



Echantillonnage en tomographie 3D

Laurent Desbat

TIMC-IMAG, URA CNRS 1618,
IAB, faculté de Médecine, UJF
38706 La Tronche France

Résumé

Nous donnons les conditions d'échantillonnage de la transformée en rayons X en 3D lorsque le capteur décrit une trajectoire circulaire autour de l'objet mesuré. Nous montrons que l'échantillonnage 3D hexagonal entrelacé est $4/\sqrt{3}$ fois plus efficace que la meilleure grille standard.

Abstract

The sampling conditions of the X-ray transform in 3D are given in the case of a circular trajectory of the detector. The Interlaced Hexagonal (IH) 3D sampling scheme is shown to be $4/\sqrt{3}$ more efficient than the best standard grid.

1 Introduction

La tomographie moderne a pour objectif de produire des systèmes d'acquisition rapides et des reconstructions homogènes dans les trois directions d'espace, voire d'introduire le temps comme quatrième dimension. Les cliniciens utilisent de manière classique et routinière des scanners permettant de reconstruire des coupes de coefficients d'atténuation en tomodensitométrie ou des cartes d'activités en tomoscintigraphie. Les acquisitions et les reconstructions se déroulent classiquement par coupe et la résolution suivant la troisième dimension d'espace est souvent dégradée. Par ailleurs, l'acquisition est relativement lente. Ces raisons, entre autres, ont conduit à des projets de tomographie 3D avec des capteurs 2D, par exemple [11, 12].

Les principaux travaux de tomographie 3D concernent l'inversion de la transformée conique ou transformée en rayons divergents:

$$\mathcal{D}_a f(v) = \mathcal{D}f(v, a) = \int_0^\infty f(a + uv) du, \quad (1)$$

où $a \in \mathbb{R}^3$, le point source, décrit en général une courbe fermée et $v \in S^2$, la sphère unité, est la direction du faisceau. De nombreux travaux traitent de l'inversibilité de (1) et des méthodes de reconstructions associées: on peut citer [20, 8, 9, 1, 19, 17, 12, 21] et se reporter à leur bibliographie.

L'objet de ce travail est de proposer des échantillonnages efficaces de la transformée en rayons X

$$\mathcal{P}_\zeta f(y) = \mathcal{P}f(\zeta, y) = \int_{-\infty}^\infty f(y + u\zeta) du, \quad (2)$$

restreinte au cercle unité $\zeta \in S^1$ ($y \in \zeta^\perp$). En effet, elle est aux géométries coniques en 3D ce que la transformée

de Radon est aux géométries en éventail en 2D. Or plus de dix années ont séparé les schémas d'échantillonnage parallèle efficaces [2, 18, 14] des schémas en éventail efficaces [15].

Dans la suite de ce travail nous faisons les hypothèses suivantes: $f \in C_0^\infty(\Omega)$ où $\Omega = \Omega^2 \times [-1, 1]$ le cylindre plein unitaire de \mathbb{R}^3 est le support de f , Ω^2 est le disque unitaire. En introduisant $\phi \in [0, 2\pi]$, $\zeta = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)^t$, $\theta = (\cos \phi, \sin \phi, 0)^t$, $y = s\theta + te_3$, $s \in [-1, 1]$, $t \in [-1, 1]$, nous paramétrons cette transformation de la manière suivante:

$$g(\phi, s, t) = \mathcal{P}f(\zeta, s\theta + te_3).$$

2 Conditions d'échantillonnage

L'étude de l'échantillonnage en tomographie 3D est essentielle. Elle permet d'une part de définir les géométries optimales d'acquisition. Elle permet d'autre part de fixer les limites de résolutions sur la fonction à reconstruire à partir d'une géométrie d'acquisition donnée. Ces résultats peuvent avoir une incidence sur la conception des détecteurs en tomodensitométrie ou des collimateurs en imagerie nucléaire.

