



# RÉGULARISATION DU PROBLÈME INVERSE DE TOMOGRAPHIE D'IMPÉDANCE ÉLECTRIQUE

Claude Cohen-Bacrie et Yves Goussard

École Polytechnique de Montréal, Institut de génie biomédical  
C.P. 6079, Succursale "Centre-ville"  
Montréal, Québec, H3C 3A7, Canada

## RÉSUMÉ

Le problème de tomographie d'impédance électrique est un problème inverse mal posé qui doit être régularisé. L'inversion du problème direct linéarisé régularisé par une matrice identité donne des reconstructions acceptables mais dont la variance présente de nombreuses fluctuations, ce qui se traduit sur l'image par des oscillations parasites. Pour y remédier nous proposons, dans un contexte non supervisé, une régularisation sous contrainte d'uniformisation de la variance *a posteriori*. Cette contrainte permet d'adapter de degré de régularisation de chacune des composantes de la reconstruction en fonction de la physique du problème. La mise en œuvre de cette régularisation est optimisée par une adaptation rapide de l'algorithme de calcul du critère de validation croisée.

## ABSTRACT

Electrical impedance tomography is an ill-posed problem that must be regularized. Inversion of the linearized direct problem with an identity regularization matrix provides acceptable results; however, the estimation variance is high, which induces large oscillations on the reconstructed image. In order to cope with this problem, we propose a new, non-supervised regularization technique based upon a variance uniformization constraint. This constraint allows us to vary the regularization level of each component of the image according to the physics of the problem. Fast computation of the cross-validation criterion used for determination of the regularization parameters yields an efficient implementation of this new method.

## 1 Introduction

La tomographie d'impédance électrique (TIE) est une technique de reconstruction d'image qui estime la répartition de conductivité à l'intérieur d'un objet à partir des potentiels générés en surface par l'application de courants électriques. La résolution de ce problème inverse se fait à partir d'un modèle adéquat du problème direct correspondant. La relation entre potentiel et conductivité étant non linéaire, la modélisation par éléments finis est la plus généralement utilisée [1], et l'inversion se fait alors de façon itérative. Cette approche présente plusieurs inconvénients, et en particulier un volume de calcul élevé et une convergence mal maîtrisée. Pour y remédier, nous adoptons un modèle linéarisé du problème direct basé sur une géométrie circulaire de l'objet, et qui permet d'écrire :

$$y = Sx + b, \quad (1)$$

où  $y$  (resp.  $x$ ) est un vecteur de taille  $m$  (resp.  $n$ ) formé par les valeurs discrètes du potentiel (resp. de la conductivité), et  $b$  un bruit blanc centré de variance  $r_b$  qui représente les erreurs de modélisation et de mesure. La matrice  $S$  dépend des courants injectés et des caractéristiques physiques du système d'imagerie. Notons que cette linéarisation n'utilise pas l'approximation de Born et possède un domaine de validité très large [2].

En dépit de la simplicité de (1), l'estimation de  $x$  connais-

sant  $y$  et  $S$  est un problème *mal-posé* en raison de la nature des phénomènes physiques mis en jeu et du nombre limité de projections. Pour obtenir une solution acceptable, le problème est régularisé par introduction d'information *a priori* sur la solution. Pour des questions de simplicité algorithmique, nous modélisons l'image comme un champ gaussien et estimons celle-ci par maximum *a posteriori*. Ceci, associé à la linéarité de (1), nous permet d'obtenir une expression explicite de la solution qui est donnée par :

$$\hat{x} = (S^T S + K)^{-1} S^T y, \quad (2)$$

où  $K$  représente une matrice proportionnelle à l'inverse de la matrice de covariance *a priori* de  $x$ . Se pose alors la question du choix de  $K$ . L'objet de cette communication est de donner des éléments de réponse à cette question en tenant compte des caractéristiques spécifiques du problème direct et en se basant sur les travaux préliminaires présentés dans [3].

