



# ANALYSE ET RESTAURATION DE PHASE INTERFÉROMÉTRIQUE EN RADAR À OUVERTURE SYNTHÉTIQUE

Emmanuel TROUVÉ, Marcello CARAMMA<sup>1</sup> et Henri MAÎTRE

Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Département Images  
46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13

Tél : (1) 45 81 70 69 - Fax : (1) 45 81 37 94 - Email : trouve@ima.enst.fr

(1) également à l'Institut Polytechnique de Milan - ITALIE

## RÉSUMÉ

Les données interférométriques R.O.S. nécessitent un important filtrage pour pouvoir exploiter l'information de phase. Nous présentons ici une technique originale d'estimation des fréquences spatiales permettant d'analyser les franges, même dans les zones bruitées de faible corrélation. En modélisant le signal par une sinusoïde complexe affectée par un bruit multiplicatif, nous nous ramenons à un problème d'analyse spectrale. Nous démontrons que l'algorithme MUSIC peut être appliqué et proposons une méthode d'estimation simplifiée. Ces résultats permettent de restaurer la phase de manière adaptative et de supprimer les perturbations dues au bruit.

## ABSTRACT

S.A.R. interferometric data require important filtering in order to use the phase information. In this paper we present a new method to estimate the 2-dimension frequencies, and to analyse interferometric fringes even in low correlation noisy areas. With a complex sine-wave model and multiplicative noise, the problem becomes part of the spectral analysis field. We demonstrate that the MUSIC algorithm can be used and we propose a simplified estimation method. These results allow an efficient and adaptive phase restoration removing noise perturbations.

## 1 Introduction

Grâce aux données satellitaires, l'interférométrie en radar à ouverture synthétique (InROS) offre un potentiel considérable pour les applications topographiques. Un couple d'images acquises sur deux orbites parallèles séparées par une base réduite permet de mesurer l'altitude par la différence de chemin. L'InROS tire parti de la précision des ondes centimétriques en calculant cette altitude par la différence de phase  $\phi(x, y) = \phi_1(x, y) - \phi_2(x, y)$  entre les deux images complexes  $\rho_1(x, y)e^{i\phi_1(x, y)}$  et  $\rho_2(x, y)e^{i\phi_2(x, y)}$ .

Ce signal de phase bidimensionnel (2-D) présente deux particularités qui rendent son exploitation difficile. D'une part il est extrêmement bruité par plusieurs facteurs dont le bruit thermique de chacune des deux images initiales, la décorrélation spatiale lorsque la base augmente et la décorrélation temporelle si les surfaces imagées évoluent entre les deux acquisitions. D'autre part, la mesure de phase est ambiguë : on n'accède qu'à la valeur principale dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . La détermination exacte du multiple de  $2\pi$  se heurte au problème du développement de phase ("phase unwrapping"). En raison du bruit, le taux élevé de singularités ou *résidus* interdit l'utilisation directe de techniques classiques de développement [1].

Afin de réduire les perturbations de la phase, un moyennage spatiale cohérent est effectué au détriment de la résolution au sol. Après recalage entre les deux images [2], les franges observées sont la superposition de deux phénomènes : l'éloignement en distance qui est à l'origine des franges dites orbitales ( $\phi_o$ ), et l'élévation du terrain qui crée les franges dites topographiques ( $\phi_t$ ). Les premières sont estimées et retirées lors de la formation de l'interférogramme, diminuant ainsi les variations de la phase sur la fenêtre de moyennage  $\mathcal{F}$  [3]. La phase est alors estimée par l'argument de la corrélation complexe :

$$co(m, n)e^{i\phi(m, n)} = \frac{\sum_{\mathcal{F}} \rho_1 e^{i\phi_1} \rho_2 e^{-i\phi_2} e^{-i\phi_o}}{\sqrt{\sum_{\mathcal{F}} \rho_1^2} \sqrt{\sum_{\mathcal{F}} \rho_2^2}} \quad (1)$$

La variance de l'estimation est fonction du "nombre de vues" moyennées  $M$  et de la corrélation estimée empiriquement par  $co$ .