Des conditions d'échantillonnage optimales peuvent être déduites de l'étude du noyau des opérateurs considérés comme dans [13] où les projections sont supposées continues. Nous adoptons la démarche classique en traitement du signal qui consiste à étudier la géométrie du support essentiel de la fonction $g(\phi, s, t)$ que nous cherchons à échantillonner. Nous notons $\hat{h}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} h(x) dx$ la transformée de Fourier de h . En particulier nous utilisons la condition de Shannon généralisée [16] en dimension n (ici $n = 3$) aux



schémas d'échantillonnage engendrés par une matrice W $n \times n$ régulière: soit K le support de \hat{h} , si les ensembles $K + 2\pi W^{-t}l, l \in \mathbb{Z}^n$ sont deux à deux disjoints alors $h(x) = \det W (2\pi)^{-n/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} h(Wl) \hat{\chi}(x - Wl)$. Des extensions de ce résultat à l'hypothèse plus faible " $\int_{\xi \notin K} |\hat{h}(\xi)| d\xi$ est négligeable", et aux cas des fonctions périodiques en certaines variables, peuvent être trouvées dans [14].

La détermination de schémas d'échantillonnage satisfaisant les conditions de non recouvrement implique la détermination du support essentiel de la transformée de Fourier de $g(\phi, s, t)$. Puisque g est périodique de période 2π en sa première variable nous considérons les coefficients de Fourier :

$$\hat{g}_k(\sigma, \tau) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \hat{g}(\phi, \sigma, \tau) e^{-ik\phi} d\phi,$$

où $\hat{g}(\phi, \sigma, \tau)$ est la transformée de Fourier 2D de $g(\phi, s, t)$ suivant les variables s et t . f sera supposée essentiellement b bande limitée: nous supposons que $\epsilon_0(f, b)$ est négligeable avec $\epsilon_d(f, b) = \int_{|\xi|>b} |\xi|^d |\hat{f}(\xi)| d\xi$. Nous utiliserons la notation $\eta(\vartheta, b)$ introduite dans [14] pour les fonctions décroissant exponentiellement vers 0 lorsque b tend vers l'infini avec $0 < \vartheta < 1$ fixé, c'est à dire admettant une majoration du type:

$$0 \leq \eta(\vartheta, b) \leq C(\vartheta) e^{-\lambda(\vartheta)b}, \tag{3}$$

avec $b \geq B(\vartheta)$ et $\lambda(\vartheta) > 0, B(\vartheta) > 0$ et $C(\vartheta) > 0$.

Nous pouvons obtenir le résultat central suivant :

Théorème 1 *Soit l'ensemble*

$$K = \{(k, \sigma, \tau) \ ; \ |\sigma| < b, \\ |k| < \max(|\sigma|/\vartheta, (1/\vartheta - 1)b), \\ |\tau| < c(b, \sigma)\},$$

où $0 < \vartheta < 1$, arbitrairement proche de 1 et

$$c(b, \sigma) = \begin{cases} b & \text{si } |\sigma| \leq \sigma_{\vartheta,b} \\ \sqrt{b^2 - \sigma^2} & \text{sinon } (\sigma_{\vartheta,b} < |\sigma| < b) \end{cases}$$

avec $\sigma_{\vartheta,b} = \max(1, (1 - \vartheta)b - \vartheta)$. Si f est essentiellement b bande limitée, alors

$$\sum_k \int_{(k, \sigma, \tau) \notin K} |\hat{g}_k(\sigma, \tau)| d\tau d\sigma \\ \leq \|\hat{f}^{x_3}\|_{L^1(\Omega^2 \times \mathbb{R})} 2(2\pi)^{-1/2} \eta_2(\vartheta, (1/\vartheta - 1)b) \\ + \epsilon_0(f, b) \left((2\pi)^{-1/2} (4/\vartheta + 2) + B_J(\vartheta, b) \right) \tag{4}$$

avec $B_J(\vartheta, b)$ borné indépendamment de b et η_2 de la forme de (3).

La démonstration de ce théorème paraîtra dans un autre article. $\hat{g}_k(\sigma, \tau)$ est négligeable en dehors de K , en un sens adapté à l'application du théorème 1.5 p.62 de [14] et de son extension eq. (1.14) p.64 du même ouvrage. En résumé, le support essentiel de la transformée de Fourier de g est contenu dans K .

