

IDENTIFICATION AVEUGLE D'UN MODÈLE D'ÉTAT POUR LA RÉOLUTION DU PROBLÈME INVERSE EN ÉLECTROCARDIOGRAPHIE

Jalil El-Jakl, Frédéric Champagnat et Yves Goussard

École Polytechnique de Montréal, Institut de génie biomédical
C.P. 6079, Succursale "Centre-ville"
Montréal, Québec, H3C 3A7, Canada

RÉSUMÉ

Cette communication présente une nouvelle méthode pour la régularisation du problème inverse en électrocardiographie. Notre objectif est la reconstruction des potentiels épicardiques à partir des mesures de potentiels effectués à la surface du torse. Cette technique non-invasive est très utile pour effectuer le diagnostic des maladies cardiovasculaires. Nous utilisons la corrélation temporelle des potentiels épicardiques comme information *a priori* pour régulariser le problème inverse. Cette information a été introduite dans [1] sous forme d'un modèle d'état. Notre contribution est le développement d'une méthode d'identification des paramètres de ce modèle par maximum de vraisemblance. Toutes les quantités inconnues sont déterminées à partir des seules données disponibles : les potentiels thoraciques.

ABSTRACT

This paper presents a new method for the regularization of the inverse problem of electrocardiography. Our goal is to reconstruct the epicardial potentials from measured body surface potentials. This non-invasive technique is useful for the diagnostic of cardio-vascular diseases. In our approach, the time-correlation between epicardial potentials is used as the regularizing *a priori* information. This information was introduced in [1] via a state-space representation. Our contribution is the derivation of maximum likelihood estimators for identification of the parameters of the state-space model, and in a second stage, for determination of the epicardial potentials. Therefore, all unknown quantities are determined from the only available data: the body surface potentials.

1 Introduction

Le problème inverse en électrocardiographie (PIE) a pour objectif l'évaluation quantitative de l'activité électrique à la surface du cœur (*potentiels épicardiques* (PE)) à partir de mesures de potentiels effectuées sur le torse (*potentiels thoraciques*). L'obtention de résultats précis est d'un grand intérêt pour effectuer de manière non-invasive le diagnostic de maladies cardio-vasculaires. Il s'agit d'un problème *mal posé*, qu'on est amené à régulariser en introduisant des informations *a priori* sur la solution cherchée. La reconstruction des PE par les méthodes classiques de régularisation au sens de Tikhonov manquent de précision et, par conséquent, ne permettent pas une interprétation correcte de l'activité électrique cardiaque. Récemment, Oster et Rudy [2] ont montré l'intérêt de la prise en compte d'informations sur les corrélations temporelles des PE. Mais ces auteurs n'expliquent pas comment, dans la pratique, introduire ces informations dans la procédure de reconstruction. Brooks et coll. [3] répondent partiellement à cette question mais l'information introduite est limitée et l'estimation des paramètres de régularisation reste problématique.

Nous proposons une méthode pratique permettant de résoudre conjointement ces deux aspects du problème. Dans un premier temps nous introduisons un modèle d'état de la corrélation temporelle. Ceci nous permet une paramétrisation

de la structure de corrélation plus souple que celle introduite dans [3]. Connaissant les paramètres du modèle, les PE peuvent être calculés à l'aide d'un lisseur de Kalman (méthode *supervisée*). Cependant, des études précédentes [1] ont montré une grande variabilité de ces paramètres entre individus. C'est pourquoi, dans un deuxième temps, nous mettons en œuvre une méthode *non-supervisée* d'identification des paramètres de ce modèle. Cette méthode utilise uniquement les potentiels thoraciques et elle est fondée sur une maximisation itérative de vraisemblance par algorithme EM (*Expectation Maximization*).

2 Problème inverse en électrocardiographie

L'équation du problème direct représentant la relation entre potentiels thoraciques et PE est modélisée classiquement par une transformation linéaire instantanée plus un bruit :

$$\Phi_T(n) = H\Phi_E(n) + \omega(n) \quad n = 1 \dots N, \quad (1)$$

où $\Phi_T(n)$ et $\Phi_E(n)$ désignent respectivement les vecteurs de potentiels thoraciques et épicardiques à l'instant n . H , de dimensions $(m \times m)$, est la matrice de transfert entre le cœur et le torse. Celle-ci peut être identifiée par des

méthodes numériques telles que celle décrite dans [4]. $\omega(n)$ est un vecteur de bruit blanc gaussien, centré et de matrice de covariance $r\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ est la matrice identité), représentant les erreurs de modélisation et de mesure.