Les franges demeurant dans l'interférogramme sont principalement dues à la topographie. En présence de relief, l'augmentation de  $M$  est limitée par l'apparition d'aliasing dû au sous-échantillonnage des franges étroites. Sur les zones de faible corrélation, la phase reste fortement bruitée. Afin de restaurer le signal



de phase, nous proposons alors une technique de filtrage basée sur la mesure des fréquences locales des franges interférométriques. L'algorithme d'estimation spectrale développé à cet effet fournit les paramètres nécessaires à une régularisation de la phase adaptative vis-à-vis du motif des franges. Contrairement aux méthodes déjà proposées, cette approche ne nécessite ni le recours aux images complexes initiales [4], ni une hypothèse de franges larges déjà développées [5].

## 2 Analyse des fréquences locales

La périodicité des franges (fig. 2c) et la connaissance du signal analytique  $e^{i\phi}$  suggère l'emploi des techniques d'analyse spectrale paramétriques pour mesurer les franges topographiques en terme de fréquence locale 2-D. Nous montrons tout d'abord que les principes de l'algorithme MUSIC [6] peuvent s'appliquer et proposons ensuite un calcul direct plus rapide.

### 2.1 Modélisation

Nous faisons les hypothèses suivantes : la phase est affectée par un bruit additif  $\eta$  qui se traduit sur le signal complexe par un bruit multiplicatif  $b = e^{i\eta}$  :

$$s_b(m, n) = s(m, n) \cdot b(m, n) = e^{i\phi(m, n)} \cdot e^{i\eta(m, n)} \quad (2)$$

Le bruit  $b(m, n)$  est stationnaire au sens large, spatialement décorrélé et décorrélé du signal. Sa fonction d'autocorrélation (FAC)  $\gamma_b(m, n)$  vaut alors :

$$\begin{aligned} \gamma_b(m, n) &= \langle e^{i\eta(m, n)} e^{-i\eta(0,0)} \rangle \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } (m, n) = (0, 0) \\ K = |\langle e^{i\eta(0,0)} \rangle|^2 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

Le paramètre  $K$  est fonction de la distribution du bruit et varie entre 1 en l'absence de bruit et 0 dans le cas d'un bruit uniforme sur  $[-\pi, \pi]$ .

Le signal de phase est déterministe, et peut être localement modélisé par une sinusoïde complexe de fréquence 2-D  $(f_x, f_y)$  :

$$s(m, n) = e^{i2\pi(mf_x + nf_y)} \quad (4)$$

Cette modélisation assimile localement le relief à son plan tangent.

Sous ces hypothèses la FAC du signal bruité s'écrit en fonction des différences  $m = i - k$ ,  $n = j - l$  :

$$\begin{aligned} \gamma_{s_b}(m, n) &= \langle s_b(i, j) \cdot \overline{s_b(k, l)} \rangle \\ &= e^{i2\pi(mf_x + nf_y)} \cdot \langle e^{i\eta(m, n)} e^{-i\eta(0,0)} \rangle \\ &= \gamma_s(m, n) \cdot \gamma_b(m, n) \\ &= K\gamma_s(m, n) + (1 - K)\delta_{m,n} \quad (5) \end{aligned}$$

où  $\gamma_s$  désigne la FAC du signal non-bruité.

Le passage du signal 2-D sous une forme 1-D se fait de manière classique : nous considérons par simplification des fenêtres carrées de côtés  $D_s$  pour le signal, et  $D_e > D_s$  pour l'estimation de la matrice d'autocorrélation (MAC) sur  $(D_e - D_s + 1)^2$  réalisations sous l'hypothèse d'ergodicité. Le vecteur signal de taille  $D = D_s^2$  est formé par concaténation des lignes de la fenêtre considérée. Les MAC  $\Gamma_s$  et  $\Gamma_{s_b}$  du signal pur et bruité sont de type Toeplitz par blocs et vérifient d'après l'équation (5) la relation :

$$\Gamma_{s_b} = K \cdot \Gamma_s + (1 - K) \cdot I \quad (6)$$

où  $I$  est la matrice identité de dimension  $D$ .

