

CODAGE PAR ÉCHANTILLONNAGE GAUSSIEN

Niels D.AAKVAAG et Bernard LACAZE

GAPSE/ENSEEIH, 2 rue Camichel, 31071 Toulouse Cedex, France
 email: aakvaag@len7.enseeih.fr

RÉSUMÉ

Le jitter aléatoire est normalement perçu comme une interférence perturbante. Dans cet article, nous proposons l'introduction d'un échantillonnage gaussien afin de brouiller des processus stationnaires. Nous montrons, en particulier, que sous certaines conditions que nous spécifierons, le processus de départ peut être reconstruit avec une erreur faible.

1. INTRODUCTION

Dans de nombreuses applications, nous souhaitons brouiller le contenu d'un message, soit pour des raisons commerciales soit dans le but de garder l'aspect privé des messages personnels. Parmi les diverses méthodes utilisées, on distingue celles qui dépendent d'une représentation numérique et celles qui s'effectuent directement sur le signal analogique. Cet article présente une méthode appartenant à la deuxième classe dans la mesure où son implantation peut se faire complètement dans le domaine analogique. Elle est basée sur l'introduction contrôlée d'un changement d'horloge aléatoire lors de la transmission du signal. A la réception, la reconstruction est accomplie par un filtrage linéaire. On réalise ainsi un codage de l'information, dans la mesure où une connaissance exacte du filtre de reconstruction est nécessaire afin de pouvoir retrouver le processus original.

2. DÉFINITIONS

Les signaux soumis à un changement d'horloge stochastique, qu'il soit dû aux variations du milieu de transmission ou à un échantillonnage irrégulier, peuvent être décomposés en deux composantes or-

ABSTRACT

Stochastic sampling jitter is usually seen as an unwanted interference. In this article, however, we propose using gaussian sampling jitter in order to scramble stationary processes. We show, in particular, that under certain conditions the original signal may be reconstructed with limited error.

thogonales [1]. Soit $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, un processus aléatoire, stationnaire au sens large, continu en moyenne quadratique, de densité spectrale $S_X(\omega)$, de fonction d'autocorrélation $K_X(\tau)$ et de représentation spectrale $\Theta_X(\omega)$ vérifiant [2] :

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} d\Theta_X(\omega) \quad (1)$$

$$K_X(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega\tau} dS_X(\omega) \quad (2)$$

Une version de ce signal soumis à un changement d'horloge est donnée par :

$$U(t) = X(t - A(t)) \quad (3)$$

où les processus $A(t)$ et $X(t)$ sont indépendants. $A(t)$ est stationnaire dans le sens où les deux fonctions caractéristiques, $\Psi(\omega)$ et $\Phi(\tau, \omega)$, définies par :

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= E \{ e^{i\omega A(t)} \} \\ \Phi(\tau, \omega) &= E \{ e^{i\omega(A(t) - A(t+\tau))} \} \end{aligned} \quad (4)$$

sont indépendantes de t . La décomposition de $U(t)$ présentée dans [1] s'écrit :

$$U(t) = G(t) + V(t) \quad (5)$$



où les deux processus, $G(t)$ et $V(t)$ sont orthogonaux et $G(t)$ est défini comme le résultat du filtrage linéaire de $X(t)$ par le filtre de réponse fréquentielle (en général complexe) $\Psi^*(\omega)$:

$$G(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\omega t} \Psi^*(\omega) d\Theta_X(\omega) \quad (6)$$

La meilleure reconstruction linéaire du processus $X(t)$ (au sens des moindres carrés) à partir de l'observation de $U(t)$, est la projection de $X(t)$ sur l'espace de Hilbert engendré par U . Si V est nul, ceci correspond au filtrage de $U(t)$ par le filtre inverse $\Psi^{*-1}(\omega)$, sous réserve que $\Psi(\omega)$ n'ait pas de zéros sur le support fréquentiel de $X(t)$. On remarque que, dans ce cas, la reconstruction s'effectue sans erreur.

3. SYSTÈMES ÉCHANTILLONNÉS

Le développement ci-dessus est valable pour des signaux à temps continu. Néanmoins, des équivalents en temps discret existent. Nous définissons d'abord le signal échantillonné comme suit :

$$U_n = X(n - A_n) \quad (7)$$

Les deux fonctions caractéristiques sont redéfinies :

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= E \{ e^{i\omega A_n} \} \\ \Phi(p, \omega) &= E \{ e^{i\omega(A_n - A_{n+p})} \} \quad p \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (8)$$

Comme dans le cas continu, on définit la suite G_n comme le résultat d'un filtrage linéaire :

$$G_n = \int_{\mathbf{R}} e^{i\omega n} \Psi^*(\omega) d\Theta_X(\omega) \quad (9)$$

et la suite V_n comme le signal d'erreur :

$$V_n = U_n - G_n \quad (10)$$

Alors les deux processus G_n et V_n sont orthogonaux et les considérations ci-dessus restent valables. Dans la suite, nous limiterons l'analyse aux signaux à temps continu, même si les résultats sont valables également pour des systèmes échantillonnés.

