

## LES TURBO-CODES DE RENDEMENTS ELEVES

Stéphane Le Goff, Claude Berrou

 Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne  
 Département électronique  
 BP 832 - 29285 Brest Cédex

## Résumé

Dans cet article, les auteurs étudient les performances en terme de correction d'erreurs, présentées par des turbo-codes dont les rendements sont proches de l'unité ( $3/4 \leq R \leq 7/8$ ). Les résultats obtenus à l'aide de simulations du type "Monte-Carlo" permettent d'affirmer que les turbo-codes sont aussi des codes correcteurs d'erreurs extrêmement attractifs à forts rendements. Toutefois, nous montrons qu'il s'avère nécessaire dans certains cas d'adopter certaines techniques spécifiques afin que ces codes conservent leurs excellentes capacités de correction.

## 1. Introduction

Inventés récemment, les turbo-codes [1] sont des codes correcteurs d'erreurs binaires obtenus en concaténant en parallèle deux codes convolutifs Systématiques Récursifs (codes SR) et en utilisant, au décodage, le concept de contre-réaction. Des simulations réalisées sur un canal gaussien ont montré qu'avec un système associant un turbo-code de rendement 1/2 et une modulation MDP4, il est possible d'obtenir des gains de codage encore jamais atteints.

Le principal inconvénient d'un tel système réside toutefois dans sa faible efficacité spectrale ( $\eta = 1$  bit/s/Hz). La tendance actuelle étant à l'augmentation des débits de transmission et les bandes disponibles demeurant limitées, il devient en effet de plus en plus nécessaire de disposer de systèmes possédant des efficacités spectrales élevées. Rappelons que l'efficacité spectrale  $\eta$  d'une transmission utilisant un code correcteur d'erreurs de rendement  $R$  et une modulation à  $M$  états est égale à :

$$\eta = R \log_2 M \quad (\text{en bit/s/Hz}). \quad (1)$$

D'après l'expression (1), il est clair que si l'on désire augmenter  $\eta$ , il faut alors augmenter le rendement  $R$  et/ou le nombre d'états  $M$  de la modulation. Ainsi, afin d'évaluer l'intérêt des turbo-codes pour des applications à efficacités spectrales élevées, il est nécessaire de s'intéresser à ces codes lorsqu'ils sont élaborés à partir de codes SR fortement poinçonnés.

Dans cet article sont présentés différents résultats sur des turbo-codes dont les rendements varient de 3/4 à 7/8. Leurs performances ont été évaluées en présence d'un canal gaussien en employant des simulations du type "Monte-Carlo".

Dans tous les cas, les résultats obtenus permettent d'affirmer que les turbo-codes restent encore des codes attractifs à forts rendements. Toutefois, en considérant un cas particulier, nous montrons qu'il faut parfois adopter soit une technique dite de

## Abstract

In this paper, we study performance in term of Bit Error Rate (BER) presented by turbo-codes whose coding rates are close to unity ( $3/4 \leq R \leq 7/8$ ). Monte-Carlo simulations of the BER after decoding show that turbo-codes are still very attractive for high coding rates. Nevertheless, in some cases, we demonstrate that it is necessary to use some specific technics in order that these codes keep their good error-correction capabilities.

"poinçonnage des données utiles", soit une technique dite "des polynômes commutés" afin que les turbo-codes conservent leurs excellentes capacités de correction.

## 2. Rappels sur les turbo-codes

Les turbo-codes constituent une famille de codes correcteurs d'erreurs obtenue à partir d'une concaténation parallèle de deux codes SR. Cette structure de codage permet aux turbo-codes d'être systématiques. A titre d'exemple, la figure 1 représente la structure d'un turbo-codeur de rendement 1/2 élaboré à partir de deux codeurs SR  $C_1$  et  $C_2$  de rendements respectifs  $R_1$  et  $R_2$ , de longueur de contrainte  $K = 5$ , et de polynômes générateurs (23, 35).

