

**SYNTHÈSE DE FILTRES RIF 2-D A FONCTION DE TRANSFERT  
POLAIREMENT SÉPARABLE. APPLICATION A LA DÉCOMPOSITION  
D'IMAGES EN SOUS-BANDES SÉPARABLES ANGULAIREMENT**

David JOFFRIN, Dominique BARBA, Jean-Pierre GUÉDON

IRESTE/SEI (EP CNRS 063) - Route du Gachet, CP 3003 - 44087 NANTES CEDEX 03

Tél : 40 68 30 22 - Fax : 40 68 30 66- E-mail : dbarba@lati.ireste.fr

Nous présentons dans ce papier une méthode efficace et directe de synthèse de la réponse impulsionnelle de filtres RIF 2-D à fonctions de transfert séparables polairement possédant une véritable sélectivité angulaire associée à une sélectivité en fréquences radiales. L'approche consiste à approximer la fonction de transfert d'un filtre à sélectivité angulaire par sa série de Fourier. On en déduit la réponse impulsionnelle du filtre complet associé à partir de la transformée de Hankel. Nous décrivons l'utilisation de cette approche pour la décomposition/reconstruction d'images par banc de filtres selon une décomposition psychovisuelle.

## I - INTRODUCTION

La représentation de signaux par un ensemble de signaux à bandes limitées est une technique qui a de très nombreuses applications dans les domaines de l'analyse des signaux et de leur codage. Cela concerne tant la représentation multirésolution par décomposition en ondelettes ou par filtres PQF, CQF... que la représentation par signaux de même largeur de bande (décomposition par bancs de filtres modulés,...). L'extension des méthodes développées pour les signaux 1-D aux signaux 2-D comme les images par décomposition séparable est la plus directe. Cependant la décomposition d'images en sous-bandes par l'utilisation de bancs de filtres 2-D séparables dans le plan cartésien ne permet pas de bénéficier efficacement de la structure des images. Les filtres directionnels et à bandes de fréquences radiales limitées sont de ce point de vue très intéressants tant pour l'analyse que pour le codage des images. Il existe peu de méthodes permettant de synthétiser la réponse impulsionnelle de tels filtres.

In this paper, we present a new direct and efficient method for the design of FIR 2-D filters impulse responses having polar separable transfert functions showing a real angular selectivity associated to radial frequency selectivity too. Our approach relies on the approximation of the transfert function of the given directionnal filter by its Fourier series. Then we deduce its 2-D impulse response from the Hankel transform. Finally, we described the use of this approach in the framework of the decomposition/reconstruction of images by a psychovisual filter bank.

Dans un récent article, Pei & Jaw [1] proposent une synthèse concernant les filtres orientés ou filtres "fan". On distingue 3 types de filtres "fan" : les filtres à 90° et les filtres à quadrant, enfin les filtres fan généraux. De tels filtres sont tout à fait intéressants pour la décomposition directionnelle des images. Ils sont non séparables et sont tout à fait adaptés à la méthode de Bamberger et Smith [2]. Ceux-ci ont proposé une méthode de décomposition angulaire qui allie deux propriétés intéressantes : la décimation critique et la sélectivité directionnelle. De plus, le signal est reconstruit parfaitement en sortie. Elle généralise le concept du cas séparable en utilisant une synthèse de filtres 1-D selon  $n$  directions indépendantes de l'image. Mais cette méthode comporte les inconvénients suivants :

- les directions horizontale et verticale sont obligatoirement frontières de filtres directionnels et non milieux de bandes directionnelles,



- le nombre de directions est obligatoirement une puissance entière de 2.

Or dans de multiples applications, il est nécessaire de pouvoir disposer de filtres à sélectivité angulaire variée, et à bandes de fréquences radiales limitées. Le système visuel humain en est un bon exemple [3]. Nous proposons dans ce papier une méthode efficace et directe de synthèse des réponses impulsionnelles de filtres 2-D passe-bas ou passe-bande dont la fonction de transfert 2-D est séparable en coordonnées polaires. Cette approche utilise la transformation de Hankel et la décomposition en série de Fourier des filtres harmoniques angulaires pour synthétiser la réponse impulsionnelle 2-D. Cela nous amènera à proposer à titre d'illustration la synthèse d'un banc de filtres pour la décomposition/reconstruction des images basées sur les propriétés du système visuel humain. Cette approche a été suscitée par un article de G. JACOVITTI et R. CUSANI sur la décomposition d'images à base de décomposition harmonique angulaire [4]. Ils se limitaient à des filtres de profil radial de type  $r^n \exp(-\pi^2)$ . Nous avons généralisé la méthode à des fonctions de transfert quelconques radialement.

