



RECONSTRUCTION BAYÉSIENNE 3D A PARTIR DE MESURES INCOMPLETES EN IMAGERIE A ONDES DIFFRACTÉES

M.K. Nguyen*[†] et A. Mohammad-Djafari*

*Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS–ESE–UPS)

Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cédex, France

[†]Université de Cergy-Pontoise, 95014 Cergy-Pontoise Cédex

nguyen@lss.supelec.fr, djafari@lss.supelec.fr

RÉSUMÉ

Nous nous intéressons à la reconstruction tridimensionnelle (3D) d'un objet à partir de mesures incomplètes et bruitées du champ électromagnétique diffracté par cet objet. Il s'agit d'un problème inverse mal-posé, d'autant plus que les mesures effectuées dans un plan sont très insuffisantes pour une reconstruction 3D. Nous proposons de résoudre le problème dans le cadre d'une approche bayésienne au sens du maximum *a posteriori* (MAP) avec des lois *a priori* à maximum d'entropie (ME) pour l'objet. La reconstruction 2D par cette approche a déjà donné de bons résultats [4]. Cette communication présente l'extension de cette approche au cas 3D en prenant en compte les difficultés particulières posées par la reconstruction 3D.

ABSTRACT

We are interested in three-dimensional (3D) reconstruction of an objet from the incomplete and noisy data of the scattered field measured on a plane behind the object. It is a very ill-posed inverse problem, because of the severely limited number of measurements. We propose to resolve the problem using a Bayesian maximum *a posteriori* (MAP) approach and using a specific entropic prior. In 2D case this approach has given good results [4]. This communication presents the extension of the approach and the result in 3D case taking into account the particular difficulties posed by 3D reconstruction.

1. INTRODUCTION

La reconstruction d'un objet à partir de mesures d'ondes électromagnétiques diffractées recueillies au-delà de l'objet est largement étudiée dans plusieurs domaines d'applications : imagerie médicale, exploration géophysique, contrôle non destructif, etc. Le problème est souvent considéré dans le cadre 2D et résolu avec succès par une variété de méthodes. La reconstruction d'un objet 3D reste encore un problème ouvert [5], car dans le cas 3D : le nombre de mesures est nettement inférieur à celui d'inconnues (nombre de voxels), ce qui est dû aux contraintes de temps ou de géométrie de l'acquisition de données. Le remplissage des données manquantes par la rotation de l'objet qui peut être satisfaisant dans le cas 2D peut devenir impossible pour certaines positions dans le cas 3D ou même impraticables pour certaines applications (par exemple, exploration géophysique, recherche des fissures dans un milieu fixe en contrôle non destructif,...). Ces limites rendent la reconstruction 3D plus difficile. Nous allons analyser ces difficultés dans le cas d'un système d'imagerie par diffraction.

Considérons le cas d'un système d'imagerie à ondes diffractées où la présence de l'objet est caractérisée par une source de courants équivalents \vec{J} dont le module $J \neq 0$ à l'intérieur de l'objet et $J = 0$ à l'extérieur de l'objet. La relation entre la source de courants équivalents et le champ diffracté est présentée par l'équation intégrale suivante :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega_0\mu \iiint_{(V)} \overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dV + \vec{B} \quad (1)$$

où $\overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}')$ est la dyade de Green, $\vec{r}(x, y, z)$ est le vecteur repérant un point de mesure, $\vec{r}'(x', y', z')$ est le vecteur localisant un point dans la source, V est le volume de l'objet, \vec{B} représente le bruit de mesure, ω_0 est la fréquence angulaire de l'incidence et μ est la perméabilité magnétique du milieu.

Notre but est de reconstruire l'objet J à partir de mesures du champ diffracté E . Cette reconstruction est un problème inverse mal-posé à cause de la non-unicité dans la résolution du problème de diffraction inverse [2] et surtout de l'instabilité de la solution.