La solution de l'équation (1) au sens des moindres carrés est excessivement instable à cause du mauvais conditionnement de la matrice $\mathbf{H}$, d'où la nécessité d'une régularisation.

2.1 Régularisation classique

La régularisation de ce problème au sens de Tikhonov et ses variantes ont été appliquées depuis longtemps au PIE; elles consistent à chercher une solution au problème en minimisant un critère qui introduit une information *a priori* de *douceur* sur la distribution des PE instantanés :

$$\arg \min_{\Phi_E(n)} [\|\Phi_T(n) - \mathbf{H}\Phi_E(n)\|^2 + \lambda \|\nabla^k \Phi_E(n)\|^2], \quad (2)$$

où λ est un paramètre de régularisation et k désigne l'ordre de l'opérateur différentiel $\nabla^k(\cdot)$. La solution de (2) est unique, linéaire par rapport aux observations et peut être calculée instant par instant par :

$$\hat{\Phi}_E(n) = (\mathbf{H}^t \mathbf{H} + \lambda \mathbf{K})^{-1} \mathbf{H}^t \Phi_T(n). \quad (3)$$

$\mathbf{K}$ est une matrice déterminée selon l'ordre k et représente l'information *a priori* introduite.

Cette régularisation (facile à mettre en œuvre) donne souvent des résultats de qualité insuffisante. Or, on observe que l'information *a priori* introduite dans (2) ne tient pas en compte l'évolution des PE au cours du temps. Cette évolution correspond à un phénomène de propagation et présente donc de fortes corrélations.

2.2 Utilisation d'informations temporelles pour la régularisation

Oster et Rudy [2] ont montré que l'utilisation d'informations temporelles améliore sensiblement la qualité de la reconstruction par rapport aux approches classiques. Cependant leur étude contribue à mettre en évidence l'importance des corrélations temporelles sans proposer de méthode pratique. Plus tard, Brooks et coll. [3] ont proposé une méthode complètement non-invasive pour résoudre le problème en utilisant une régularisation temporelle. Ils ont adjoint au critère (2) un terme de régularisation aux différences secondes sur les PE entre instants successifs. C'est une modélisation sommaire des caractéristiques physiologiques de l'activité électrique cardiaque en ce qu'elle ne tient pas compte du caractère spatial de la propagation. La mise en œuvre de leur méthode nécessite l'inversion d'un système linéaire de grande dimension (≈ 20000); en outre, l'estimation des paramètres de régularisation repose sur des considérations de «L-curve» dont la mise en œuvre est délicate et les propriétés statistiques sont mal connues.

3 Approche adoptée

Nous proposons une dynamique linéaire de la conduction cardiaque, sous forme d'une équation d'état [1]:

$$\Phi_E(n) = \mathbf{F}\Phi_E(n-1) + \mathbf{v}(n) \quad n = 1 \dots N, \quad (4)$$

où $\mathbf{F}$, de dimensions $(m \times m)$, est une matrice de transition invariante au cours de temps et $\mathbf{v}(n)$ un vecteur de bruit générateur blanc gaussien, centré et de matrice de covariance $q\mathbf{I}$.

Ceci permet de mettre en œuvre la restauration des PE à l'aide de techniques de filtrage de Kalman. Lorsque l'on identifie $\mathbf{F}$ de manière supervisée (par exemple, à partir de PE issus d'une banque de données), la qualité de la restauration des PE est nettement meilleure [1]. Cependant, la grande variabilité du modèle entre individus impose d'identifier une matrice $\mathbf{F}$ propre à chaque patient à partir des potentiels thoraciques uniquement. Nous avons donc deux problèmes d'estimation: les paramètres du modèle et les PE. Nous présentons tout d'abord la méthode d'estimation adoptée lorsque $\mathbf{F}$ est connue, puis nous montrons comment des sous-produits de cette méthode sont utilisés dans une méthode itérative destinée à identifier les paramètres par maximum de vraisemblance.