### 2.2 Application de l'algorithme MUSIC

Les principes de MUSIC reposent sur une relation du même type. Le signal complexe bruité  $x_b(m, n)$  est modélisé par la somme de  $P$  sinusoïdes d'amplitude aléatoire  $a_k$  de variance  $\sigma_k^2$  et d'un bruit blanc de variance  $\sigma_b^2$ , non-corrélés.

$$\begin{aligned} x_b(m, n) &= x(m, n) + b(m, n) \quad (7) \\ &= \sum_{k=1}^P a_k \cdot e^{i2\pi(f_{kx}m + f_{ky}n)} + b(m, n) \end{aligned}$$

Soit  $E$  la matrice dont les colonnes sont les  $P$  vecteurs fréquences  $\underline{e}_k$  de dimension  $D$ , définis par :

$$\underline{e}_k^t = \begin{bmatrix} 1, & e^{i2\pi \cdot f_{kx}}, & \dots e^{i2\pi(D_s-1)f_{kx}}, \\ e^{i2\pi \cdot f_{ky}}, & e^{i2\pi \cdot (f_{kx} + f_{ky})}, & \dots e^{i2\pi((D_s-1)f_{kx} + f_{ky})}, \\ \dots & \dots & \dots \\ e^{i2\pi(D_s-1)f_{ky}}, & \dots e^{i2\pi(D_s-1)(f_{kx} + f_{ky})} \end{bmatrix} \quad (8)$$

La MAC de  $x$  s'écrit alors :

$$\Gamma_x = E V E^\dagger \quad (9)$$

où  $V$  est une matrice diagonale de taille  $P$  formée des variances  $\sigma_k^2$ . La MAC de  $x_b$  vérifie la relation :

$$\Gamma_{x_b} = E V E^\dagger + \sigma_b^2 \cdot I \quad (10)$$

En considérant une seule raie d'amplitude déterministe  $\sqrt{K}$ , plongée dans un bruit blanc de variance  $1 - K$ , on retrouve la relation (6) vérifiée par la FAC du signal de phase bruité. La suite du raisonnement de MUSIC peut donc s'appliquer pour déterminer le vecteur fréquences  $\underline{e}(f_x, f_y)$  correspondant à la seule raie présente à la fréquence  $(f_x, f_y)$  recherchée. L'espace signal engendré par les colonnes de  $\Gamma_s$  est alors de rang 1. Il correspond au vecteur propre  $\underline{u}_1$  associé à la plus grande valeur propre  $(DK + 1 - K)$  de

$\Gamma_{s_b}$ . Les  $D - 1$  autres valeurs propres ( $1 - K$ ) sont associées à l'espace bruit.

L'étape de diagonalisation de  $\Gamma_{s_b}$  se réduit alors à la recherche de  $\underline{u}_1$  par une méthode plus rapide, telle que celle des puissances [7]. L'étape de maximisation de la projection du vecteur fréquence sur l'espace signal revient à maximiser le produit scalaire  $|\underline{u}_1^\dagger \cdot \underline{e}(f_x, f_y)|$ . Les tests effectués sur des sous-images montrent les bonnes performances de cette application directe de MUSIC. Cependant, bien que le calcul glissant de  $\Gamma_{s_b}$  soit compatible avec les scènes de dimensions importantes ( $1024 \times 1024$  ou plus), les deux étapes suivantes restent trop coûteuses pour  $D_s > 3$ .