Nous considérons le cas où l'objet 3D est discrétisé en $(N \times N \times N)$ voxels et le plan de mesure est constitué de $(M \times M)$ détecteurs. Nous possédons alors M^2 données pour estimer N^3 valeurs et souvent $M^2 \ll N^3$. Ce grand manque de données rend le problème de la reconstruction 3D encore plus délicat.

Dans cette étude, nous avons choisi de recueillir les données sur trois plans perpendiculaires à trois axes du système de coordonnées cartésiennes. Les mesures effectuées sur chaque plan s'appellent un jeu de données planes, nous avons donc à reconstruire un objet tridimensionnel à partir de trois jeux de données planes.

En choisissant la configuration du système de mesure (Figure 1) dans laquelle le domaine d'investigation est un cube et les mesures sont effectuées sur un plan perpendiculaire à la direction de propagation des ondes planes incidentes, le recueil de ces trois jeux de données peut être effectué sur un seul plan grâce à la rotation de l'objet de 90 degrés. Le choix de cette configuration présente un autre avantage : l'opérateur représentant ce système de



mesure a des propriétés de symétrie, que l'on peut prendre en compte pour développer un algorithme de reconstruction 3D pas trop coûteux en volume et en temps de calcul.

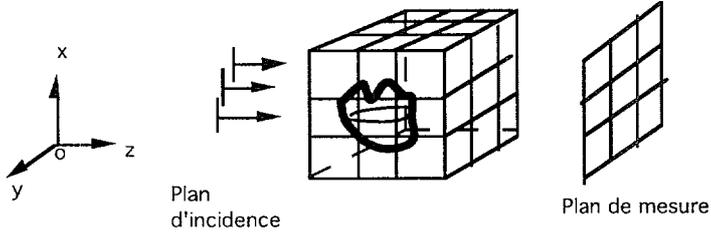


Figure 1. Configuration du système de mesure.

2. MODÉLISATION DU PROBLÈME DIRECT

La forme discrète de l'équation (1) s'écrit :

$$e = Gj + b \tag{2}$$

où les vecteurs e , j et b représentent respectivement les mesures du champ diffracté, la source de courants équivalents et le bruit, G est une matrice déduite de la dyade de Green $\overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}')$ et de la géométrie 3D du système de mesure.

Notons j_1 (ou j) : l'objet initial, R_i : l'opérateur de rotation, j_2 et j_3 : les objets obtenus après les rotations successives de l'objet initial suivant les axes (x , y et z). Nous avons :

$$\begin{aligned} j_2 &= R_1 j_1 \\ j_3 &= R_2 j_1 \end{aligned}$$

ou bien

$$j_1 = R_1^{-1} j_2 = R_2^{-1} j_3.$$

Les relations entre les trois jeux de données e_1, e_2, e_3 et j_1, j_2 et j_3 peuvent s'écrire

$$e_1 = G j_1 + b_1 = G j + b_1 = G_1 j + b_1 \tag{3}$$

$$e_2 = G j_2 + b_2 = G R_1 j + b_2 = G_2 j + b_2 \tag{4}$$

$$e_3 = G j_3 + b_3 = G R_2 j + b_3 = G_3 j + b_3. \tag{5}$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} [j] + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

A cette étape le choix de la configuration (Figure 1) et de la rotation de l'objet suivant les axes est encore une fois justifié, car l'opérateur R_i correspondant est une matrice qui ne contient que des 0 ou 1. Ceci permet de calculer j_2 et j_3 ou G_2 et G_3 avec une économie considérable de place mémoire et de temps pour un algorithme 3D.

Si nous connaissons les trois ensembles de données e_1, e_2 et e_3 , pour obtenir la solution j nous avons à inverser la relation (6) dans laquelle la matrice G est très mal-conditionnée. Nous proposons une méthode d'inversion fondée sur l'estimation bayésienne au sens du maximum *a posteriori* que nous présentons dans le paragraphe suivant. Nous reviendrons sur la mise en œuvre de la méthode proposée dans le cas 3D dans la section 4.