3.1 Méthode supervisée

Connaissant les paramètres $\theta = \{\mathbf{F}, q, r\}$ du modèle défini par (1) et (4), l'estimée définie par :

$$\hat{\Phi}_E(n | N) \stackrel{\text{def}}{=} E[\Phi_E(n) | \Phi_T(1), \dots, \Phi_T(N); \theta], \quad (5)$$

peut être calculée en utilisant les équations d'un lisseur de Kalman à intervalle fixe. Elle est également celle qui minimise le critère suivant :

$$\sum_{n=1}^N [\|\Phi_T(n) - \mathbf{H}\Phi_E(n)\|^2] + \frac{r}{q} \sum_{n=1}^N [\|\Phi_E(n) - \mathbf{F}\Phi_E(n-1)\|^2]. \quad (6)$$

L'estimation est mise en œuvre, pour $n = 1, \dots, N$, par une première étape de filtrage de Kalman standard [5]:

$$\hat{\Phi}_E(n | n-1) = \mathbf{F}\hat{\Phi}_E(n-1 | n-1), \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_{n|n-1} = \mathbf{F}\mathbf{P}_{n-1|n-1}\mathbf{F}^t + q\mathbf{I}, \quad (8)$$

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{P}_{n|n-1}\mathbf{H}^t\mathbf{R}_n^{-1}, \quad (9)$$

$$\hat{\Phi}_E(n | n) = \hat{\Phi}_E(n | n-1) + \mathbf{G}_n\mathbf{y}(n), \quad (10)$$

$$\mathbf{P}_{n|n} = \mathbf{P}_{n|n-1} - \mathbf{G}_n\mathbf{H}\mathbf{P}_{n|n-1}, \quad (11)$$

où

$$\mathbf{R}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H}\mathbf{P}_{n|n-1}\mathbf{H}^t + r\mathbf{I}, \quad (12)$$

$$\mathbf{y}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_T(n) - \mathbf{H}\hat{\Phi}_E(n | n-1). \quad (13)$$

Le filtre est initialisé classiquement par $\Phi_E(0|0) = 0$ et $\mathbf{P}_{0|0} = \gamma\mathbf{I}$; $\gamma \gg 1$.

Dans un deuxième temps, l'estimée lissée $\hat{\Phi}_E(n | N)$ est obtenue par les récurrences rétrogrades suivantes [5]: pour $n = N, N-1, \dots, 1$,

$$\mathbf{J}_{n-1} =$$

$$\mathbf{P}_{n-1|n-1}\mathbf{F}^t(\mathbf{P}_{n-1|n-1})^{-1},$$

$$\hat{\Phi}_E(n-1 | N) =$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{J}_{n-1}\mathbf{F})\hat{\Phi}_E(n-1 | n-1) + \mathbf{J}_{n-1}\hat{\Phi}_E(n | N),$$

$$\mathbf{P}_{n-1|N} =$$

$$\mathbf{P}_{n-1|n-1} + \mathbf{J}_{n-1}(\mathbf{P}_{n|N} - \mathbf{P}_{n|n-1})\mathbf{J}_{n-1}^t.$$

(14)

Ces équations permettent de répartir sur le temps la résolution du système linéaire de grandes dimensions équivalent à la minimisation du critère quadratique (6). De plus, nous verrons que les quantités auxiliaires $P_{n|N}$ sont utilisées dans la remise à jour itérative de θ .

3.2 Méthode non-supervisée

Nous proposons d'identifier les paramètres θ par maximum de vraisemblance, à cause du comportement théorique satisfaisant et de l'efficacité pratique de cet estimateur dans de nombreuses applications telles que les communications, l'automatique, le traitement d'images, etc...

La vraisemblance est définie comme la densité de probabilité des observations connaissant les paramètres du modèle $p(\Phi_T | \theta)$. Sous les hypothèses gaussiennes adoptées, la log-vraisemblance peut être calculée, en fonction des paramètres inconnus, à l'aide des sous-produits du filtre de Kalman (12) et (13), de la manière suivante :

$$L = (\text{cte}) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [\log \det(R_n) + y^t(n)(R_n)^{-1}y(n)], \quad (15)$$

où (cte) est une constante indépendante des états et des paramètres θ . Cette équation (15) doit être optimisée par rapport aux paramètres θ du modèle. Cependant sa maximisation par rapport à θ est très difficile. C'est pourquoi nous avons recours à un algorithme EM, qui permet une maximisation itérative de la vraisemblance.

L'algorithme EM repose sur le calcul de la densité de probabilité conjointe $p(\Phi_T, \Phi_E; \theta)$ et la maximisation itérative d'une quantité auxiliaire [5] :

$$Q(\theta; \hat{\theta}_i) = E [\log p(\Phi_T, \Phi_E; \theta) | \Phi_T; \hat{\theta}_i], \quad (16)$$

où $\hat{\theta}_i$ désigne la valeur estimée des paramètres à chaque itération. L'EM garantit l'augmentation de la vraisemblance au cours des itérations vers un point stationnaire et il est défini par l'itération des deux étapes suivantes :

Expectation (E) Calcul de $Q(\theta; \hat{\theta}_i)$,

Maximization (M) $\hat{\theta}_{i+1} = \arg \max Q(\theta; \hat{\theta}_i)$.