### 2.3 Estimation directe

Afin d'accélérer l'algorithme, nous proposons une technique d'estimation directe des fréquences  $f_x$  et  $f_y$  à partir des lignes des matrices d'autocorrélation. De l'écriture de  $\Gamma_s$  sous la forme  $\underline{e}(f_x, f_y) \cdot \underline{e}(f_x, f_y)^\dagger$  on déduit les égalités suivantes liées à son rang et à sa structure en blocs : d'une part à l'intérieur d'un bloc de lignes, chaque ligne  $\underline{L}$  se déduit de la précédente par multiplication par  $a_x = e^{i2\pi \cdot f_x}$  :

$$\underline{L}_{j+1} = a_x \cdot \underline{L}_j \quad \text{pour } j = j_0 + kD_s, \quad (11)$$

$$j_0 \in [1, 2, \dots, D_s - 1], \quad k \in [0, 1, \dots, D_s - 1]$$

D'autre part les lignes de chaque bloc se déduisent du bloc précédent par multiplication par  $a_y = e^{i2\pi \cdot f_y}$  :

$$\underline{L}_{j+D_s} = a_y \cdot \underline{L}_j \quad \text{pour } j \in [1, 2, \dots, D_s(D_s - 1)] \quad (12)$$

D'après l'équation (6) les relations (11-12) sont conservées dans la matrice  $\Gamma_{s_b}$ , à l'exception des égalités faisant intervenir les éléments de la diagonale. Pour chacune des deux inconnues  $a_x$  et  $a_y$  on dispose donc de  $D_s(D_s - 1)$  relations entre lignes privées de 2 éléments, soit  $NE = D_s(D_s - 1)(D_s D_s - 2)$  équations.

On peut donc estimer le coefficient  $a_x$  (resp.  $a_y$ ) qui minimise l'erreur quadratique  $\|\underline{v}_2 - a_x \cdot \underline{v}_1\|^2$  (resp.  $\|\underline{w}_2 - a_y \cdot \underline{w}_1\|^2$ ) où les vecteurs  $\underline{v}_1$  et  $\underline{v}_2$  sont formés à partir des  $NE$  éléments des lignes de  $\Gamma_{s_b}$  vérifiant les équations données par (11) (resp.  $\underline{w}_1$  et  $\underline{w}_2$  par (12)). L'interprétation géométrique de  $a_x \cdot \underline{v}_1$  comme la projection orthogonale de  $\underline{v}_2$  sur  $\underline{v}_1$  permet d'écrire :

$$\underline{v}_1^\dagger \cdot (\underline{v}_2 - a_x \cdot \underline{v}_1) = 0 \quad (13)$$

d'où l'expression de  $a_x$  (resp.  $a_y$ ) :

$$a_x = e^{i2\pi \cdot f_x} = \frac{\underline{v}_1^\dagger \cdot \underline{v}_2}{\|\underline{v}_1\|^2}, \quad a_y = e^{i2\pi \cdot f_y} = \frac{\underline{w}_1^\dagger \cdot \underline{w}_2}{\|\underline{w}_1\|^2} \quad (14)$$

La fréquence  $f_x$  (resp.  $f_y$ ) est estimée par l'argument du produit scalaire  $\underline{v}_1^\dagger \cdot \underline{v}_2$  (resp.  $\underline{w}_1^\dagger \cdot \underline{w}_2$ ). Par cette

méthode, nous obtenons séparément, sans itération et sans maximisation, les deux composantes fréquentielles ( $f_x, f_y$ ) du modèle sinusoïdal correspondant localement aux franges interférométriques.

### 2.4 Performances de l'algorithme

Les performances dépendent de trois types de paramètres : la largeur et l'orientation des franges, le niveau de perturbation et enfin les dimensions  $D_s$  et  $D_e$  des fenêtres utilisées. L'étude expérimentale sur des mires de franges de largeurs variables, perturbées par un bruit de distribution uniforme sur  $[-br, br]$ ,  $br$  variant entre 0 et  $\pi$ , montre que les erreurs relatives en largeur ou sur l'orientation sont indépendantes de l'orientation. En revanche, elles augmentent avec la taille des franges. Pour des fenêtres relativement réduites ( $D_s = 3, D_e = 9$ ), l'estimation est très précise pour  $br < \pi/2$  (fig. 1). Des dimensions plus importantes permettent encore d'obtenir des résultats robustes alors que  $br$  se rapproche de  $\pi$ .