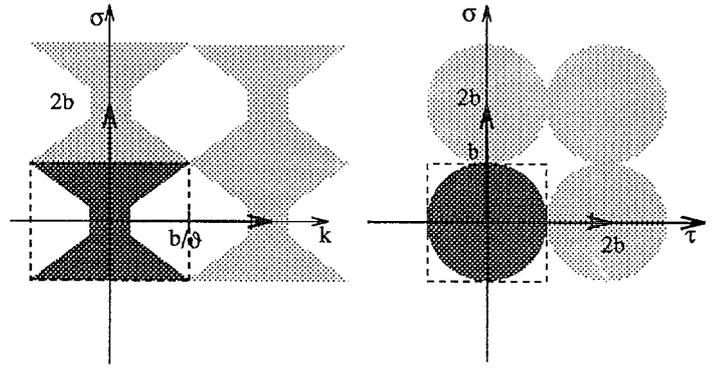


FIG. 1 - Non recouvrement des ensembles $K + 2\pi W_s^{-t}l, l \in \mathbb{Z}^3$: visualisation dans les plans (k, σ) et (σ, τ) .

3 Schémas d'échantillonnage

L'objectif de l'échantillonnage optimal est de trouver parmi les matrices régulières W réalisant la condition de non recouvrement des ensembles $K + 2\pi W^{-t}l, l \in \mathbb{Z}^3$, une matrice dont le déterminant est maximum. En effet, le déterminant de W est le volume de la maille élémentaire du schéma $Wl, l \in \mathbb{Z}^3$: plus ce volume élémentaire est petit, moins il faudra de points pour couvrir le domaine Ω .

Nous pouvons tout d'abord remarquer que le plus petit parallélépipède rectangle contenant l'ensemble K est $[-b/\vartheta, b/\vartheta] \times [b, b] \times [b, b]$, voir la figure 1. Nous pouvons donc en déduire que la matrice diagonale W_s réalisant la condition de non recouvrement dont le déterminant est maximum, ou de manière équivalente telle que $\det(W_s^{-t})$ est minimum, est la matrice :

$$W_s = \frac{\pi}{b} \begin{bmatrix} \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

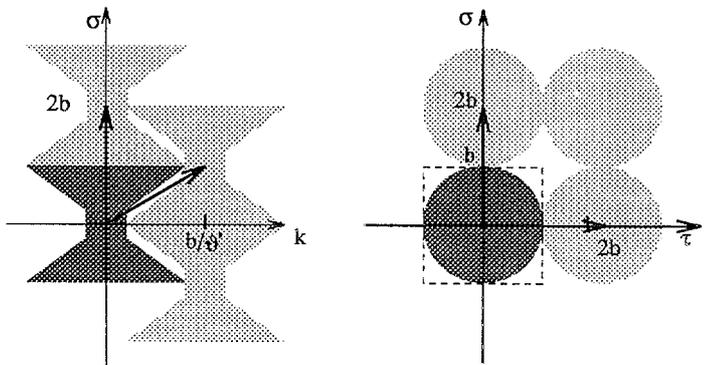


FIG. 2 - Non recouvrement des ensembles $K + 2\pi W_s^{-t}l, l \in \mathbb{Z}^3$: visualisation dans les plans (k, σ) et (σ, τ) .

Comme en 2D (cf [18, 14]) nous pouvons exploiter la forme géométrique de l'ensemble K dans le plan (k, σ) ,

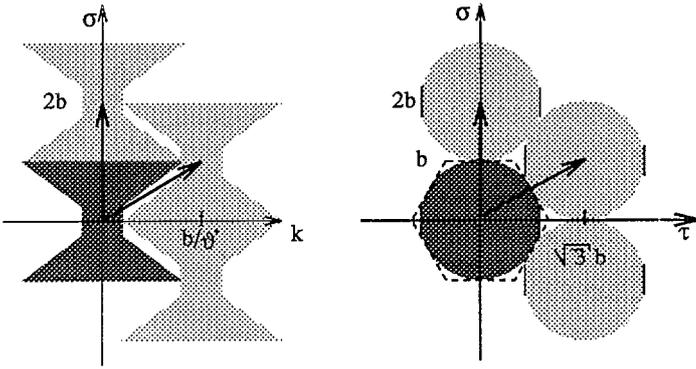


FIG. 3 - Non recouvrement des ensembles $K + 2\pi W_{IH}^{-t}l$ pour $l_3 = 0$ (droite) et $l_1 = 0$ (gauche).