## 2 Méthode

Dans le cadre défini plus haut, une approche classique est de choisir  $K$  proportionnelle à l'identité; ceci revient à supposer que tous les pixels de  $x$  sont indépendants et distribués selon la même loi gaussienne. En TIE, les résultats ainsi obtenus sont généralement acceptables, mais



présentent cependant des défauts gênants tels que des oscillations importantes sur les bords de l'image et un fort lissage dans la région centrale. La représentation graphique de la variance des estimateurs résultant de cette régularisation confirme cette sur-régularisation au centre et sous-régularisation aux bords de l'image. Sur la figure 1 sont représentées les variations de la variance des reconstructions lorsque l'on augmente le paramètre de régularisation, c'est-à-dire le coefficient de proportionnalité entre  $K$  et la matrice identité. On remarque très nettement que la progression du degré de régularisation diffère suivant la région de l'image. Le centre est en général plus régularisé que les bords. Une matrice de régularisation  $K$  proportionnelle à

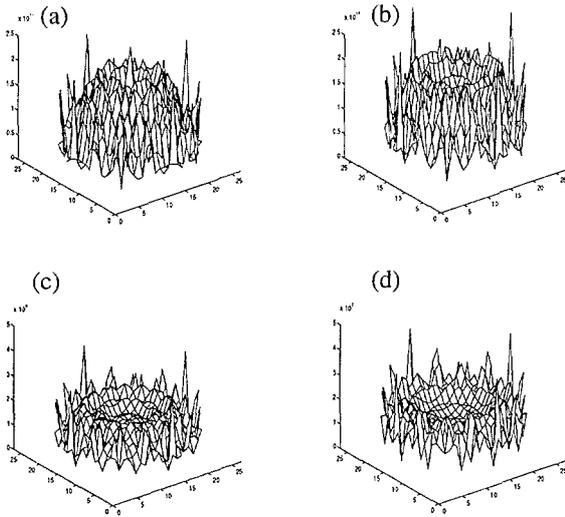


FIG. 1 - Variance des reconstructions régularisées par l'identité avec un paramètre croissant lorsque l'on passe de (a) à (d).

l'identité, qui impose une contrainte uniforme sur les pixels de l'image, est donc mal adaptée à notre problème. Ceci peut s'expliquer par les phénomènes physiques de conduction électrique qui régissent le problème direct. En effet, la TIE est beaucoup plus sensible aux variations de conductivité au bord de l'objet qu'en son centre. Pour équilibrer le plus possible le degré de régularisation de chacun des pixels en fonction de la quantité d'information sur ce pixel contenu dans les données, nous proposons de choisir une matrice de régularisation de façon à ce que la variance d'estimation conditionnellement à  $x$  soit uniforme. D'après (2), la matrice de covariance de l'estimée prend la forme suivante :

$$\text{COV}(\hat{x}) = r_b(S^T S + K)^{-1} S^T S (S^T S + K)^{-T}. \quad (3)$$

Déterminer les  $n^2$  éléments de la matrice  $K$  pour rendre égaux les  $n$  éléments diagonaux de  $\text{COV}(\hat{x})$  conduit à un système fortement sous-déterminé. Pour cette raison, on choisit de restreindre la recherche de  $K$  au sous-espace des matrices diagonalisables dans la même base que  $S^T S$ . Soit  $S = U \Delta V^T$  la décomposition de  $S$  en valeurs singulières;  $K$  s'exprime alors comme :

$$K = V D V^T. \quad (4)$$

En réécrivant  $\hat{x}$  en fonction de  $V, U, \Delta$  et  $D$ , et en utilisant

les variables  $\hat{v} = V^T \hat{x}$  et  $u = U^T y$ , on obtient :

$$\hat{v} = (\Delta^T \Delta + D)^{-1} \Delta^T u, \quad (5)$$

$$\text{COV}(\hat{v}) = r_b (\Delta^T \Delta + D)^{-1} \Delta^T \Delta (\Delta^T \Delta + D)^{-T}. \quad (6)$$