Les deux codeurs élémentaires  $C_1$  et  $C_2$  utilisent les mêmes symboles d'entrée, mais suivant des séquences différentes. Ceci est rendu possible par la présence d'un entrelaceur et d'un registre à décalage (RAD). Pour une séquence  $\{d_k\}$  de symboles d'information à transmettre, les symboles codés  $X_k$  et  $Y_k$ , à l'instant  $kT$ , sont élaborés de la manière suivante :

- le symbole  $X_k$  est égal au symbole d'information  $d_k$ ;
- le symbole de redondance  $Y_k$  est donné par la sortie d'un commutateur périodique (multiplexeur) dont les entrées sont  $Y_k^1$  et  $Y_k^2$ , symboles de redondance fournis respectivement par les codeurs  $C_1$  et  $C_2$ . La périodicité de la commutation est évidemment fonction des rendements  $R_1$  et  $R_2$  que l'on souhaite attribuer aux codeurs  $C_1$  et  $C_2$ .

Les turbo-codes utilisent le concept de décodage itératif. En effet, un turbo-décodeur est constitué par la mise en cascade de  $P$  modules de décodage identiques (figure 2). Sa structure est donc parfaitement modulaire. Un module de rang ( $i$ ) a pour tâche d'élaborer une variable  $(Z)_{i+1}$ , appelée information de contre-réaction, qui réalise une estimation nouvelle du symbole ( $X$ ) émis par le codeur. Cette estimation est affectée d'un bruit décorrélié de celui qui perturbe les symboles ( $X$ ) et ( $Y$ ) en sortie

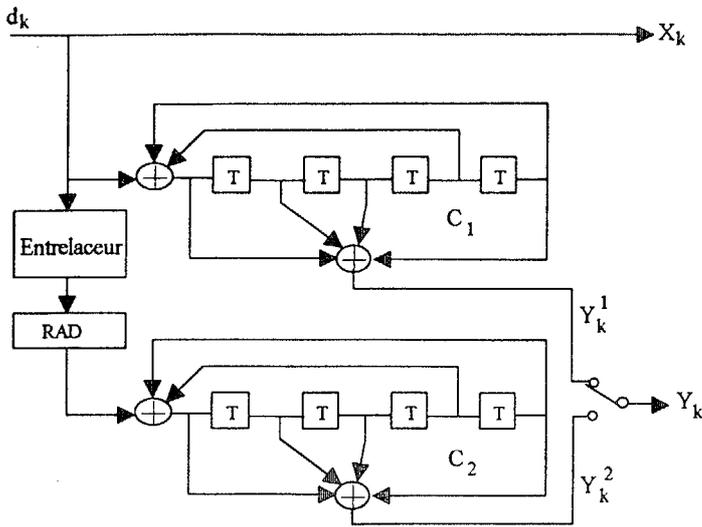


Figure 1 - Exemple d'un turbo-codeur de rendement 1/2 obtenu par concaténation parallèle de deux codes SR  $C_1$  et  $C_2$

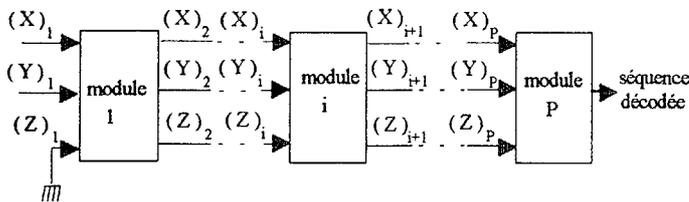


Figure 2 - Structure modulaire d'un turbo-décodeur, correspondant à un procédé de décodage avec contre-réaction.

du canal de transmission.