3. RÉOLUTION DU PROBLÈME INVERSE

L'approche bayésienne présente un atout, parmi autres, permettant d'inclure les informations *a priori* dans la résolution d'un problème mal-posé [1]. Dans le cas de l'imagerie à ondes diffractées, les fondements de la méthode proposée et son application en reconstruction 2D se trouvent dans la référence [4], l'un de nos travaux antérieurs. En résumé : pour une équation de type (2) la règle de Bayes permet de combiner l'information *a priori* sur l'objet inconnu j , traduite par une loi de probabilité $p(j)$ et l'information contenue dans le modèle de mesures et les données e , traduite par la vraisemblance $p(e/j)$, dans la loi *a posteriori* $p(j/e)$. La solution MAP est :

$$\hat{j} = \arg \max_j \{p(j/e) \times p(j) p(e/j)\}. \tag{7}$$

L'étape essentielle dans l'approche bayésienne est la modélisation des informations *a priori* par des lois de probabilité.

Dans cette étude, nous référons à des lois *a priori* à maximum d'entropie qui ont la forme exponentielle suivante :

$$p(j) \propto \exp \left[- \sum_k \theta_k \phi_k(j) \right] \tag{8}$$

où $\phi_k(j) = \sum_{n=1}^{N^3} \phi_k(j_n)$ et θ_k sont les paramètres de la loi (hyperparamètres).

A titre d'exemple, on peut mentionner les lois Gamma, Béta, gaussienne tronquée, etc. Les avantages de ces lois sont nombreux: elles appartiennent à la famille des lois exponentielles généralisées. Parmi ces lois, certaines possèdent des propriétés intéressantes : l'invariance par changement d'échelle de l'estimateur [3], l'existence d'une relation analytique entre les hyperparamètres de ces lois et leurs deux premiers moments, ce qui facilite l'étape d'estimation de ces hyperparamètres par l'utilisation de la méthode des moments (MM).

Dans notre exemple, nous avons travaillé avec la loi Gamma dépendant de deux paramètres et ayant l'expression suivante :

$$p(j) \propto \exp [-\theta_1 \phi_1(j) - \theta_2 \phi_2(j)] \tag{9}$$

avec

$$\phi_1(j) = \sum_{n=1}^{N^3} \log j_n \quad \text{et} \quad \phi_2(j) = \sum_{n=1}^{N^3} j_n. \tag{10}$$

Quant au modèle de données, en supposant le bruit blanc de moyenne nulle et de variance connue σ^2 , nous avons

$$p(e/j) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} Q(j) \right] \quad \text{avec} \quad Q(j) = \frac{1}{\sigma^2} [e - G j]^t [e - G j]. \tag{11}$$

Prenant en compte (9) et (11), la solution MAP (7) devient :

$$\hat{j} = \arg \min_j \{F(j) = Q(j) + \theta_1 \phi_1(j) + \theta_2 \phi_2(j)\}. \tag{12}$$

Etant donnés les hyperparamètres (θ_1, θ_2) le critère (12) est convexe en j et sa minimisation peut se faire aisément par un algorithme de gradient ou de gradient conjugué. Dans le cas où (θ_1, θ_2) ne sont pas connus, nous avons proposé une méthode fondée sur le maximum de vraisemblance généralisée et sur la méthode des moments qui permet, d'une manière itérative, d'estimer conjointement l'objet \hat{j} et (θ_1, θ_2) [3], [4].

4. MISE EN OEUVRE ET SIMULATION

La mise en œuvre de la méthode proposée dans le cas 3D comporte les étapes suivantes :

- Création d'un objet original 3D et rotation de l'objet suivant les axes (l'obtention des trois objets $\mathbf{j}^1, \mathbf{j}^2, \mathbf{j}^3$).