cf figure 2, pour produire des schémas d'échantillonnage entrelacés avec

$$2\pi W_I^{-t} = b \begin{bmatrix} 1/\vartheta' & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ et } \vartheta' = \frac{\vartheta}{2 - \vartheta},$$

satisfaisant la condition de non recouvrement. Le schéma entrelacé est alors engendré par la matrice

$$W_I = \frac{\pi}{b} \begin{bmatrix} 2\vartheta' & -\vartheta' & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

On peut remarquer que $\det(W_I) = \frac{2\vartheta'}{\vartheta} \det(W_S)$. Pour ϑ proche de 1, le schéma entrelacé est quasiment deux fois plus efficace que le schéma standard.

Nous voulons enfin montrer que le schéma d'échantillonnage $W_{IH}l, l \in \mathbb{Z}^3$ avec

$$W_{IH} = \frac{\pi}{b} \begin{bmatrix} 2\vartheta' & -\vartheta' & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

satisfait les conditions de non recouvrement lorsque b est grand ($(1 - \vartheta)b - \vartheta > 1$) et ϑ suffisamment proche de 1. Nous pouvons déjà remarquer que le schéma engendré par (7) est $4/\sqrt{3}$ fois plus efficace que le schéma engendré par (6).

Il suffit de vérifier que les ensembles $K + 2\pi W_{IH}^{-t}l, l \in \mathbb{Z}^3$ ne recouvrent pas K : en effet $(K + 2\pi W_{IH}^{-t}l) \cap (K + 2\pi W_{IH}^{-t}l') = 2\pi W_{IH}^{-t}l + (K \cap (K + 2\pi W_{IH}^{-t}(l' - l)))$.

On peut remarquer tout d'abord que la matrice

$$2\pi W_{IH}^{-t} = b \begin{bmatrix} 1/\vartheta' & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

est choisie de manière à ce que les ensembles $K + 2\pi W_{IH}^{-t}l$ avec $l_3 = 0$ d'une part (schéma entrelacé) et $l_1 = 0$ d'autre part (schéma hexagonal) ne se recouvrent pas (cf. figure 3). Pour cela il suffit que $\sigma_{\vartheta,b} (< b)$ vérifie

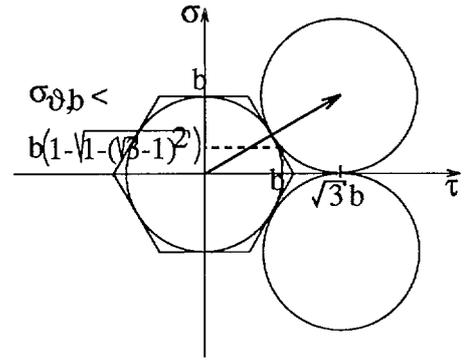


FIG. 4 - Condition sur $\sigma_{\vartheta,b}$ de non recouvrement des ensembles $K + 2\pi W_{IH}^{-t}l$ pour $l_1 = 0$.

$(b - \sqrt{3}b)^2 + (\sigma_{\vartheta,b} - b)^2 = b^2 < b$ ou de manière équivalente $\sigma_{\vartheta,b} < b \left(1 - \sqrt{1 - (\sqrt{3} - 1)^2}\right)$ (voir figure 4). Pour b suffisamment grand ($(1 - \vartheta)b - \vartheta > 1$) cela équivaut à $\vartheta(1 + 1/b) > \sqrt{1 - (\sqrt{3} - 1)^2}$.

Nous avons $K \subset [-b/\vartheta, b/\vartheta] \times [-b, b] \times [-b, b]$:

- Si $|l_1| \geq 2$ alors pour $x \in K$, la première composante $x_1 + l_1/\vartheta$ de $x + 2\pi W_{IH}^{-t}(l_1, l_2, l_3)^t$ vérifie $|x_1 + l_1b/\vartheta'| \geq |x_1| - |l_1b/\vartheta'| \geq b(2/\vartheta' - 1/\vartheta) > b/\vartheta$ et donc $x + 2\pi W_{IH}^{-t}(l_1, l_2, l_3)^t \notin K$.
- Si $|l_3| \geq 2$ alors pour $x \in K$, la troisième composante $x_3 + \sqrt{3}bl_3$ de $x + 2\pi W_{IH}^{-t}(l_1, l_2, l_3)^t$ vérifie $|x_3 + \sqrt{3}bl_3| \geq (2\sqrt{3} - 1)b \geq b$ et donc $x + 2\pi W_{IH}^{-t}(l_1, l_2, l_3)^t \notin K$.