## II - PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE DE SYNTHÈSE

### 1) Introduction

L'approche théorique que nous proposons ici pour concevoir les filtres à sélectivité angulaire et à bande de fréquences radiales limitée consiste à approximer la réponse en fréquence du filtre à sélectivité angulaire par sa série de Fourier. On en déduit alors la réponse impulsionnelle du filtre complet associé à partir de la transformée de Hankel. Chaque filtre est de gain en fréquences spatiales  $(u,v)$  séparable dans le plan polaire  $(\rho, \phi)$  :

$$G(u,v) = G_1(\rho) G_2(\varphi_0, \phi)$$

avec  $u = \rho \cos \phi$ ,  $v = \rho \sin \phi$ ,  $\varphi_0$  est l'orientation centrale du filtre directionnel  $G_2$ .

Une telle méthode permet d'obtenir directement une forme analytique de la réponse impulsionnelle 2-D et de pouvoir déterminer un bon support pour le filtre obtenu.

### 2) Principe de la méthode

Il s'agit de déterminer la réponse impulsionnelle  $g(x,y)$  des filtres dont le gain en fréquence  $G(u,v)$  orienté suivant la

direction  $\varphi_0$  est donné en fréquences radiales par  $G_1(\rho)$  et en angulaire selon la direction  $\phi$  par  $G_2(\varphi_0, \phi)$ .

On a  $g(x,y) = \mathcal{F}_{2D}^{-1} [G(u,v)]$  ou encore, en introduisant les coordonnées polaires  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  :

$$g(r, \theta) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho G_1(\rho) G_2(\varphi_0, \phi) e^{2\pi j r \rho \cos(\phi - \theta)} d\phi d\rho$$

En posant  $\phi' = \phi - \varphi_0$  :

$$g(r, \theta) = \int_0^\infty \int_{-\varphi_0}^{2\pi - \varphi_0} \rho G_1(\rho) G_2(0, \phi') e^{2\pi j r \rho \cos(\phi' - \theta + \varphi_0)} d\phi' d\rho$$

Du fait de la  $\pi$ -périodicité de  $G_2$ , on peut effectuer le développement en série de Fourier de la fonction  $G_2$  pour une orientation de  $\varphi_0 = 0^\circ$  soit :

$$G_2(0, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp[2 j n \phi]$$

Ceci donne après quelques développements :

$$g(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left[ \int_0^\infty \rho G_1(\rho) \int_{-(\theta - \varphi_0)}^{2\pi - (\theta - \varphi_0)} e^{2 j n \phi + 2 \pi j r \rho \cos \phi} d\phi d\rho \right] e^{2 j n (\theta - \varphi_0)}$$

La fonction  $\exp [2 j n \phi + 2 \pi j r \rho \cos \phi]$  est  $2\pi$ -périodique et  $\sin 2 n \phi \exp [2 j \pi r \rho \cos \phi]$  est impaire. Ceci conduit à :

$$g(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left( \int_0^\infty \rho G_1(\rho) \int_0^{2\pi} \cos 2 n \phi \left( e^{2 j \pi r \rho \cos \phi} \right) d\phi d\rho \right) e^{2 j n (\theta - \varphi_0)}$$

En introduisant la fonction de Bessel  $J$  d'ordre  $2n$  de la variable  $2\pi r \rho$  et la transformée de Hankel de  $G_1(\rho)$  on obtient alors :

$$g(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2 \pi (-1)^n a_n H_{2n}(G_1(\rho)) \cos[2n(\theta - \varphi_0)]$$

$$\text{où : } H_{2n}[G_1(\rho)] = \int_0^\infty \rho G_1(\rho) J_{2n}(2 \pi r \rho) d\rho$$

$$a_0 = c_0 \quad ; \quad a_n = 2 c_n$$

De façon très classique, les coefficients  $a$  de la série de Fourier précédente sont donnés par les relations intégrales suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} G_2(0, \phi) d\phi$$

$$\text{et } a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} G_2(0, \phi) \cos(2 n \phi) d\phi \quad n \neq 0$$