On observe sur (6) et que  $\text{COV}(\hat{v})$  est une matrice diagonale; de plus, d'après la définition de  $\hat{v}$ , uniformiser la variance de  $\hat{v}$  équivaut à uniformiser celle de  $\hat{x}$ . La condition d'uniformisation de variance s'exprime donc comme :

$$\text{constante} = \frac{r_{\hat{x}}}{r_b} = \frac{\delta_{ii}}{(\delta_{ii} + d_{ii})^2}, \quad (7)$$

où  $\delta_{ii}$  et  $d_{ii}$  désignent respectivement les éléments diagonaux de  $\Delta$  et  $D$ . Le niveau de régularisation est réglé par le paramètre  $r_{\hat{x}}/r_b$ . Par ailleurs, lors de la mise en œuvre, on observe une amélioration sensible des résultats lorsque l'on tronque la décomposition en valeurs singulières de  $S$ . Pour utiliser la méthode, il est alors nécessaire de déterminer deux hyperparamètres :  $r_{\hat{x}}/r_b$  et le niveau de troncature. Pour déterminer ces hyperparamètres à partir des données observées, nous avons recours aux techniques de validation croisée [4] [5] qui possèdent de bonnes propriétés de robustesse. Le critère de validation croisée ordinaire (VCO) a déjà fait l'objet d'études approfondies, et une version pondérée, le critère de validation croisée généralisée (VCG), a été proposée dans le cas d'une régularisation par la matrice identité [4]. Pour le cas général, l'adaptation d'un critère VCG n'est pas immédiate. Aussi a-t-on préféré utiliser le critère VCO. Partons de l'expression originale du critère :

$$F_{VCO} = \sum_{k=1}^m (y_k - \hat{y}_k^{(-k)})^2 \quad (8)$$

où  $y_k$  désigne la  $k^e$  composante de  $y$ , et  $\hat{y}_k^{(-k)}$  la  $k^e$  composante du vecteur  $y$  prédit avec un estimateur  $\hat{x}^{(-k)}$  de  $x$  obtenu avec un vecteur de données auquel on a enlevé la  $k^e$  composante, soit le vecteur  $y \setminus \{y_k\}$ .

L'inconvénient intrinsèque majeur de ce critère est qu'il requiert un volume de calcul important. En effet chacun des  $\hat{x}^{(-k)}$  pour  $k$  variant de 1 à  $m$ , requiert le calcul de l'inverse de la matrice  $(S_{(-k)}^T S_{(-k)} + K)$  où  $S_{(-k)}$  est la matrice  $S$  diminuée de sa  $k^e$  ligne. Il faut donc inverser  $m$  matrices. Nous avons simplifié la mise en œuvre de ce critère en réécrivant son expression à l'aide du lemme de Woodbury, de la même façon que [6]. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(-k)} &= (S^T S - s_k s_k^T + K)^{-1} (S^T y - s_k y_k) \\ &= (A - s_k s_k^T)^{-1} (S^T y - s_k y_k) \\ &= \left( A^{-1} - \frac{A^{-1} s_k s_k^T A^{-1}}{s_k^T A^{-1} s_k - 1} \right) (S^T y - s_k y_k) \end{aligned} \quad (9)$$

avec  $A = (S^T S + K)$ . Le développement de l'erreur de prédiction donne :

$$y_k - \hat{y}_k^{(-k)} = \frac{y_k - s_k^T A^{-1} S^T y}{1 - s_k^T A^{-1} s_k} \quad (10)$$

Soit  $P = S A^{-1} S^T$ ; l'équation 8 devient :

$$F_{VCO} = \sum_{k=1}^m \left[ \frac{y_k - s_k^T A^{-1} S^T y}{(1 - p_{kk})} \right]^2 \quad (11)$$

$$= \sum_{k=1}^m \left[ \frac{[(I - S A^{-1} S^T) y]_k}{(1 - p_{kk})} \right]^2, \quad (12)$$

les  $p_{kk}$  étant les éléments diagonaux de  $P$ . Il ne suffit plus, pour calculer le critère, que d'effectuer une seule inversion, celle de la matrice  $(S^T S + K)$ . L'optimisation de cette fonction est alors faite de façon empirique, en choisissant le minimum de la fonction sur un ensemble prédéfini de valeurs des paramètres

### 3 Résultats et discussion

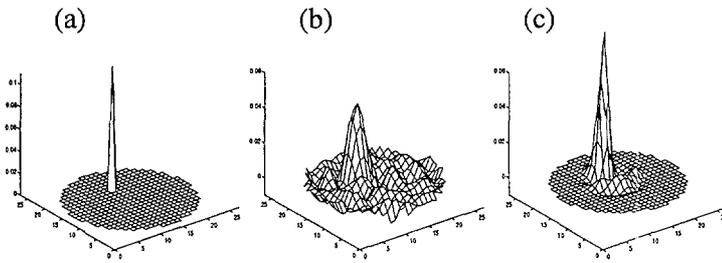


FIG. 2 - Reconstruction sur données simulées (a) : Objet original; (b) : reconstruction régularisée par une matrice proportionnelle à l'identité; (c) : reconstruction régularisée par uniformisation de variance.