Nous restreignons donc l'étude à $(l_1, l_3) \in \{-1, 1\}^2$. Dans ce cas $|l_1 + l_3| \leq 2$, donc si $|l_2| \geq 2$, $|l_1 + 2l_2 + l_3| \geq ||2l_2| - |l_1 + l_3|| \geq 4 - 2 = 2$ et ainsi la deuxième composante de $x + 2\pi W_{IH}^{-t}(l_1, l_2, l_3)^t$ vérifie, toujours par le même procédé, $|x_2 + (l_1 + 2l_2 + l_3)b| \geq 2b - b = b$. Nous pouvons désormais conclure que si $x \in K$, $(l_1, l_3) \in \{-1, 1\}^2$ et $|l_2| \geq 2$ alors $x + 2\pi W_{IH}^{-t}(l_1, l_2, l_3)^t \notin K$.

Il ne reste donc à considérer que les cas $(l_1, l_2, l_3) \in \{-1, 1\} \times \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 1\}$. Puisque K est à symétrie centrale ($x \in K \Rightarrow -x \in K$ ou autrement dit $K = -K$) alors $x \in ((K + 2\pi W_{IH}^{-t}l) \cap K) \Rightarrow -x \in K$ or $-x \in (K + 2\pi W_{IH}^{-t}(-l))$. Donc on peut restreindre l'étude de non recouvrement à $l_1 = 1, (l_2, l_3) \in \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 1\}$.

- Si $l_1 = 1, l_2 = 1, l_3 \in \{-1, 1\}$ alors $|l_1 + 2l_2 + l_3| \geq 2$. Nous avons déjà vu que cette condition impliquait le non recouvrement de K et $K + 2\pi W_{IH}^{-t}l$.
- si $l_1 = 1, l_2 = 0, l_3 = 1$ alors $|l_1 + 2l_2 + l_3| = 2$. Pour la même raison, pas de recouvrement.
- si $l_1 = 1, l_2 = -1, l_3 = -1$ alors $|l_1 + 2l_2 + l_3| = 2$ donc pas de recouvrement.

Il ne reste donc que les cas $l_1 = 1, l_2 = 0, l_3 = -1$ et $l_1 = 1, l_2 = -1, l_3 = 1$ qui se discutent de la même

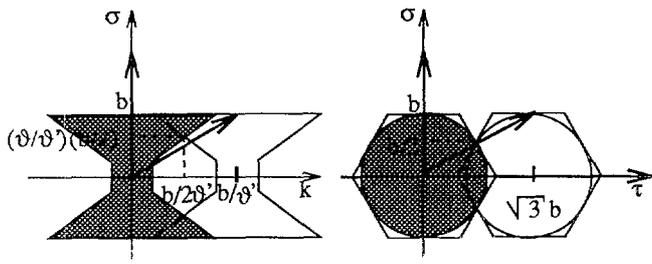


FIG. 5 - Ensembles K et $K + 2\pi W_{IH}^{-t}(1, -1, 1)^t$: l'intersection en projection dans le plan (k, σ) implique $|\sigma| > b/2$; Dans le plan (σ, τ) il faut $|\sigma| \leq b/2$.

manière (symétrie par rapport au plan (k, σ)). Nous ne discutons donc que le cas $l_1 = 1, l_2 = -1, l_3 = 1$. On peut remarquer dans la figure 5 qu'un recouvrement par $K + 2\pi W_{IH}^{-t}(1, -1, 1)^t$ de K implique en projection dans le plan (k, σ) que $|\sigma| \geq (\vartheta/\vartheta')b/2 > b/2$ alors qu'un recouvrement dans le plan (σ, τ) implique $|\sigma| \leq b/2$. Donc $K + 2\pi W_{IH}^{-t}(1, -1, 1)^t$ ne recouvre pas K . Ce qui termine la démonstration.