La limitation du nombre de termes utilisés dans la série de Fourier donnant  $g(r, \theta)$  s'effectue à partir de l'égalité de Parseval qui permet de déterminer explicitement la qualité de la synthèse :

$$2 \pi |a_0|^2 + \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 = \int_0^{2\pi} G_2(0, \phi) d \phi$$

**Remarque :** La fonction  $G_1(\rho)$  est généralement à support très limité et lisse et donc  $H_{2n}$  ne pose pas de problème pour son calcul par intégration numérique.

### III - MISE EN OEUVRE DE LA MÉTHODE

Nous avons appliqué la méthode proposée à la synthèse de filtres utilisés dans un banc de filtres de décomposition et reconstruction d'images en sous-bandes correspondant aux propriétés observées du système visuel humain. Chaque filtre d'indice  $i, j$  ( $i$  correspond à la bande de fréquences radiales et  $j$  à l'orientation) est de gain en fréquences spatiales de la forme :

$$G_{ij}(u, v) \equiv G_{i,j}(\rho, \phi) = G_{1,i}(\rho)G_{2,j}(\phi_j, \phi)$$

#### 1) Modélisation des fonctions $G_1(\rho)$ et $G_2(\phi_0, \phi)$

Les gains des filtres passe-bande  $G_{1,i}(\rho)$  en fréquences spatiales radiales sont modélisés [5] par la différence de deux filtres "Mesa". L'évolution du gain d'un filtre "Mesa" selon la fréquence radiale  $\rho$  est décrite par l'effet d'un flou gaussien 1-D sur un créneau  $\Pi$  centré de rayon  $f_0$  :

$$M(\rho) = \frac{\gamma^2}{f_0^2} \exp\left[-\pi\left(\frac{\rho\gamma}{f_0}\right)^2\right] * \Pi(\rho/2 f_0)$$

ou encore

$$M(\rho) = \frac{\gamma}{2f_0} \left[ \text{Erf}\left(\sqrt{\pi} \frac{\gamma}{f_0} (\rho + f_0)\right) - \text{Erf}\left(\sqrt{\pi} \frac{\gamma}{f_0} (\rho - f_0)\right) \right]$$

où  $\gamma$  est un paramètre caractérisant la raideur du filtre  $G_{1,i}(\rho)$ . La différence de deux filtres "Mesa" de fréquences de coupures différentes engendre le filtre  $G_1(\rho)$  (appelé aussi filtre "Dom")

$$G_{1,i}(\rho) = M(s_{i-1}\rho) - M(s_i\rho)$$

Les paramètres  $s_i$  sont dépendant de la couronne de fréquences radiales considérées.

De la même façon, l'évolution du gain  $G_{2,j}$  des filtres directionnels est modélisée par l'effet d'un flou gaussien sur un filtre à sélectivité angulaire idéale que l'on rend ensuite  $\pi$ -périodique (le paramètre  $\gamma_b$  définit la raideur du filtre directionnel).

$$\text{Si } F_1(\phi) = \gamma_b \exp(-\pi \gamma_b^2 \phi^2)$$

$$\text{et } F_2(\phi_j, \phi) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [\phi_j - \Delta/2, \phi_j + \Delta/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{alors } G_{2,j}^*(\phi_j, \phi) = \frac{1}{2} \left[ \text{Erf}\left(\sqrt{\pi} \gamma_b^2 (\phi + \Delta/2 - \phi_j)\right) - \text{Erf}\left(\sqrt{\pi} \gamma_b^2 (\phi - \Delta/2 - \phi_j)\right) \right]$$

$$\text{et } G_{2,j}(\phi_j, \phi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_{2,j}^*(\phi_j, \phi - k \pi)$$

Nous avons appliqué ce type de modélisation à la modélisation du banc de filtres associés à la décomposition effectuée par le système visuel humain [3]. Dans ce papier, pour simplifier, nous nous intéressons seulement aux filtres des deux couronnes extérieures (filtres moyennes et hautes fréquences radiales).