Dans notre cas $Q(\theta; \hat{\theta}_i)$ peut s'écrire [5] :

$$Q(\theta; \hat{\theta}_i) = (\text{cte}) - \frac{mN}{2} \log r - \frac{mN}{2} \log q - \frac{1}{2r} \text{trace} \left\{ \sum_{n=1}^N [\|x(n)\|^2 + H P_{n|N} H^t] \right\} - \frac{1}{2q} \text{trace} \{ C - 2FB + FAF^t \}, \quad (17)$$

où $x(n) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_T(n) - H\hat{\Phi}_E(n | N)$, et dans laquelle [5] :

$$\begin{aligned} A &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^N (P_{n-1|N} + \hat{\Phi}_E(n-1 | N) \hat{\Phi}_E^t(n-1 | N)), \\ B &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^N (P_{n,n-1|N} + \hat{\Phi}_E(n | N) \hat{\Phi}_E^t(n-1 | N)), \\ C &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^N (P_{n|N} + \hat{\Phi}_E(n | N) \hat{\Phi}_E^t(n | N)), \end{aligned} \quad (18)$$

où $P_{n,n-1|N} \stackrel{\text{def}}{=} \text{cov} [\Phi_E(n), \Phi_E(n-1) | \Phi_T; \hat{\theta}_i]$. Ici, les quantités requises par l'algorithme EM peuvent toutes être

calculées par les équations du lissage de Kalman (14) sauf $P_{n,n-1|N}$. Shumway et Stoffer [5] ont proposé de calculer cette dernière matrice à l'aide d'une récurrence supplémentaire adjointe aux équations du lisseur de Kalman :

$$P_{n-1,n-2|N} = P_{n-1|n-1} J_{n-2}^t + J_{n-1} (P_{n,n-1|N} - F P_{n-1|n-1}) J_{n-2}^t, \quad (19)$$

pour $n = N, N-1, \dots, 2$ initialisée par :

$$P_{N,N-1|N} = (I - G_N H) F P_{N-1|N-1}. \quad (20)$$

Cependant nous avons remarqué que cette récurrence est inutile en pratique ; (19) et (20) permettent de montrer par récurrence que :

$$P_{n,n-1|N} = P_{n|N} J_n^t. \quad (21)$$

Les matrices A, B et C dépendent de $\hat{\Phi}_E(n | N)$ et $P_{n|N}$ uniquement ; ces quantités sont calculées pour la valeur courante des paramètres $\hat{\theta}_i$. La valeur des paramètres pour l'itération suivante $\hat{\theta}_{i+1}$ est obtenue en annulant la dérivée partielle de (17) en chacune des paramètres, d'où [5] :

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i+1} &= B A^{-1}, \\ \hat{q}_{i+1} &= \frac{\text{trace}\{C - B A^{-1} B^t\}}{mN}, \\ \hat{r}_{i+1} &= \frac{\text{trace}\{\sum_{n=1}^N [\|x(n)\|^2 + H P_{n|N} H^t]\}}{mN}. \end{aligned} \quad (22)$$

De plus, cette approche peut être adaptée simplement à diverses paramétrisations de la matrice F comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

4 Résultats et conclusions

En pratique, le nombre d'instants $N \approx 200$ où les potentiels thoraciques sont disponibles est insuffisant pour estimer tous les éléments d'une matrice F (de taille 63×63) quelconque. Pour remédier à cette situation et réduire le nombre de paramètres à estimer, nous avons paramétrisé F en n'y incluant que les interactions spatio-temporelles entre plus proches voisins. Cette simplification s'appuie sur le caractère local des équations qui régissent la propagation des potentiels à la surface du cœur.

Nous avons testé expérimentalement plusieurs structures pour la matrice F et nous avons retenu la suivante :

$$F = \alpha I + \beta S, \quad (23)$$

où α est un scalaire modélisant la contribution du potentiel en un point du cœur, à l'instant $n-1$, à la prédiction du potentiel du même point à l'instant n ; β est un autre scalaire modélisant la contribution de ses quatre plus proches voisins représentée par une matrice S connue à l'avance. Ces deux paramètres sont calculés en remplaçant $\hat{F}_{i+1}$ dans (22) par :

