



# Optimisation de Quantificateurs Vectoriels à Entropie Contrainte pour le codage d'image multirésolution

*José Roca Oliver, Marc Antonini, Michel Barlaud*

Laboratoire I3S, URA 1376 du CNRS/UNSA, Bat. SPI n°4, Les Lucioles 1  
250, rue Albert Einstein, Sophia Antipolis, F-06560 Valbonne, FRANCE  
Fax: (33) 92942896, E-Mail: pepe@alto.unice.fr - am@bora.unice.fr

## RÉSUMÉ

Une des techniques parmi les plus performantes pour la compression d'images est la décomposition multirésolution par transformée en ondelettes suivie du codage des coefficients obtenus [1]. Elle permet de traiter séparément les différentes plages spatio-fréquentielles et ainsi, de mieux adapter les systèmes de compression/codage aux caractéristiques statistiques de chacune des sous-images.

Dans cet article, nous proposons de résoudre le problème d'allocation optimale du débit binaire dans les différentes sous-images de façon à atteindre un certain taux de compression avec le minimum de distorsion. Pour cela nous proposons d'utiliser un algorithme basé sur le Lagrangien augmenté qui combine à la fois une méthode Lagrangienne classique et une méthode de pénalité. Cet algorithme s'est montré ces dernières années parmi les plus efficaces pour la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes.

## ABSTRACT

One of the most performant techniques for image compression is the multiresolution decomposition using wavelet transform associated to vector quantization of the wavelet coefficient sub-images [1].

In this paper, we propose a new optimal algorithm for bit allocation across the sub-images associated to a data compression method. This algorithm permits to reduce the bit rate for transmission or storage while maintaining an acceptable fidelity or image quality. This method takes into account the characteristics of the compression scheme. For this purpose, we propose to use the augmented Lagrangian method. Here, we introduce a penalty function which allows the existence of a saddle-point and the convergence of the optimization algorithm.

## 1 Introduction

Notre étude porte sur la compression d'images. Nous nous appuyons sur un schéma de compression utilisant des quantificateurs vectoriels et nous avons adapté notre étude au cas des quantificateurs vectoriels algébriques. Ceux-ci travaillent avec des dictionnaires construits à partir de la troncature d'un réseau régulier de points. Le but est d'arriver à trouver l'allocation des débits binaires avec lesquels il faut transmettre chacune des sous-images de coefficients issues d'une transformation en ondelettes pour arriver à construire des quantificateurs vectoriels optimaux au sens de la distorsion. Pour cela nous avons développé un algorithme d'optimisation de la distorsion, basé sur la méthode des Lagrangien augmentés et sous certaines contraintes imposées aux débits binaires.

Au § 2 nous présentons le problème d'optimisation posé et au § 3 la solution retenue utilisant le Lagrangien augmenté. Dans l'optique d'optimiser l'allocation des débits binaires en fonction de l'application ou du traitement effectué sur l'image décompressée, nous présentons au § 4 un modèle de pondération destiné pour la visualisation. Au § 5 sont présentés les deux différents modèles de distorsion utilisés. Le premier est un modèle asymptotique général alors que le second est valide même à bas débit mais ne s'applique que dans le cas de quantificateurs vectoriels algébriques. Enfin, au § 6 sont présentés les résultats expérimentaux.

## 2 Présentation du problème

La transformée en Ondelettes [3] appliquée sur une image décompose celle-ci en  $l$  sous-images de coefficients d'ondelettes plus une image de basse fréquence. Cette transformée nous permet donc de réaliser une analyse multirésolution de l'image d'origine. En particulier, si on a effectué une décomposition en  $m$  niveaux de résolution, alors on obtient  $l = 3m$  sous-images de coefficients, chacune d'entre elles représentant une plage spatio-fréquentielle différente. Ceci nous permet de traiter différemment chacune de ces plages et d'adapter ainsi la chaîne de compression/décompression à leurs caractéristiques statistiques.