Pour modéliser correctement les couronnes V et IV d'un banc de filtres du SVH, nous avons utilisé en pratique le jeu de paramètres suivants :

Paramètres	Couronne V	Couronne IV	Couronne IV sous-échant
$f_n$	1/2	1/2	1/2
$\beta_0$	0,98	0,91	0,98
$\beta_0'$	0,91	0,91	0,91
$f_0$	$\beta_0 f_n$	$14,2 \beta_0 f_n/28,2$	$\beta_0 f_n$
$f_0'$	$14,2 \beta_0' f_n/28,2$	$5,7 \beta_0' f_n/28,2$	$5,7 \beta_0' f_n/14,2$
$f_{centrale}$	$20 \beta_0' f_n/28,2$	$9 \beta_0' f_n/28,2$	$9 \beta_0' f_n/14,2$

Tableau I - Paramètres décrivant les caractéristiques de gain des filtres directionnels à bande limitée

À titre illustratif, la figure 1 montre la réponse en fréquence du filtre de la couronne V à sélectivité angulaire horizontale (environ 30° de sélectivité angulaire).

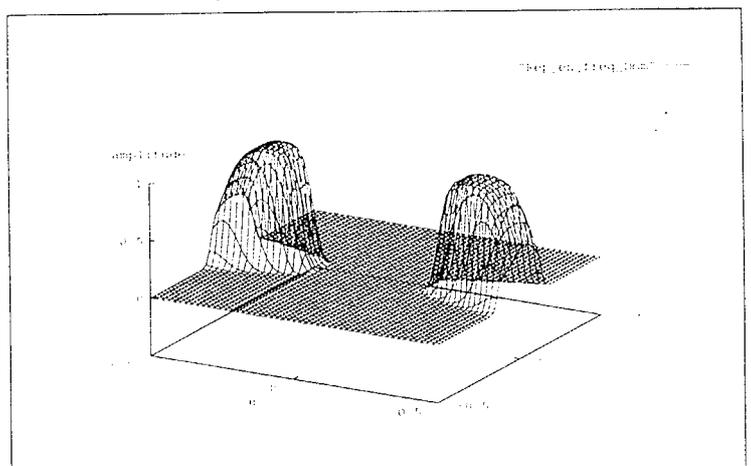


Figure 1 - Fonction de transfert du filtre V-1 (30° de sélectivité angulaire)



## 2) Exemple de synthèse de réponse impulsionnelle discrète

Nous avons testé cette méthode de synthèse directe des réponses impulsionnelles discrètes d'un banc de filtres passe-bande en fréquences radiales et de sélectivité angulaire égale à  $30^\circ$ . Les paramètres  $\gamma, \beta_0, \dots$  sont ceux du tableau I. La taille du support des filtres a été fixée à  $31 \times 31$ . Celle-ci peut être choisie différemment sans difficultés particulières.

L'application numérique montre qu'il y a convergence vers l'intégrale de  $G_2$  à  $10^{-8}$  près en se limitant à 42 termes dans la série de Fourier.

Quant aux coefficients de la transformée de Hankel de la fonction  $G_1$ , on les obtient par une simple méthode d'intégration numérique. Du fait de la grande régularité de  $G_1$ , une intégration par la méthode des trapèzes est suffisante.

Les figures 2-a et 2-b représentent respectivement la réponse impulsionnelle du filtre ayant une orientation  $\varphi_0 = 0$  degré et la réponse en fréquence associée. On notera que la réponse en fréquence se rapproche bien de celle souhaitée, compte tenu de la limitation du support du filtre.

Nous avons mis en oeuvre cette approche pour synthétiser l'ensemble des filtres des différentes couronnes V (6 filtres) et IV (6 filtres). Les couronnes III et II ont été fusionnées avec le filtre passe-bas omnidirectionnel du disque I. Du fait que les fréquences radiales pour la couronne IV sont limitées à la moitié de la fréquence radiale initiale maximale, on effectue au préalable un filtrage passe-bas par filtrage "Cardinal Spline" (de taille  $19 \times 19$ ) associé à un sous-échantillonnage d'ordre 2 selon chaque direction avant de décomposer suivant la couronne IV. De plus, comme chaque filtre est utilisé une fois à la décomposition et une fois à la reconstruction, le gain de chaque filtre est en fait:  $G(u, v) = (G_1(\rho)G_2(\varphi_0, \phi))^{1/2}$ . La décomposition/reconstruction effectuée sur un lot d'images tests montre que la reconstruction est quasi parfaite. Ceci tend à prouver la robustesse de la méthode.