De façon succincte, le fonctionnement d'un module consiste en une succession de deux décodages de Viterbi à décisions pondérées [2] (décodage de  $C_1$  puis décodage de  $C_2$ ). A la sortie du second décodeur, une grandeur  $(Z)_{i+1}$  de contre-réaction est obtenue. A condition que le rapport signal à bruit soit suffisamment grand, cette variable  $(Z)_{i+1}$  réalise une meilleure estimation de  $(X)$  que la variable  $(Z)_i$  provenant du module précédent. Ainsi, un module de rang  $(i)$  possède un pouvoir de correction d'autant plus élevé que l'indice  $i$  est lui-même plus élevé. Avec un turbo-code, il est donc possible, à partir d'un certain rapport signal à bruit, d'obtenir en sortie du récepteur un Taux d'Erreurs binaires (TEB) très faible. Il suffit pour cela d'utiliser un turbo-décodeur constitué d'un nombre  $P$  de modules suffisant.

Les différentes simulations réalisées ont montré qu'à partir d'un certain nombre  $P$  de modules cascades, le gain en performances qui résulte de l'ajout de modules supplémentaires est négligeable. Comme, de plus, la complexité d'un turbo-décodeur est une fonction linéaire de  $P$ , une réalisation pratique possédant un excellent compromis performances-complexité ne nécessite qu'environ trois à quatre modules de décodage, ce qui est extrêmement avantageux pour bon nombre d'applications.

### 3. Performances des turbo-codes de rendements élevés dans un canal gaussien

Dans cette partie, nous présentons des résultats de simulations obtenus avec des turbo-codes dont les rendements sont de la forme  $n/(n+1)$ , où  $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ . Dans tous les cas, le turbo-codeur de base (rendement égal à 1/3) est constitué de deux codeurs SR de rendement 1/2, de longueur de contrainte  $K = 5$ , et de polynômes générateurs (23, 35) (voir figure 1). Les

turbo-codes dont les performances sont étudiées plus loin, sont obtenus par poinçonnage de ce turbo-codeur de base. Pour disposer d'un turbo-code de rendement  $n/(n+1)$ , on utilise deux codes SR de rendement  $2n/(2n+1)$ . La modulation employée est une modulation binaire, et le turbo-décodeur se compose d'un nombre de modules allant de 1 à 4.

D'autre part, les simulations ont été effectuées en considérant que le turbo-décodeur travaille en décisions douces, et que les matrices d'entrelacement et de désentrelacement sont de taille  $256 \times 256$ . Ce dernier point n'est pas fondamental car on peut montrer qu'avec des matrices de taille  $64 \times 64$ , les performances obtenues sont sensiblement identiques.

Les courbes du TEB après décodage en fonction du rapport signal à bruit  $E_b/N_0$ , pour des rendements  $R$  allant de 3/4 à 7/8, sont représentées sur les figures 3 à 7 (courbes notées "TC - P modules" quand le turbo-décodeur utilise  $P$  modules de décodage). A titre indicatif, on a également représenté sur chaque figure la courbe du TEB de la MDP4 non codée, ainsi que celle obtenue en remplaçant le turbo-code de rendement  $R$  par un code convolutif de même rendement (courbes notées "C.Conv."). Ce code est obtenu par poinçonnage optimal du code non systématique de rendement 1/2, de longueur de contrainte  $K = 7$ , et de polynômes (133, 171) [3].

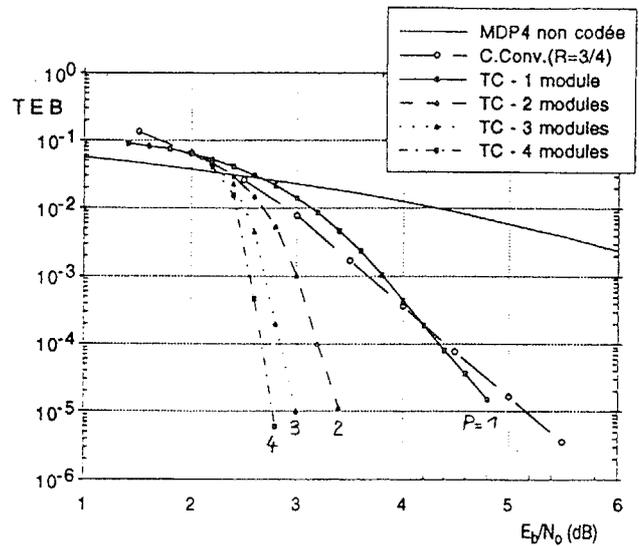


Figure 3 - Performances d'un turbo-code de rendement 3/4, pour 4 valeurs différentes du nombre  $P$  de modules constituant le turbo-décodeur.