- Calcul des trois jeux de données $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et \mathbf{e}_3 correspondant aux champs diffractés produits par l'objet initial et l'objet en rotation selon (3), (4) et (5).

- Inversion de la relation (6) d'après le critère (12). Le terme à minimiser s'écrit

$$F(\mathbf{j}) = \sum_{i=1}^3 \|\mathbf{e}_i - G_i \mathbf{j}\|^2 + \sum_{k=1}^2 \theta_k \phi_k(\mathbf{j}) \quad (13)$$

Le gradient de l'expression (13) est

$$\nabla F(\mathbf{j}) = -2 \sum_{i=1}^3 G_i^t (\mathbf{e}_i - G_i \mathbf{j}) + \sum_{k=1}^2 \theta_k \nabla \phi_k(\mathbf{j}). \quad (14)$$

La solution optimale $\tilde{\mathbf{j}}$ satisfaisant la condition $\nabla F(\tilde{\mathbf{j}}) = 0$ est

$$\tilde{\mathbf{j}} = \left[\sum_{i=1}^3 (G_i^t G_i + D) \right]^{-1} \sum_{i=1}^3 G_i^t \mathbf{e}_i \quad (15)$$

où D est une matrice diagonale dont les éléments sont $D_{n,n} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \theta_k \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial j_n^2}$. Dans le cas général les éléments de la matrice D dépendent de \mathbf{j} et l'équation (15) est implicite en \mathbf{j} . Dans le cas des lois entropiques D est une matrice diagonale et elle devient une matrice identité pour le cas gaussien ($\phi_k(\mathbf{j}) = \sum_{n=1}^3 j_n^2$).

En remplaçant $G_1 = G, G_2 = GR_1, G_3 = GR_2$ dans (15) et notant que pour un opérateur de rotation de 90 de degrés nous avons

$$R_i^{-1} = R_i^t$$

et de plus l'opérateur G est tel que

$$R_1^t G^t G R_1 = G^t G = R_2^t G^t G R_2, \quad (16)$$

nous en déduisons

$$\tilde{\mathbf{j}} = \frac{1}{3} (G^t G + D)^{-1} (G^t \mathbf{e}_1 + R_1^t G^t \mathbf{e}_2 + R_2^t G^t \mathbf{e}_3). \quad (17)$$

Notant

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{j}}_1 &= (G^t G + D)^{-1} G^t \mathbf{e}_1 \\ \tilde{\mathbf{j}}_2 &= (G^t G + D)^{-1} R_1^t G^t \mathbf{e}_2 \\ \tilde{\mathbf{j}}_3 &= (G^t G + D)^{-1} R_2^t G^t \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\tilde{\mathbf{j}} = \frac{1}{3} (\tilde{\mathbf{j}}_1 + \tilde{\mathbf{j}}_2 + \tilde{\mathbf{j}}_3) \quad (18)$$

qui permet de décomposer le problème initial en trois problèmes de même structure. Ceci contribue à réduire le coût de calcul global de la reconstruction. Appelons $\tilde{\mathbf{j}}$ la reconstruction finale, elle est obtenue à partir de trois reconstructions simples $\tilde{\mathbf{j}}_1, \tilde{\mathbf{j}}_2$ et $\tilde{\mathbf{j}}_3$.

Pour illustrer la performance de la méthode proposée, nous avons réalisé les simulations avec l'objet original 3D asymétrique, de taille et de forme différentes en chaque direction. Le domaine d'objet est discrétisé en $(15 \times 15 \times 15)$ voxels et la mesure est effectuée sur un plan de dimension (15×15) . L'algorithme développé pour cette méthode donne des résultats avec un coût raisonnable de calcul (les reconstructions simples sont obtenue après 6 itérations).

Le résultat de la reconstruction 3D à partir de mesures fortement bruitées (rapport signal à bruit $\frac{S}{N} = 10\text{dB}$) est présenté dans la figure 2.