La méthode proposée a été testée à la fois sur données synthétiques bruitées et sur données réelles. Nous avons simulé des données en appliquant le modèle du problème direct décrit par (1) à des objets types, qui présentent une discontinuité ponctuelle de conductivité localisée à distance variable du centre de l'objet. Le rapport signal à bruit est pris égal à 20dB. Nous essayons ainsi d'obtenir l'allure de la réponse impulsionnelle du système d'imagerie. Comme illustré à la figure 2 pour un objet particulier, la régularisation par uniformisation de variance améliore clairement le contraste (amplitude du pic reconstruit) et la résolution (largeur à mi-hauteur), et diminue les oscillations parasites. Malgré l'approximation linéaire du modèle utilisé, cette méthode de reconstruction produit de meilleurs résultats que ceux obtenus par les méthodes non linéarisées basées sur un modèle par éléments finis [1]. De plus, elle présente un volume de calcul plus faible, et permet une détermination automatique des hyperparamètres.

Nous avons reconstruit plusieurs objets types, de conductivité homogène sauf en une région quasi-ponctuelle dont la position varie régulièrement le long d'un rayon. Ces simulations nous permettent de comparer la résolution et le contraste des reconstructions en fonction de la position de l'inhomogénéité. Les courbes des figures 3 et 4 représentent respectivement les variations du contraste et de la résolution des reconstructions en fonction de la position du pic inhomogène. On constate une nette amélioration du contraste et de la résolution des reconstructions régularisées par uniformisation de variance, lorsque l'inhomogénéité est située dans une région centrale de l'objet. Proche des bords, la régularisation par l'identité offre de meilleurs résultats. De plus, sur toute les reconstructions on note une nette diminution des oscillations parasites de reconstruction. Cette même remarque se déduit de l'observation de la variance des reconstructions. Pour l'exemple particulier de l'objet original considéré à la figure 2, on a représenté la

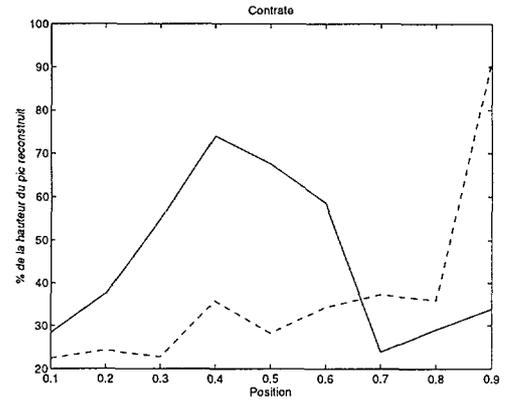


FIG. 3 - Contraste des reconstructions en fonction de la position : régularisation par la matrice identité en traits pointillés; régularisation par uniformisation de variance en trait plein.

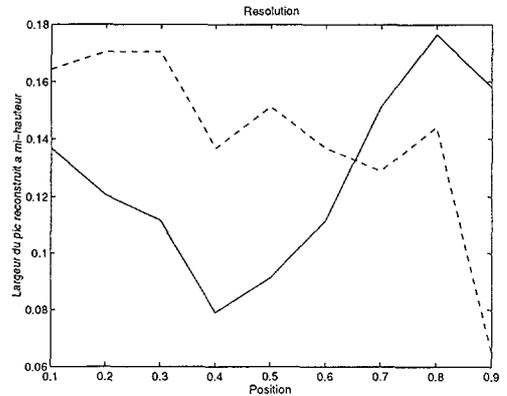


FIG. 4 - Résolution des reconstructions en fonction de la position : régularisation par la matrice identité en trait plein; régularisation par uniformisation de variance en trait pointillé.

variance de chacune des reconstructions régularisées (b) et (c) sur la figure 5. On remarque que l'uniformisation de variance est quasi totale sur l'image, ce malgré la troncature de la décomposition en valeurs singulières de  $S$ .