Des théorèmes d'échantillonnage généralisés [7] permettent de considérer des perturbations du schéma efficace, cf. [3]. Notre résultat constitue un premier pas vers l'échantillonnage optimal en géométrie conique. Comme en 2D [6], son extension à la tomographie vectorielle est presque immédiate.

Enfin on peut vérifier simplement que tous les schémas présentés ici peuvent être générés à partir de capteurs 2D à échantillonnage rectangulaire. Des reconstructions à partir de ces schémas sont proposées dans [4] et montrent leur intérêt. Elles sont basées sur des méthodes algébriques régularisées avec choix automatique des hyperparamètres (voir [10, 5]). Les méthodes analytiques sont sans doute préférables et leur utilisation dans ce cadre sera proposée ultérieurement.

Références

- [1] R. Clack, D. Townsend, and M. Defrise. An algorithm for three-Dimensional reconstruction incorporating cross-plane rays. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 8(1):32-43, 1989.
- [2] A.M. Cormack. Sampling the Radon transform with beam of finite width. *Phys. Med. Biol.*, 23(6):1141-1148, 1978.
- [3] L. Desbat. Efficient sampling on coarse grids in tomography. *Inverse Problems*, 9:251-269, 1993.
- [4] L. Desbat. Efficient parallel sampling in vector field tomography. *Inverse Problems*, 1995. To appear. Communication to the international meeting "Mathematical Methods in Tomography" (Oberwolfach 94).
- [5] L. Desbat and D. Girard. The 'minimum reconstruction-error' choice of regularization parameters: some effective methods and their application to deconvolution problem. *SIAM Scientific and Statistical Computing*, 1995. To appear.
- [6] L. Desbat and A. Wernsdörfer. Direct Algebraic Reconstruction and Optimal Sampling in Vector Tomography. *IEEE trans. Signal Proc.*, 1995. To appear.
- [7] A. Faridani. A generalized sampling theorem for locally compact abelian groups. *Math. Comp.*, 63(207):307-327, 1994.
- [8] I.A. Feldkamp, L.C. Davis, and J.W. Kress. Practical cone-beam algorithm. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1(6):612-619, 1984.
- [9] D.V. Finch. Cone beam reconstruction with sources on a curves. *SIAM J. Appl. Math.*, 45(4):665-673, 1985.
- [10] D.A. Girard. Asymptotic optimality of the fast randomized versions of GCV and C_L in ridge regression and regularisation. *Ann. of Stat.*, 19(4):1950-1963, 1991.
- [11] P. Grangeat. *Analyse d'un système d'imagerie 3D par reconstructions à partir de radiographies X en géométrie conique*. PhD thesis, ENST, 1987.
- [12] P. Grangeat. Reconstruction d'images tridimensionnelles. Technical report, INPG, 1993. Thèse d'habilitation à diriger des recherches.
- [13] A.K. Louis. Optimal Sampling in Nuclear Magnetic Resonance. *J. of Comput. Assist. Tomography*, 6(2):334-340, 1982.
- [14] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, 1986.
- [15] F. Natterer. Sampling in fan-beam tomography. *SIAM J. Appl. Math.*, 53(2):358-380, 1993.
- [16] D.P. Petersen and D. Middleton 1962. Sampling and reconstruction of wavenumber-limited functions in N-dimensional euclidean space. *Inf. Control*, 5:279-323, 1962.
- [17] F. Peyrin, R. Goutte, and M. Amiel. Analysis of a cone beam x-ray tomographic system for different scanning modes. *J. Opt. Soc. Am. A*, 9(9):1554-1563, 1991.
- [18] P.A. Rattey and A.G. Lindgren. Sampling the 2-D Radon transform. *IEEE Trans. ASSP*, 29:994-1002, 1981.
- [19] P. Rizo, P. Grangeat, P. Sire, P. Lemasson, and P. Melennec. Comparison of two three-dimensional x-ray cone-beam reconstruction algorithms with circular source trajectories. *J. Opt. Soc. Am. A*, 8(10):1639-1648, 1991.
- [20] H.K. Tuy. An inversion formula for cone-beam reconstruction. *SIAM J. Appl. Math.*, 43(3):546-552, 1983.
- [21] L. Wang and R.S. Granetz. Series expansion method in three-dimensional tomography. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(11):2292-2295, 1993.