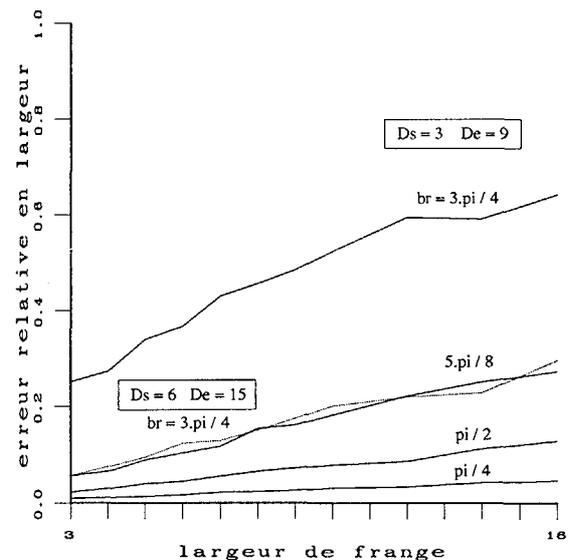


FIG. 1 - : Erreur relative moyenne de l'estimation de la largeur des franges, en fonction de leur largeur, à différents niveaux de bruit pour une taille de fenêtre  $D_s = 3$  pour le vecteur signal,  $D_e = 9$  lors du calcul de la MAC. L'augmentation des fenêtres ( $D_s = 6, D_e = 15$ ) permet une estimation correcte malgré l'importance du bruit.

## 3 Application au filtrage

Le filtrage proposé exploite les modèles locaux de franges fournis par l'estimation spectrale. Il s'apparente aux techniques utilisant un modèle numérique



de terrain pour faciliter l'interprétation et le développement des franges. Mais dans le cas présent, le modèle est mesuré directement sur l'interférogramme, sans recourir à des données extérieures dont l'accessibilité et la précision dépendent des régions étudiées.

Le filtrage est effectué sur une fenêtre centrée  $\mathcal{W}$ . Nous déduisons de la fréquence  $(f_x, f_y)$  l'évolution de la phase correspondant aux franges topographiques :

$$\phi_t(m, n) = 2\pi(f_x m + f_y n) \pmod{2\pi} \quad (15)$$

En retirant ce terme de phase, nous disposons d'un voisinage où la phase corrigée  $\phi(m, n) - \phi_t(m, n)$  ne varie plus qu'en raison des variations locales et des perturbations du bruit. L'adaptativité vis-à-vis de la nature des franges est alors réalisée: quelles que soient leur largeur et leur orientation, le filtrage peut s'appuyer sur un voisinage de phase constante pour restaurer la phase du point considéré.

En chaque pixel  $(m, n)$ , la somme complexe des  $M$  échantillons mono-vue est reconstituée à partir des données interférométriques ( $\phi$ ,  $co$  et  $am$  l'amplitude R.O.S) par le produit  $am^2(m, n) co(m, n) e^{i(\phi(m, n) - \phi_t(m, n))}$ . Le moyennage de l'équation (1) est alors étendu sur une fenêtre  $\mathcal{W}$  où les franges topographiques ont été retirées :

$$\widehat{co} e^{i\widehat{\phi}} = \frac{\sum_{\mathcal{W}} am^2(m, n) co(m, n) e^{i(\phi(m, n) - \phi_t(m, n))}}{\sum_{(m, n) \in \mathcal{W}} am^2(m, n)} \quad (16)$$

Le filtrage est effectué sur une fenêtre de taille fixe ( $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$  ...) ou bien de taille variable fonction du niveau de bruit mesuré par la corrélation. La taille peut être choisie à l'aide des résultats de Lee [8] donnant la variance de la phase en fonction de la corrélation et du nombre d'échantillons complexes moyennés. Connaissant le nombre de vues initial  $M$ , le niveau de corrélation locale, on en déduit le nombre d'échantillons complexes nécessaire pour réduire suffisamment la variance de l'estimation.