La qualité de la reconstruction est mesurée par une distance relative entre les objets original et reconstruit

$$D = \frac{\|\hat{\mathbf{j}} - \mathbf{j}\|^2}{\|\hat{\mathbf{j}}\|^2}. \text{ Dans cet exemple } D = 0,38.$$

5. CONCLUSIONS

Nous avons proposé une méthode de reconstruction tridimensionnelle à partir de trois ensembles de mesures planes sachant qu'en principe, ces trois jeux de données ne sont pas suffisants pour reconstruire un objet 3D de forme quelconque. Nous examinons ensuite quelle est la limite de la validité de cette méthode. En effet, suivant l'équation (1), chaque champ diffracté mesuré sur un plan (perpendiculaire à l'axe z , par exemple) est l'intégrale des champs diffractés contribus par toutes les coupes de l'objet \mathbf{j} dans la direction z . Sans information supplémentaire l'inversion de cette relation ne peut donc fournir le détail de chaque coupe, seule la moyenne de \mathbf{j} dans la direction z est obtenue. Par conséquent, plus les coupes sont identiques (en direction z), c'est à dire qu'elles ne dépendent pas de z , mieux elles sont reconstruites. Le même raisonnement est valable pour d'autres directions (x et y). Ceci se traduit par des propriétés de séparabilité pour l'objet à reconstruire :

$$J(x, y, z) = J_x(x) J_y(y) J_z(z)$$

et de symétrie par rapport à chacun des axes où $J_x(x), J_y(y)$ et $J_z(z)$ sont les fonctions paires. Plus ces propriétés sont respectées, meilleure est la qualité de reconstruction. L'objet symétrique (cas factorisable particulier) sera bien reconstruit à partir d'un seul (au lieu de trois) ensemble de mesures planes.

La figure 2 montre aussi l'influence de non respect de la propriété de séparabilité sur la qualité de reconstruction car l'objet est choisi exprès non factorisable dans cet exemple.

6. RÉFÉRENCES

- [1] G. Demoment, "Reconstruction and restoration: overview of common estimation structures and problems," *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Processing*, Vol. 37, No. 12., pp. 2024-2035, Dec. 1989.
- [2] A.J. Devaney, G.C Sherman. "Nonuniqueness in inverse source and scattering problems," *IEEE, EP-30*, No.5, (1982).
- [3] A. Mohammad-Djafari and J. Idier, "Maximum entropy prior laws of images and estimation of their parameters," *W.T. Grandy, Jr. and L.H. Schick(eds), Maximum Entropy and Bayesian Methods*, pp:285-293, by Kluwer Academic Publishers, (1991).
- [4] M.K Nguyen and A. Mohammad-Djafari, "Bayesian approach with the maximum entropy principle in image reconstruction from microwave scattered field data," *IEEE Trans. on Medical Imaging*, Vol.13, No.2. june, pp. 254-262, (1994).
- [5] Yoram Bresler, Jeffrey A. Fessler and Albert Macovski, "A Bayesian approach to reconstruction from incomplete projections of a multiple object 3D domain," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.11, No.8. August. pp. 840-858, (1989).