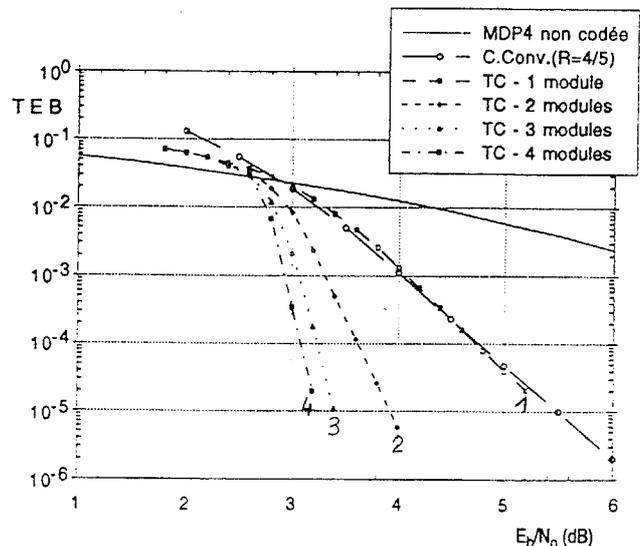


Figure 4 - Performances d'un turbo-code de rendement 4/5, pour 4 valeurs différentes du nombre  $P$  de modules constituant le turbo-décodeur.

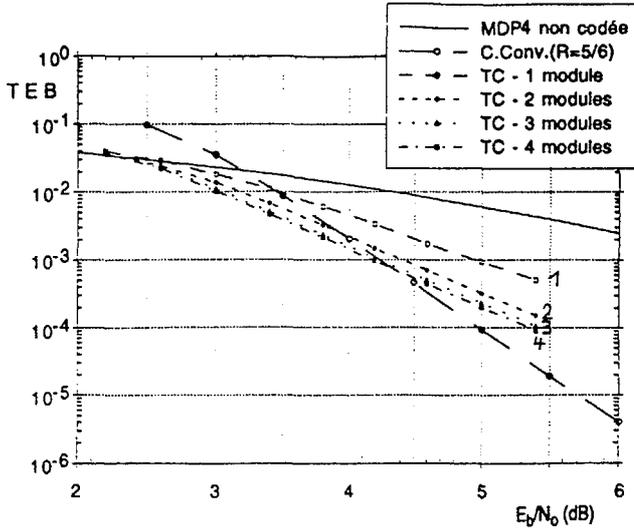


Figure 5 - Performances d'un turbo-code de rendement 5/6, pour 4 valeurs différentes du nombre  $P$  de modules constituant le turbo-décodeur.

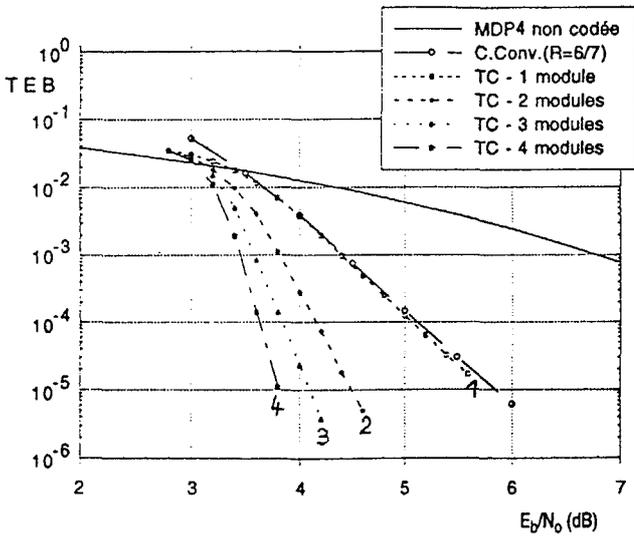


Figure 6 - Performances d'un turbo-code de rendement 6/7, pour 4 valeurs différentes du nombre  $P$  de modules constituant le turbo-décodeur.