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{i+1} \\ \hat{\beta}_{i+1} \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \text{trace}(B) \\ \text{trace}(B S^t) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

où

$$M = \begin{bmatrix} \text{trace}(A) & \text{trace}(A S) \\ \text{trace}(S A) & \text{trace}(S A S^t) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Patient	Tikhonov	Brooks	Méthode proposée
1	0.3252	0.3115	0.2783
2	0.4244	0.4257	0.4088
3	0.3638	0.3728	0.3473
4	0.3480	0.3255	0.2746
5	0.3048	0.2938	0.2681
6	0.2850	0.2439	0.2157
7	0.3443	0.3528	0.3089

Tableau 1: Erreur relative de reconstruction

Pour tester notre méthode, des potentiels thoraciques simulés ont été générés à partir des potentiels épicardiques réels de sept patients puis addition de bruit de manière à obtenir un rapport signal sur bruit de 20 dB sur les observations. Pour apprécier la performance de notre méthode par rapport aux autres approches, nous avons sélectionné la méthode de Tikhonov du premier ordre ($K = I$) et celle de Brooks. Nous avons estimé les paramètres de régularisation de ces deux dernières méthodes par maximum de vraisemblance. l'algorithme EM a été initialisé par $\hat{\alpha}_0 = 1$, $\hat{\beta}_0 = 0$, $\hat{q}_0 = 10$ et $\hat{r}_0 = 1$; le nombre d'itérations a été fixé à 20.

Nos résultats indiquent une convergence satisfaisante de la procédure d'estimation des paramètres inconnus. En ce qui concerne la qualité de reconstruction des potentiels épicardiques, notre méthode fournit des résultats de meilleure qualité que les deux autres méthodes. Ceci se traduit quantitativement par une réduction de l'erreur de reconstruction selon le tableau 1, et qualitativement, par une meilleure restauration des pics positifs et négatifs, et par une résolution accrue, comme illustré à la figure 1.

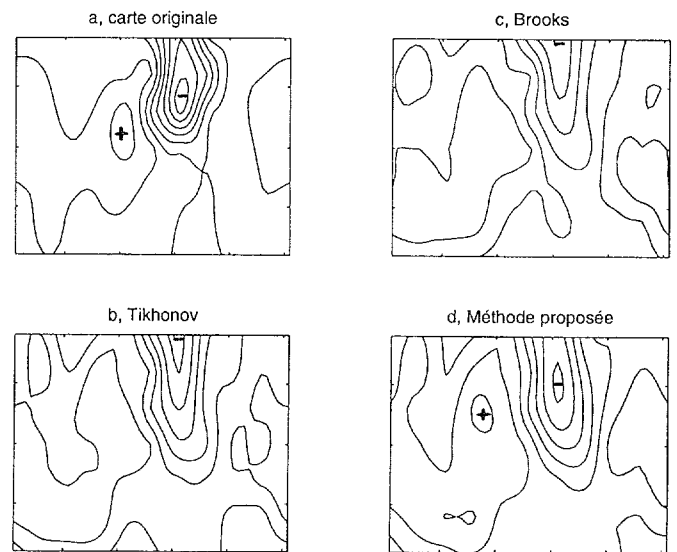


FIG. 1 - Cartes des potentiels épicardiques reconstruits. (a) Potentiels réels. (b) Potentiels reconstruits par la méthode de régularisation au sens de Tikhonov. (c) Potentiels reconstruits par la méthode proposée par Brooks. (d) Potentiels reconstruits par notre méthode. Notre méthode permet une meilleure localisation des extrema comparativement à la régularisation au sens de Tikhonov et à la méthode proposée par Brooks.

Références

- [1] D. Joly, Y. Guossard, and P. Savard, "Time-recursive solution to the inverse problem of electrocardiography: A model-based approach," in *Proc. Annual IEEE-EMBS Conf.*, (San Diego, CA), pp. 767-768, 1993.
- [2] H. Oster and Y. Rudy, "The use of temporal information in the regularization of the inverse problem of electrocardiography," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 39, pp. 65-75, 1992.
- [3] D. H. Brooks, A. G., and M. R. S., "Multiply constrained inverse electrocardiography: Combining temporal, multiple spatial, and iterative regularization," in *Proc. Annual IEEE-EMBS Conf.*, (Baltimore, MD), 1994.
- [4] V. A. Shahidi and P. Savard, "The forward problem of electrocardiography: Construction of human torso models and field calculations using the finite element method," *Med. Biol. Eng. Comput.*, 1993. To appear.
- [5] R. H. Shumway and D. S. Stoffer, "An approach to time series smoothing and forecasting using the em algorithm," *J. Time Series Anal.*, vol. 3, no. 4, pp. 253-264, 1982.