Il s'agit de distribuer tout le débit binaire que nous pouvons utiliser ( $R_T$ ) entre les  $l$  sous-images de coefficients issues de la transformation, de façon à atteindre un certain taux de compression  $TC$ . En effet, sachant que l'image originale est codée à  $R_{orig}$  *bpp*, alors on peut écrire la relation suivante:

$$R_T = \frac{R_{orig}}{TC} \quad (1)$$

Il faudra donc assurer que le débit total soit égal à  $R_T$  *bpp*. Ceci revient à écrire :

$$\sum_{i=0}^l a_i R_i = R_T \quad (2)$$



où les coefficients  $a_i$  représentent le poids en pixels de l'image  $i$  dans l'image globale et  $R_i$  le débit qui sera alloué à cette sous-image. Lors de la distribution du débit binaire total parmi les sous-images on cherche à optimiser un critère de distorsion. Pour cette optimisation il faut imposer certaines contraintes aux débits binaires, notamment celle décrite en (2) et une contrainte qui assure que les valeurs des débits soient positives ou nulles [4].

### 3 Solution proposée

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que le problème posé est un problème d'optimisation sous contraintes. Il faut donc définir le critère à optimiser et les contraintes imposées. Le critère à optimiser (minimiser) est la distorsion. On entend par là, la distorsion totale  $D_T$  commise dans toute l'image et qui est définie, dans le cas multirésolution, par

$$D_T = \sum_{i=1}^l a_i D_i \quad (3)$$

où les coefficients  $a_i$  sont ceux utilisés dans (2). En effet, la propriété d'orthogonalité de la décomposition en ondelettes assure une contribution additive des erreurs de quantification dans chacune des sous-images. Noter qu'on ne prend pas en compte la distorsion commise dans l'image 0 où basse fréquence. Ceci est dû au fait que le débit alloué à la basse fréquence ne va pas être optimisé mais, au contraire, il sera fixé par l'utilisateur. Noter aussi que, même s'il est imposé dès le début, il est pris en compte dans (2) pour assurer le taux de compression désiré.

Ce problème d'optimisation a été résolu avec trois contraintes qui ont été ramenées à des équations d'égalité à zéro dans l'optique de simplifier la fonctionnelle engendrée. Ainsi, la première contrainte ( $g_1$ ) est directement déduite de (2) et s'écrit :

$$g_1(x) = \sum_{i=0}^l a_i R_i - R_T = 0 \quad (4)$$

La deuxième est une contrainte qui assure des débits positifs et qui peut être amenée à une équation d'égalité en utilisant des valeurs absolues. On peut écrire :

$$g_2(x) = \sum_{i=1}^l (R_i - |R_i|)^2 = 0 \quad (5)$$

(le carré a été introduit pour augmenter la convexité)

De façon analogue, nous utilisons une troisième contrainte qui assure que les débits ne seront pas plus grands qu'un certain débit maximum  $R_{max}$ .

$$g_2(x) = \sum_{i=1}^l \left( (R_i - R_{max}) - |R_i - R_{max}| \right)^2 = 0 \quad (6)$$

L'algorithme utilisé pour résoudre ce problème est basé sur le *Lagrangien augmenté* [2]. Celui-ci combine une méthode Lagrangienne classique plus une méthode de pénalité. Il consiste à remplacer le problème ( $P$ ) défini par

$$(P) \begin{cases} \min D_T(x) \\ g_i(x) \leq 0, i \in \{1, \dots, 3\} \\ x \in \mathbb{R}^l \end{cases} \quad (7)$$

par un problème d'optimisation sans contraintes consistant à optimiser la fonctionnelle définie par

$$L(x, \lambda, r) = D_T(x) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i g_i(x) + r \sum_{i=1}^3 [g_i(x)]^2 \quad (8)$$

où le vecteur  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange et le scalaire  $r$  est appelé coefficient de pénalité.

Cette expression de la fonctionnelle a été proposée par *Hestens* [6] et, indépendamment, par *Powell* [7]. Dans le cas de contraintes d'inégalité, la fonctionnelle correspondante est définie par morceaux: l'implémentation s'avère alors plus difficile.

L'utilisation du Lagrangien augmenté est justifiée par le fait que la combinaison de la dualité Lagrangienne avec la méthode de pénalité permet de supprimer en partie les problèmes de ces deux méthodes prises indépendamment. D'une part, la première nécessite l'existence d'un point col et le terme de pénalité favorise l'apparition d'un tel point en adoucissant la fonction duale du problème près de son maximum. La dérivabilité de celle-ci en son extremum est une condition suffisante d'existence d'un point col de la fonctionnelle. D'autre part, la méthode des pénalités extérieures (celle que l'on utilise) exige que le facteur de pénalité  $r \rightarrow \infty$  pour que la solution vérifie les contraintes, ce qui se traduit par des difficultés numériques, notamment de dérivabilité. La présence du terme Lagrangien nous permet de travailler avec un coefficient de pénalité plus petit. Le choix de cette pénalité est déterminé par le degré de précision avec lequel on désire que les contraintes soient vérifiées. Plus celui-ci est grand et moins restrictif peut être le seuil d'arrêt de l'algorithme.