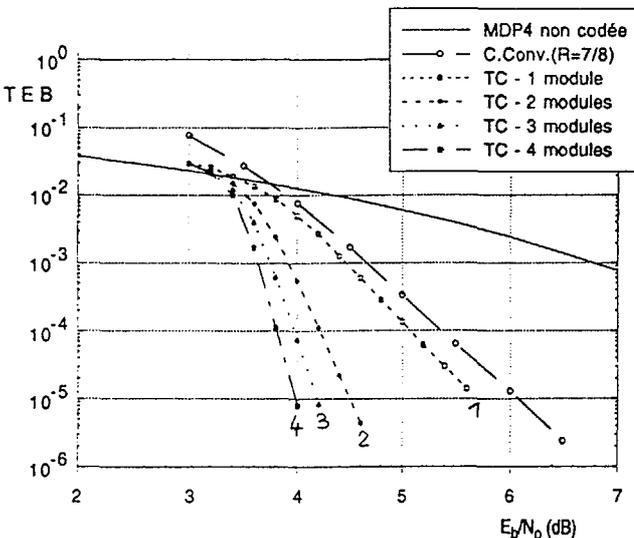


Figure 7 - Performances d'un turbo-code de rendement 7/8, pour 4 valeurs différentes du nombre  $P$  de modules constituant le turbo-décodeur.

Au vu des résultats présentés sur les figures 3 à 7, les turbo-codes apparaissent en général comme des codes correcteurs d'erreurs extrêmement efficaces, dès lors que le nombre de modules de décodage est supérieur ou égal à 2.

Toutefois, le turbo-code de rendement 5/6 constitue un cas particulier. En effet, ce turbo-code présente des performances très inférieures à celles atteintes avec les autres turbo-codes étudiés. On peut expliquer ce phénomène de dégradation des performances de la manière suivante :

pour que le procédé de décodage itératif utilisé dans les turbo-codes soit véritablement efficace, il est nécessaire d'employer des codes élémentaires  $C_1$  et  $C_2$  dont le comportement est excellent à forts rapports signal à bruit. Si ce n'est pas le cas, alors un module de décodage s'avère incapable de faire chûter le taux d'erreurs de manière significative d'une itération à l'autre.

Or, on peut justement mettre en évidence le fait que le code SR de rendement 10/11 (constituant la base du turbo-code de rendement 5/6) présente des performances en terme de correction d'erreurs particulièrement mauvaises aux forts rapports signal à bruit.

Il est néanmoins possible de disposer d'un turbo-code de rendement 5/6 efficace. Pour cela, il existe deux techniques que nous nous proposons de détailler à présent.

#### 4. La technique "PDU"

Cette technique consiste à faire en sorte qu'un des deux codes élémentaires de rendement 10/11 soit poinçonné de manière à posséder des performances optimales à forts rapports signal à bruit [3], et non plus simplement de façon à rester systématique. Par exemple, dans notre cas, le masque de poinçonnage employé en sortie du turbo-codeur de base devient :

$$M = \begin{bmatrix} X & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ Y_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ Y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

au lieu de :

$$M = \begin{bmatrix} X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ Y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Grâce au comportement optimal du nouveau code  $C_1$  à forts rapports signal à bruit, on obtient un turbo-code de rendement 5/6 efficace qui possède la particularité de ne pas être systématique.

La figure 8 représente les courbes du TEB en fonction du rapport  $E_b/N_0$  obtenues avec cette technique dite de "Poinçonnage des Données Utiles" (technique PDU), dans le cas du turbo-code de rendement 5/6.

A titre comparatif, nous rappelons les courbes (voir figure 5) obtenues à l'aide de la technique classique dite de "Poinçonnage des Données de Redondance" (technique PDR).