## 4 Conclusion

La restauration des interférogrammes ainsi obtenue réduit considérablement les perturbations de la phase dues au bruit. Sur la scène de l'Etna (fig. 2) le taux de résidus passe de 20% à moins de 5%. Les zones de faible corrélation redeviennent ainsi développables. La suite du traitement interférométrique peut alors s'appuyer sur la phase restaurée pour détecter les autres causes de perturbations propres à l'InROS (basculement, zones dépourvues de signal cohérent) et développer la phase sur le reste de la scène.

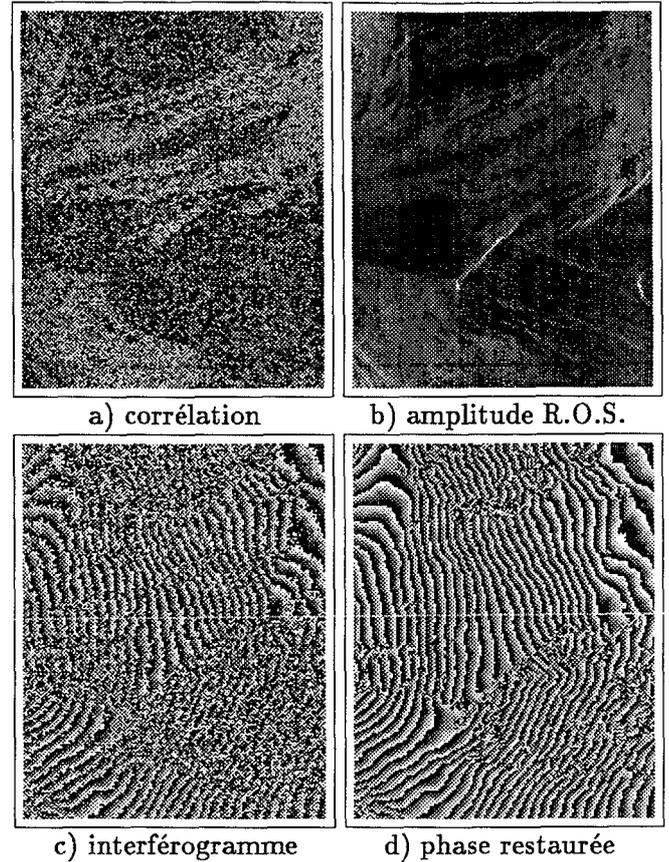


FIG. 2 - : Région de l'Etna: produit interférométrique "8-vues" (© CNES). Résultat du filtrage après estimation des fréquences locales et moyennage cohérent sur des fenêtres fonction du niveau de corrélation.

## Références

- [1] R. M. Goldstein, H. A. Zebker, and C. L. Werner. Satellite radar interferometry: Two-dimensional phase unwrapping. *Radio Science*, 23(4):713-720, July 1988.
- [2] Q. Lin, J. F. Veseky, and H. A. Zebker. Topography estimation with interferometric synthetic aperture radar using fringe detection. In *IGARSS'91, Helsinki, Finland*, pages 2173-2176, 1991.
- [3] D. Massonnet and T. Rabaute. Radar interferometry: Limits and potentials. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 31(2):445-464, March 1993.
- [4] J. Bruniquel and A. Lopes. Analysis and enhancement of multi-temporal SAR data. In *Image and signal processing for remote sensing*, volume 2315, pages 342-353. EUROPTO-SERIES, 94.
- [5] J. S. Lee, T.L. Ainsworth, M.R. Grunes, and R. M. Goldstein. Noise filtering of interferometric S.A.R. images. In *Image and signal processing for remote sensing*, volume 2315, pages 735-742. EUROPTO-SERIES, September 1994.
- [6] P. Stoica and A. Nehorai. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, 37(5):720-741, May 89.
- [7] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolesky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 1986.
- [8] J. S. Lee, K. W. Hoppel, S. A. Mango, and A. R. Miller. Intensity and phase statistics of multilook polarimetric and interferometric SAR imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 32(5):1017-1028, 1994.