### 4 Facteurs de pondération

De façon à adapter l'optimisation aux applications auxquelles les images seront destinées une fois décompressées, nous avons introduit dans le critère les facteurs  $B_i$ ,  $i \in \{1, \dots, l\}$ . Ceux-ci nous permettent de pondérer le poids de chaque sous-image dans le critère à optimiser, en fonction de la plage fréquentielle à laquelle elles appartiennent ou la direction spatiale prédominante.

$$D_T = \sum_{i=1}^l B_i a_i D_i \quad (9)$$

Ainsi on peut penser à une optimisation particulière pour les images destinées à la visualisation, aux modèles numériques de terrain (MNT), pour la détection de contours, ...

Nous nous sommes intéressés au cas de la visualisation. Pour celui-ci, les facteurs  $B_i$  peuvent être calculés à partir de la réponse fréquentielle de l'œil au contraste  $H$  (éq.(10), fig. 1):

$$H(f_x, f_y) = H(\rho) = A \left[ \alpha + \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \right] \exp \left[ - \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\beta \right] \quad (10)$$

$$\rho = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \text{ cycles/deg}$$

où  $A, \alpha, \beta$ , et  $\rho_0$  sont des constantes. Pour  $\alpha = 0$  et  $\beta = 1$ ,  $\rho_0$  est la fréquence à laquelle le maximum de la fonction apparaît. Pour des applications de codage d'images, *Mannos*

a proposé les valeurs  $A = 2.6$ ,  $\alpha = 0.0192$ ,  $\rho_0 = 8.772$  et  $\beta = 1.1$  [5].

En effet, cette fonction permettra d'atténuer l'importance des sous-images situées dans les bandes fréquentielles que l'œil perçoit mal en faveur des images de moyenne fréquence, zone où le système visuel humain (svh) est le plus sensible. Nous avons donc calculé les facteurs  $B_i$  comme étant la puissance de cette fonction  $H$  dans la bande fréquentielle où se trouve située l'image  $i$ .

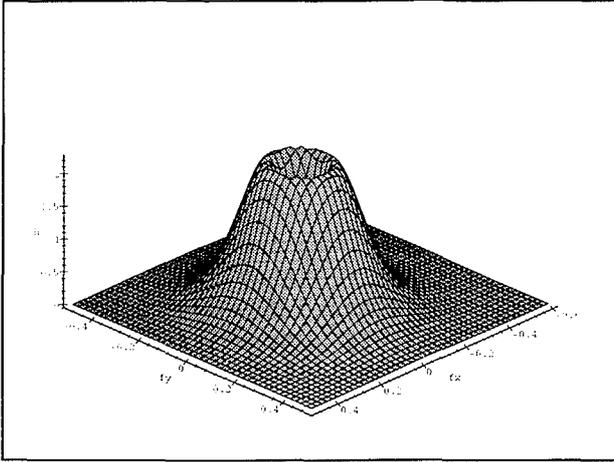


Figure 1: Réponse fréquentielle de l'œil aux contrastes, en fonction de la fréquence normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage.

$$B_i = \frac{1}{\Delta\omega_1 \Delta\omega_2} \int \int_{D_i} \|H(\omega_1, \omega_2)\|^2 d\omega_1 d\omega_2 \quad (11)$$

Il faut remarquer que toutes les images appartenant à la même résolution ont le même facteur  $B$  puisqu'elles sont situées dans la même bande fréquentielle. Elles ne se différencient que par la prédominance spatiale des éléments qu'elles contiennent. Cette caractéristique pourrait être utile pour une détection de contours, par exemple.

*Remarque:* cette méthode de pondération correspond à convoluer d'abord l'image originale avec la réponse du svh, à appliquer ensuite la transformée en ondelettes à la nouvelle image obtenue et faire l'optimisation avec des facteurs  $B$  tous égaux à 1.