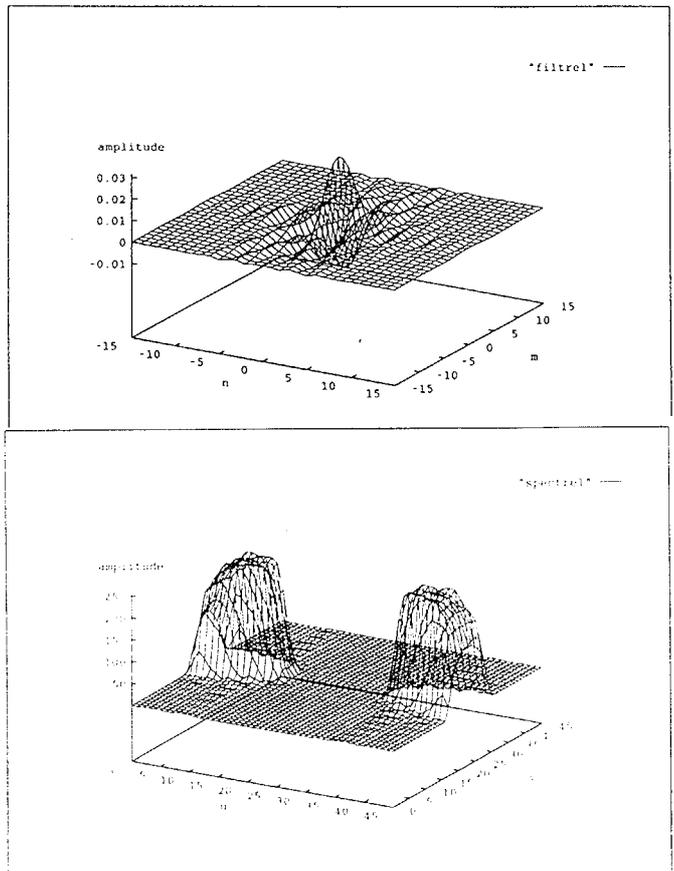
## IV - CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce papier une nouvelle méthode de conception directe de la réponse 2-D de filtres RIF à fonction de transfert séparable polairement. Ce type de filtres directionnel à sélectivité angulaire et à gain en fréquences radiales fixés est très intéressant en analyse ou codage d'images. L'approche est basée sur un calcul analytique explicite de la réponse impulsionnelle qui utilise la transformée de Hankel d'une représentation par série de Fourier du filtre directionnel. Les résultats obtenus pour générer un double banc de filtres (en

fréquences radiales, en orientation) pour la décomposition et la reconstruction selon une décomposition psychovisuelle montre sur des images décomposées et reconstruites par ces filtres une erreur de reconstruction quasiment négligeable et dans tous les cas non visible.

## Bibliographie

- [1] PEI Soo Chang, JAW Sy Been  
"2D general fan type FIR digital filter design", Signal Processing, Vol. 37, 1994, pp 265-274
- [2] R.H. BAMBERGER, M.J.T. SMITH  
"A filter bank for the directional decomposition of images : theory and design", IEEE Trans. on S.P., Vol 40, April 1992
- [3] A. SAADANE, H. SENANE, D. BARBA  
"On the design of psychovisual quantizers for a visual subband image coding", VCIP'94, SPIE Vol. 2308, pp 1446-1453
- [4] R. CUSANI, G. JACOVITTI  
"Image coding by Harmonic Angular Decomposition", Signal Processing, pp 207-367, 1991
- [5] H. SENANE, A. SAADANE, D. BARBA  
"Image coding in the contexte of a psychovisual image representation with vector quantization", ICIP'95, Washington, DC, USA, 23-26 October 1995



Figures 2 : Réponse impulsionnelle discrète (a) et fonction de transfert (b) du filtre synthétisé V-i