport aux différents paramètres, regroupés source par source.

Par la suite, on développe le calcul de la borne de Cramer-Rao lorsque les vecteurs sources δ et \mathbf{d} ne dépendent pas des mêmes paramètres : on note $\delta = \delta(\alpha)$, $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\beta)$ avec $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_{L_\alpha}]$ et $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_{L_\beta}]$. Dans le cas qui nous intéresse, α contient les azimuts et les sites, β les déphasages. α_p et β_p sont les valeurs de α et β pour la $p^{\text{ème}}$ source.

Résultats :

Lorsque les sources sont décorréelées et les vecteurs sources \mathbf{d} orthogonaux 2 à 2 ($\mathbf{d}_i^* \mathbf{d}_j = 0$ si $i \neq j$), alors :

- 1- les paramètres liés à 2 sources distinctes sont décorréelés,
- 2- les estimées de α_p et β_p sont décorréelées,
- 3- la covariance de α ne dépend pas du nombre de sources,
- 4- **le gain en rapport signal/bruit dans l'estimation de α est égal à $\|\mathbf{d}\|^2$** . Autrement dit, la précision obtenue sur α avec M macrocapteurs est la même que celle qu'on aurait avec un seul macrocapteur et une seule source de rapport signal/bruit $\|\mathbf{d}\|^2$ fois plus important.

Démonstration : Par la suite, toutes les dérivées partielles sont calculées pour la $p^{\text{ème}}$ source.

- 1- Les sources étant décorréelées, la matrice Σ est diagonale :

$$\Sigma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_P\}.$$

De plus, les éléments de la matrice $A^* A = (\mathbf{a}_i^* \mathbf{a}_j)$, valent :

$$\mathbf{a}_i^* \mathbf{a}_j = (\delta_i \otimes \mathbf{d}_i)^* (\delta_j \otimes \mathbf{d}_j) = (\delta_i^* \delta_j) (\mathbf{d}_i^* \mathbf{d}_j),$$

On en déduit d'après les hypothèses :

$$\left(\Sigma \left(\Sigma + \alpha (A^* A)^{-1} \right)^{-1} \Sigma \right) = \sigma \text{diag} \left\{ \frac{(S/B)_p^2 \|\mathbf{d}_p\|^2 \|\delta_p\|^2}{1 + (S/B)_p \|\mathbf{d}_p\|^2 \|\delta_p\|^2} \right\},$$

où $(S/B)_p = \frac{\gamma_p}{\sigma}$. Par conséquent, le terme (a) de l'expression (18) est une matrice diagonale par blocs, et la covariance V est ainsi elle-même diagonale par blocs. *Les paramètres liés à 2 sources distinctes sont donc décorréelés.*

- 2- Π^\perp a pour expression :

$$\Pi^\perp = \mathbf{I} - \Pi = \mathbf{I} - A (A^* A)^{-1} A^* = \mathbf{I} - \sum_{k=1}^P \frac{(\delta_k \otimes \mathbf{d}_k) (\delta_k^* \otimes \mathbf{d}_k^*)}{\|\mathbf{d}_k\|^2 \|\delta_k\|^2}$$

Calculons les termes de $A^{(1)*} \Pi^\perp A^{(1)}$ qui concernent une source donnée, par exemple la $p^{\text{ème}}$; 3 termes différents interviennent :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha_i} \right)^* \Pi^\perp \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \beta_j} \right), \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha_i} \right)^* \Pi^\perp \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha_j} \right) \text{ et } \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \beta_i} \right)^* \Pi^\perp \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \beta_j} \right).$$

Dans le cadre de la démonstration, seuls les 2 premiers termes nous intéressent. On obtient :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha_i} \right)^* \Pi^\perp \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \beta_j} \right) =$$

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial \alpha_i} \right)^* \delta_p \mathbf{d}_p^* \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \beta_j} \right) - \left(\frac{\partial \delta}{\partial \alpha_i} \right)^* \delta_p \frac{\|\mathbf{d}_p\|^2 \|\delta_p\|^2}{\|\mathbf{d}_p\|^2 \|\delta_p\|^2} \mathbf{d}_p^* \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \beta_j} \right) = 0,$$

ce qui montre que les estimées de α et β pour une même source sont décorréelées.



3-

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha_i}\right)^* \Pi^\perp \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha_j}\right) = \|\mathbf{d}_p\|^2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial \alpha_i}\right)^* \left(\frac{\partial \delta}{\partial \alpha_j}\right) - \left(\frac{\partial \delta}{\partial \alpha_i}\right)^* \delta_p \delta_p^* \left(\frac{\partial \delta}{\partial \alpha_j}\right) \frac{\|\mathbf{d}_p\|^2}{\|\delta_p\|^2}$$

Donc la covariance de α ne dépend pas du nombre de sources.

4- Les résultats précédents permettent d'établir l'expression de la covariance de α pour une source donnée :

$$\mathbf{v} = \frac{\sigma}{2K} \frac{1 + (S/B)_p \|\mathbf{d}_p\|^2 \|\delta_p\|^2}{(S/B)_p^2 \|\mathbf{d}_p\|^4 \|\delta_p\|^2} \left[\text{Re} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha_i} & \left(\frac{\partial \delta}{\partial \alpha_j}\right)^* \\ \left(\frac{\partial \delta}{\partial \alpha_i}\right)^* & \frac{\partial \delta}{\partial \alpha_j} \end{pmatrix} \delta_p \delta_p^* \begin{pmatrix} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha_i} \\ \left(\frac{\partial \delta}{\partial \alpha_j}\right)^* \end{pmatrix} \right] \right]^{-1}$$

La première partie de cette expression montre que le gain en rapport signal/bruit est égal à $\|\mathbf{d}\|^2$.