## 5 La distorsion

Soit un quantificateur vectoriel  $Q$  avec un dictionnaire composé de  $L$  vecteurs. Son fonctionnement est défini par :

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R}^n &\longrightarrow Y = \{Y_1, \dots, Y_L\} \\ X &\longrightarrow Q(X) = Y_i, i/X \in C_i \end{aligned}$$

où  $C_i$  sont les classes qui partitionnent l'espace  $\mathbb{R}^n$  et vérifient

$$\bigcup_{i=1}^L C_i = \mathbb{R}^n \quad (12)$$

La distorsion se traduit comme la distance entre le point  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  et le point quantifié  $Q(X)$ . On peut donc écrire que :

$$D = \int_{\mathbb{R}^n} \|X - Q(X)\|^2 dX = \sum_{i=1}^L \int_{C_i} \|X - Y_i\|^2 dX \quad (13)$$

Nous avons utilisé pour l'optimisation deux formules différentes de la distorsion. Dans celles-ci, nous n'avons considéré que de la distorsion granulaire. Le terme de surcharge n'intervient que dans la plage de fort débit et le point de fonctionnement se situera en dehors de cette plage. Pour cette raison, nous ne tiendrons compte que du terme granulaire.

### 5.1 Distorsion $D(R)$

Nous avons commencé par l'approximation donnée par Zador [9] en fonction du débit et dans le cas asymptotique. Celle-ci présente à la fois un avantage qui est la simplicité et un inconvénient dû au fait que c'est un modèle asymptotique. C'est à dire que ce modèle de distorsion ne se vérifie que pour des forts débits, quand le nombre de classes  $L$  est suffisamment grand pour pouvoir dire que la probabilité d'apparition d'un vecteur est constante pour tous les vecteurs appartenant à la même classe. L'expression de cette distorsion est donnée par :

$$D(R) = A(n, 2) 2^{-2R} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)^{\frac{n}{2+n}} dx \right)^{\frac{2+n}{n}}$$

où les coefficients  $A(n, 2)$  ont été tabulés par Conway et Sloane [10].

En faisant l'hypothèse de source *i.i.d* on peut décomposer la pdf  $n$ -dimensionnelle en un produit de  $n$  pdf monodimensionnelles. On peut donc majorer la distorsion par :

$$D(R) \leq A(n, 2) 2^{-2R} \left( \int_{\mathbb{R}} f_X(x)^{\frac{n}{2+n}} dx \right)^{(2+n)}$$

### 5.2 Distorsion $D(\gamma)$

Le deuxième modèle de distorsion est donné dans [8]. Celui-ci est fonction de  $\gamma$ , pas de quantification du quantificateur vectoriel.

$$D(\gamma) = \frac{\gamma^2}{12} \sum_{i=1}^n \left( 1 + \frac{6}{\pi^2} \sum_{k_i \neq 0} \frac{(-1)^{k_i}}{k_i^2} \Phi_{x_1 \dots x_n} \left( 0, \dots, \frac{2\pi k_i}{\gamma}, \dots, 0 \right) \right)$$

où  $\Phi_{x_1 \dots x_n}(u_1, \dots, u_n)$  correspond à la fonction caractéristique du signal source définie par

$$\Phi_{x_1 \dots x_n}(u_1, \dots, u_n) = E \left[ e^{j(u_1 X_1 + \dots + u_n X_n)} \right]$$

L'intérêt de son utilisation est double, bien qu'il soit plus lourd en temps de calcul. D'une part ce modèle est réaliste aussi bien à bas débit qu'à haut débit, caractéristique qui le rend très intéressant. D'autre part, la variable d'optimisation et donc le résultat obtenu, est  $\gamma$ , pas de quantification du quantificateur vectoriel. Ceci permet de construire directement le quantificateur, une fois que l'optimisation sera effectuée. Ainsi, l'utilisation de ce modèle nous oblige à connaître la fonction permettant de passer de la variable  $\gamma$  à la variable  $R$ . En effet, les contraintes portent sur le débit

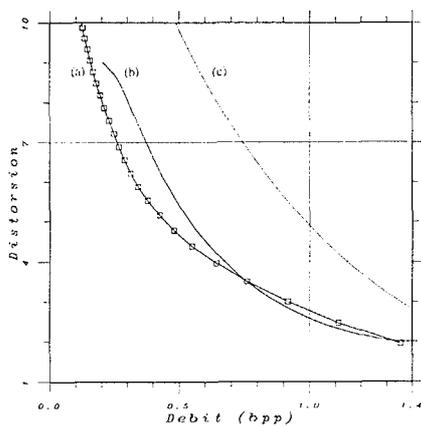


Figure 2: (a): Courbe expérimentale. (b): Modèle  $D(\gamma)$ . (c): Modèle asymptotique  $D(R)$ .