Nous avons également testé nos algorithmes sur des données réelles acquises autour d'un bassin rempli d'eau salée conductrice et contenant deux cylindres de plastique isolants. Comme illustré à la figure 6, les reconstructions comparées des régularisations par la matrice identité et par uniformisation de variance démontrent à nouveau une nette supériorité des performances de notre approche, tant au niveau de la résolution que du contraste.

### 4 Conclusion

Cette communication a mis en évidence les insuffisances d'une régularisation par la matrice identité du problème de TIE. Nous avons proposé d'adapter la régularisation à la spécificité des phénomènes physique mis en jeu, l'idée étant d'adapter le niveau de régularisation de chacune des composantes de la conductivité en fonction de sa contribution dans le calcul des potentiels de surface. Pour ce faire, nous

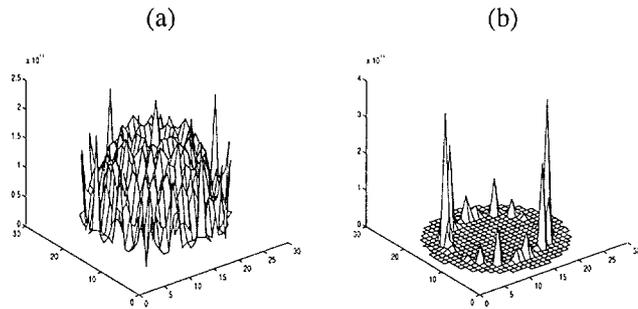


FIG. 5 - Variance des reconstruction régularisées par la matrice identité: (a), et par uniformisation de variance: (b).

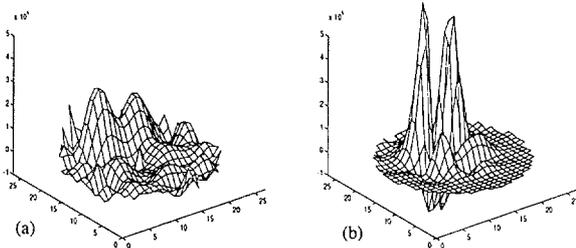


FIG. 6 - Reconstruction sur données réelles (a): régularisation par la matrice identité; (b): régularisation par uniformisation de variance.

avons fixé comme contrainte sur la matrice de régularisation qu'elle uniformise la variance *a posteriori* de la reconstruction. Pour rester très général, nous avons étudié cette nouvelle régularisation dans un contexte non supervisé, et la détermination d'une telle matrice nous est apparue dépendante de deux paramètres. Le choix non supervisé de ces paramètres a été fait grâce à un critère de validation croisée. Pour réduire le volume des calculs, nous avons mis en œuvre ce critère à partir d'une expression simplifiée qui exige moins de calculs matriciels. En plus d'une diminution du bruit résiduel de reconstruction qui était prévisible, les résultats des reconstructions régularisées par uniformisation de variance montrent une nette amélioration du contraste de la résolution. Enfin, cette étude, menée avec un modèle du problème direct linéarisé, pourrait être étendue aux méthodes itératives de reconstruction qui utilisent un modèle à élément finis pour simuler le problème direct non linéaire.

## Références

- [1] T.J. Yorkey, J.G. Webster, and W.J. Tompkins. Comparing reconstruction algorithms for electrical impedance tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, BME-34(11):843–852, November 1987.
- [2] G. Shaw, Y. Goussard, and R. Guardo. Linearization of the forward problem in electrical impedance tomography. pages 82–83, San Diego, CA, 1993.
- [3] G. Shaw, Y. Goussard, and R. Guardo. Reconstruction linéaire régularisée en tomographie d'impédance Elec-

trique. In *Proc. 14th colloque GRETSI*, pages 571–574, Juan-les-Pins, France, 1993.

- [4] G.H. Golub, M. Heath, and G. Wahba. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21(2):215–223, May 1979.
- [5] M.Z. Nashed. Operator theoretic and computational approaches to ill-posed problems with applications to antenna theory. *IEEE Transactions on Antennas and propagation*, AP-29(2):220–231, March 1981.
- [6] N. Fortier, G. Demoment, and Y. Goussard. GCV and ML methods of determining parameters in image restoration by regularization: Fast computation in the spatial domain and experimental comparison. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 4(2):157–169, June 1993.