VI-SIMULATIONS

Les simulations concernent une antenne de $M=8$ macrocapteurs jetés au hasard dans un carré dont le côté mesure 20 longueurs d'onde. Chaque macrocapteur comporte $n=3$ capteurs : un capteur omnidirectionnel et deux capteurs directifs en site et en gisement. Pour un macrocapteur donné, le vecteur source vaut $\delta(\theta, \varphi) = [1 \cos \varphi e^{-i\theta} \cos \varphi e^{i\theta}]^T$, où φ désigne le site et θ le gisement. Il y a $P=2$ sources de sites nuls et de rapport $S/B = -10$ dB. L'écart entre les deux sources varie de 10 degrés à 50 degrés. Les matrices spectrales sont estimées avec $K=100$ spectres intégrés. Les figures suivantes permettent de vérifier le bon fonctionnement de la méthode d'initialisation développée au paragraphe IV-1 et l'amélioration apportée par l'optimisation du critère (7) des sous-espaces pondérés. La figure 1 montre en trait continu la borne de Cramer Rao sur l'un des gisements en fonction de l'écart entre les sources. Les points marqués par le symbole « o » montrent sur le même graphique les résultats de l'initialisation (100 tirages par point), et ceux marqués d'une croix donnent l'écart-type mesuré après optimisation du critère des sous-espaces pondérés : les performances de l'initialisation sont proches de la borne de Cramer Rao.

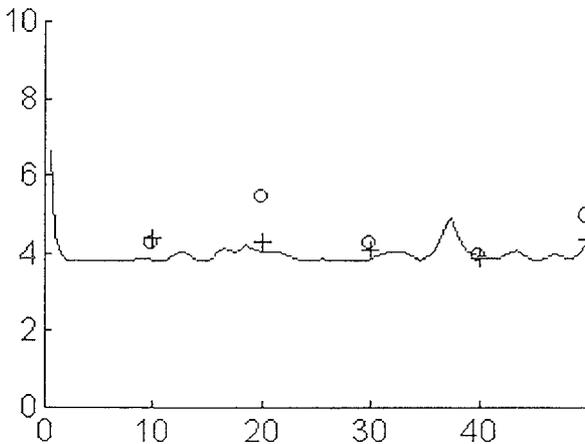


Figure 1 : P=2 sources, S/B = -10 dB , K=100 spec. intégrés. Ecart type en degrés sur un gisement en fonction de l'écart entre les sources (o : initialisation , + : après optimisation, continu : CR)

La figure 2 montre pour la même source des quantités similaires concernant cette fois l'erreur quadratique moyenne

$$\left(\sum_{m=2}^M (\hat{\varphi}_m - \varphi_m)^2 \right)^{1/2}$$

sur les déphasages d'un macrocapteur à l'autre : les résultats de l'initialisation sont nettement améliorés par l'optimisation du critère.

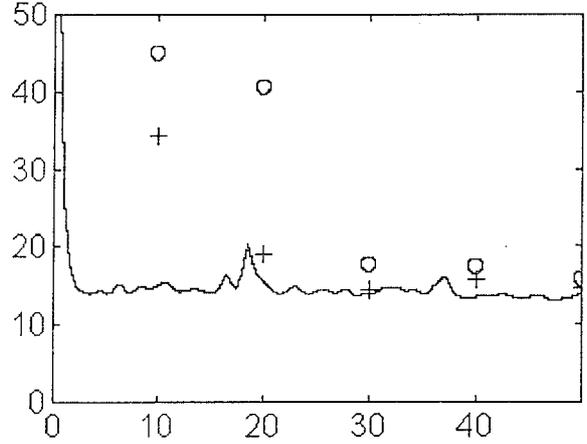


Figure 2 : P=2 sources, S/B = -10 dB , K=100 spec. intégrés. Ecart type en degrés sur les déphasages en fonction de l'écart entre les sources (o : initialisation , + : après optimisation, continu : CR)

VII-CONCLUSION

Les algorithmes classiques d'optimisation sont d'autant plus performants qu'ils se basent sur une bonne initialisation des paramètres à estimer. Celle proposée dans cet article permet d'atteindre cet objectif, sous des contraintes minimales concernant la connaissance de l'antenne. Elle montre de plus l'intérêt de l'utilisation de plusieurs macrocapteurs : le gain en rapport Signal/Bruit est en effet proportionnel au nombre de macrocapteurs composant l'antenne. Ce gain en précision de l'estimation des paramètres peut s'avérer très utile par la suite. De fait, les estimées ainsi calculées servent de point de départ, d'une part à l'autocalibration de l'antenne, d'autre part au traitement large bande des signaux reçus. Ainsi, l'étude de ces 2 traitements, déjà amorcée dans le cas particulier où $n=2$ sous-antennes [2], devra être généralisée, de la même manière, dans l'optique d'une amélioration similaire des performances d'estimation obtenues.

Références :

- [1] « Localisation passive à l'aide d'un réseau de dipôles de géométrie inconnue », P. Forster et F. Martinerie, GRETSI 93, Juan -Les-Pins
- [2] « Array Shape Calibration and Source Localization with an Array of Unknown Geometry », P. Forster and F. Martinerie, EUSIPCO 94, Edimburgh.
- [3] « ESPRIT-Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques », R. Roy and T. Kailath, IEEE-ASSP, July 1989, pp. 984-995.
- [4] « Sensor Array Processing Based on Subspace Fitting », M. Viberg and B. Ottersten, IEEE-SP, May 1991, pp. 1110-1121.
- [5] « Multiple Invariance ESPRIT », A.L. Swindlehurst, Ottersten , R. Roy and T. Kailath, IEEE-SP, April 1992, pp. 867-881.