Résol.	Orient.	n	$B_i$		Débit (bpp)	
1	V	8	1	0.00	0.051	0.000
	D	8	1	0.00	0.000	0.000
	H	8	1	0.00	0.000	0.000
2	V	4	1	0.26	0.746	0.420
	D	4	1	0.26	0.000	0.000
	H	4	1	0.26	0.103	0.000
3	V	4	1	1.00	1.152	1.782
	D	4	1	1.00	0.360	0.989
	H	4	1	1.00	0.336	0.966
4	V	2	1	0.96	2.098	2.759
	D	2	1	0.96	1.082	1.741
	H	2	1	0.65	1.116	1.776
B.F.		1	1		6	

Tableau 1: Résultats de l'optimisation pour l'image Lena pour un TC de 60 sans et avec pondération psychovisuelle.

et donc celui-ci doit être calculé en fonction du pas de quantification pour les évaluer. Remarquons que l'utilisation du modèle asymptotique précédent en fonction du débit nécessite la recherche expérimentale du paramètre  $\gamma$  qui correspond au débit trouvé.

## 6 Résultats expérimentaux

Sur la figure 2 sont représentés les courbes des différents modèles de distorsion ainsi que la distorsion réelle en fonction du débit, pour une image de coefficients d'ondelettes. Pour le modèle  $D(\gamma)$ , le débit correspond au débit expérimental (une approximation théorique de ce débit peut être trouvée dans [8]). Sur ces courbes on voit que le deuxième modèle est beaucoup plus proche de la courbe réelle alors que le modèle asymptotique ne se rapproche de la réalité que pour des forts débits.

La figure 3 représente l'image Lena avec un taux de compression de 40. Dans la première image le modèle asymptotique de Zador est utilisé pour réaliser l'optimisation et dans la deuxième, le modèle  $D(\gamma)$ . Les résultats obtenus sont visuellement très semblables bien que les allocations utilisées ne sont pas identiques. La figure 4 illustre l'utilisation

des facteurs de pondération. Les allocations utilisées sont présentées dans le tableau 1.



Figure 3: Détail de l'image Lena avec un taux de compression de 40 en utilisant la distorsion  $D(R)$  (gauche) et  $D(\gamma)$  (droite).



Figure 4: Détail de l'image Lena avec un taux de compression de 60 sans (gauche) et avec pondération psychovisuelle (droite).

## Références

- [1] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu et I. Daubechies, *Image Coding using Wavelet Transform*, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 1, No. 2, pp. 205-220 (1992).
- [2] M. Minoux, *Programmation mathématique. Théorie et algorithmes*, Tome 1 (1983).
- [3] M. Barlaud, *Wavelets in Image Communication*, Advances in Images Communication, Vol. 5, Elsevier, Ed. M. Barlaud.
- [4] M. Antonini, M. Barlaud, B. Rougé, C. Lambert-Nebout, *Weighted Optimum bit Allocation for Multiresolution Satellite Image Coding*, 14ième Colloque GRETSI, Juan Les Pins, France, pp. 455-458, September 1993.
- [5] J. L. Mamos & D. J. Sakrison, *The effects of a Visual Fidelity Criterion on the Encoding of Images*, IEEE Transactions on Information Theory, IT-20, No. 4, July 1974.
- [6] M. R. Hestens, *Multipliers and gradient methods*, Journal of Optimisation Theory and Applications 4, pp. 303-320 (1969).
- [7] M. J. D. Powell, *A Method for Nonlinear Constraints in Minimization Problems* Academic Press, New York, pp. 283-298 (1969).
- [8] M. Antonini, P. Raffy, M. Barlaud, *Towards Entropy Constrained Lattice Vector Quantization* IEEE, ICIP (1995).
- [9] P. Zador, *Asymptotic Quantization Error of Continuous Signals and their Quantization Dimension*, IEEE Transactions on Information theory, Vol. IT-28 (1982).
- [10] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer Verlag (1988).