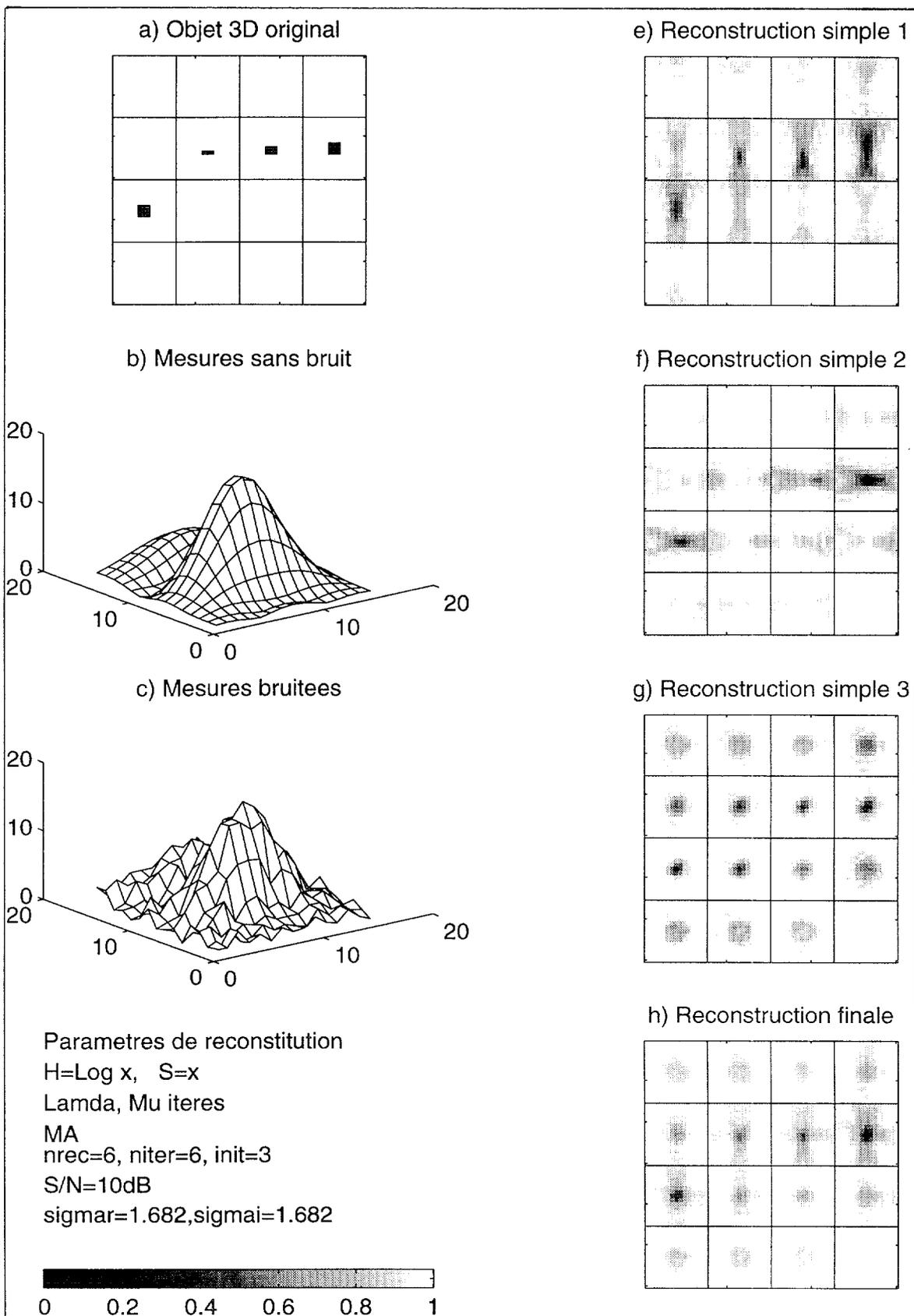


Figure 2 Reconstruction 3D

(l'objet est présenté coupe par coupe et la valeur des voxels est normalisée en 256 niveaux de gris)

- a) objet original 3D asymétrique, de taille et de forme différentes en chaque direction,
- b) mesures simulées dans un plan sans bruit
- c) mesures fortement bruitées avec $\frac{S}{N} = 10\text{dB}$,
 (les données étant des grandeurs complexes, seuls leurs modules sont présentés)
- e, f et g) reconstructions simples ($\theta_1 = \text{Lamda}$, $\theta_2 = \text{Mu}$, $\phi_1 = H$ et $\phi_2 = S$),
- h) reconstruction finale.