Les résultats présentés sur la figure 8 confirment bien le fait que la technique PDU offre des performances largement meilleures que la méthode PDR dans le cas particulier d'un turbo-code de rendement 5/6.

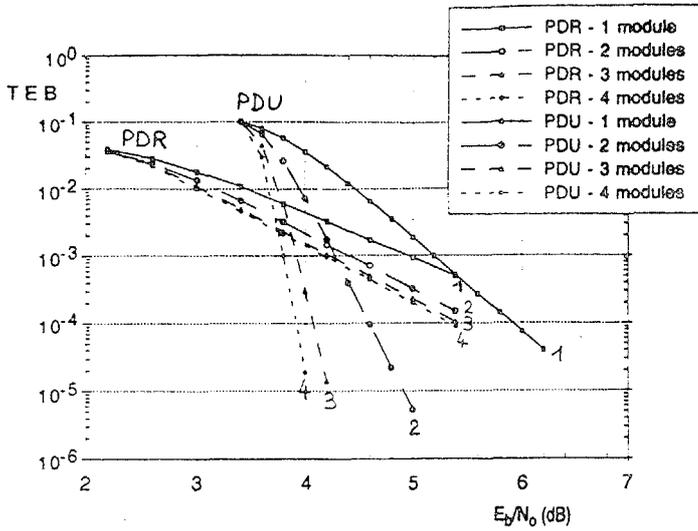


Figure 8 - Performances d'un turbo-code de rendement 5/6 élaboré suivant la technique PDU, pour 4 valeurs différentes du nombre P de modules constituant le turbo-décodeur.

### 5. La technique des "polynômes commutés"

Cette technique est plus performante que la technique PDU, mais elle présente l'inconvénient de nécessiter une modification de la structure du turbo-codeur de base.

On a vu précédemment qu'en employant la technique PDU le code C<sub>1</sub> de rendement 10/11 perd son caractère systématique, ce qui ne permet pas au turbo-code obtenu de présenter de bonnes performances à faibles rapports signal à bruit. Afin de remédier à ce problème, il faut donc chercher à conserver le caractère systématique des deux codes élémentaires C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub>, tout en prenant en compte le masque de poinçonnage optimal permettant à ces codes de présenter les meilleures performances possibles à forts rapports signal à bruit.

Pour cela, on peut employer la méthode, dite des "polynômes commutés" [4]. L'application de cette méthode nécessite d'introduire dans chaque codeur élémentaire une fonction de commutation mise en oeuvre à l'aide d'interrupteurs (figure 9).

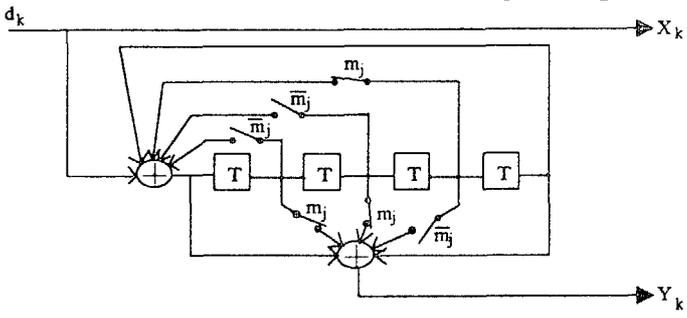


Figure 9 - Structure du codeur SR de polynômes (23, 35) permettant de mettre en oeuvre la technique des "polynômes commutés".

Etant donné que les codes élémentaires doivent demeurer systématiques, on utilise un masque de poinçonnage invariant en sortie du codeur SR de base. Désignons par M le masque qu'il faudrait employer pour que le code SR de polynômes (23, 35) et de rendement 10/11 possède les meilleures performances possibles à forts rapports signal à bruit. Soit m<sub>j</sub> le symbole binaire associé à la première ligne et à la j<sup>ème</sup> colonne du masque M. La technique des "polynômes commutés" consiste simplement à faire varier les polynômes du codeur SR de base en fonction de la valeur de m<sub>j</sub> :

- lorsque m<sub>j</sub> = 1, les interrupteurs sont positionnés de manière à obtenir des polynômes (23, 35);

- lorsque m<sub>j</sub> = 0, les interrupteurs sont positionnés de manière à obtenir des polynômes (35, 23).

On peut montrer que la structure du treillis du code SR ainsi obtenu est identique à celle du code de rendement 10/11 poinçonné à l'aide du masque M. La technique des "polynômes commutés" permet donc de disposer d'un code SR de rendement 10/11 présentant des performances optimales à forts rapports signal à bruit. La figure 10 représente les courbes de TEB en fonction du rapport E<sub>b</sub>/N<sub>0</sub>, obtenues avec un turbo-code de rendement 5/6 élaboré à partir de deux codes SR utilisant la méthode des "polynômes commutés". Sur cette figure, on a également indiqué à titre de rappel les courbes obtenues en employant la technique PDU.

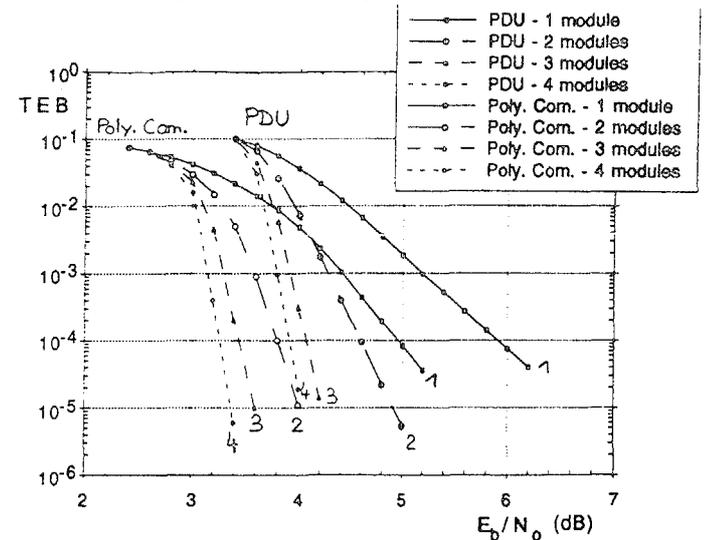


Figure 10 - Performances d'un turbo-code de rendement 5/6 élaboré suivant la technique des "polynômes commutés", pour 4 valeurs différentes du nombre P de modules constituant le turbo-décodeur.

Ces résultats montrent clairement que la méthode des "polynômes commutés" offre de meilleures performances que la technique PDU, ceci au prix d'une complexité plus importante due à l'introduction d'une fonction de commutation à l'intérieur des codeurs élémentaires.

### 6. Conclusion

Dans cet article, nous avons montré à l'aide de simulations que les turbo-codes sont des codes possédant un pouvoir de correction très élevé, ceci même lorsque leur rendement est proche de l'unité. En considérant le cas du turbo-code de rendement 5/6, nous avons tout de même mis en évidence la nécessité de recourir parfois à l'emploi de certaines techniques permettant au turbo-codes de conserver leurs excellentes capacités de correction.

### Bibliographie

- [1] C. Berrou *and al.*, "Near Shannon limit error correcting coding and decoding : Turbo-codes," IEEE ICC'93, Vol. 2/3, pp.1064-1070, Geneva, May 1993.
- [2] C. Berrou *and al.*, "A low complexity soft-output Viterbi decoder architecture," IEEE ICC'93, Vol. 2/3, pp. 737-740, Geneva, May 1993.
- [3] Y. Yasuda *and al.*, "High-rate punctured convolutional codes for soft-decision Viterbi decoding," IEEE Trans. on Commun., Vol. COM-32, pp. 315-319, March 1984.
- [4] P. Thitimajshima, "Les codes convolutifs systématiques récurrents et leur concaténation," Thèse de l'Université de Bretagne Occidentale, Brest, Décembre 1993.