4. DÉFINITION DU CODEUR

Nous proposons de coder le signal transmis par l'introduction contrôlée d'un changement d'horloge gaussien. Le jitter est un bruit blanc gaussien, filtré

par $H(\omega - \omega_0)$, où $H(\omega)$ est la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas tel que :

$$H(\omega) = 0 \quad \forall \omega \notin \left(-\frac{\omega_H}{2}, \frac{\omega_H}{2} \right) \quad (11)$$

Ces opérations sont indiquées par la figure 1.

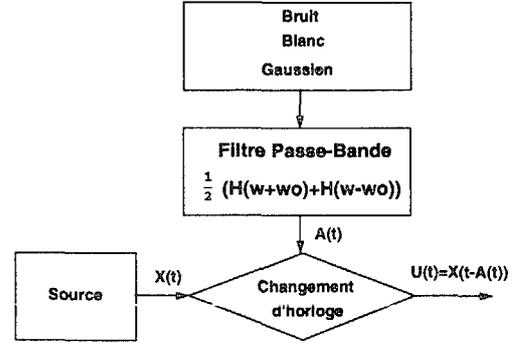


Figure 1 : structure du codeur

Puisque le processus $A(t)$ est gaussien, les fonctions caractéristiques définies par (4) peuvent être exprimées en fonction des paramètres du processus :

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= \exp \left(-\frac{\omega^2 \sigma^2}{2} \right) \\ \Phi(\tau, \omega) &= \exp \left(-\omega^2 \sigma^2 (1 - \rho(\tau)) \right) \\ &= \Psi^2(\omega) \exp \left(\omega^2 \sigma^2 \rho(\tau) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

où σ^2 est la variance et $\rho(\tau)$ la fonction d'autocorrélation normalisée du processus $A(t)$. Cette dernière peut être exprimée en fonction du filtre $H(\omega)$:

$$\rho(\tau) = h(\tau) \cos(\omega_0 \tau) \quad (13)$$

où $h(\tau)$ est la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas, c'est-à-dire la transformée de Fourier inverse de $H(\omega)$. La fonction d'autocorrélation de $U(t)$, définie par :

$$\begin{aligned} K_U(\tau) &= E \{ U(t) U^*(t - \tau) \} \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{i\omega \tau} \Phi^*(\tau, \omega) dS_X(\omega) \end{aligned} \quad (14)$$

peut donc s'écrire :

$$K_U(\tau) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\omega \tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k(\tau) (\omega \sigma)^{2k}}{k!} \Psi^2(\omega) dS_X(\omega) \quad (15)$$



En prenant la transformée de Fourier de (15), nous trouvons la densité spectrale de $U(t)$:

$$dS_U(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma^{2k}}{k!} \Gamma_k(\omega) \otimes \omega^{2k} \Psi^2(\omega) dS_X(\omega) \right) \quad (16)$$

où $\Gamma_k(\omega)$ est la transformée de Fourier de $\rho^k(\tau)$. Nous remarquons que pour tout k impair, $\Gamma_k(\omega)$ a des composantes centrées aux fréquences ω dans l'ensemble I_k avec :

$$I_k = \{\omega, \omega = (2p+1)\omega_0 \text{ avec } |2p+1| \leq k\} \quad (17)$$

De même, pour tout k pair, les composantes se trouvent aux fréquences ω dans l'ensemble P_k avec :

$$P_k = \{\omega, \omega = 2p\omega_0 \text{ avec } |2p| \leq k\} \quad (18)$$

L'équation (16) montre que l'effet du jitter a été de reproduire le spectre de $X(t)$ autour des multiples entiers de ω_0 . Avec un choix convenable du filtre $H(\omega)$ et de la fréquence ω_0 , ces reproductions peuvent être séparées dans le domaine spectrale.

5. RECONSTRUCTION

Pour $k=0$, la puissance centrée autour de $\omega=0$, est donnée par :

$$dS_{U0}(\omega) = \Psi(\omega)^2 dS_X(\omega) \quad (19)$$

On remarque que ce spectre est identique au spectre de $G(t)$ [3].

De plus, le signal passe-bas est la somme des termes venant de tout les k pairs dans l'équation (16). Puisque $\rho(\tau)$ est normalisé, $\Gamma_k(\omega)$ est majoré par l'unité et sa largeur de bande est $k\omega_H$. Pour une source à bande limitée et normalisée, c'est-à-dire :

$$dS_X(\omega) = 0 \quad \forall \omega \notin \left(-\frac{\omega_C}{2}, \frac{\omega_C}{2} \right) \quad (20)$$

la puissance autour de $\omega=0$ dans la bande de la source est majorée par (sous réserve que $\omega_H > \omega_C$) :

$$M_k = \frac{\sigma^{2k}}{\omega_C k!} \int_{-\frac{\omega_C}{2}}^{\frac{\omega_C}{2}} \omega^{2k} \Psi^2(\omega) d\omega \quad (21)$$

L'évaluation de (21) pour $\sigma^2 = 1$ montre que les termes interférant sont négligeables ($M_k < 0.01$) pour $\omega_C < 0.5$. Donc, pour une source à bande limitée à $\omega_C < 0.5$, seule $dS_{U0}(\omega)$ joue un rôle dans $dS_U(\omega)$ autour de $\omega=0$.

Comme les deux composantes de la décomposition sont orthogonales, on peut donc conclure que l'effet du jitter a été de séparer $G(t)$ et $V(t)$ dans des bandes fréquentielles différentes, avec $G(t)$ dans la bande inférieure et $V(t)$ dans les bandes supérieures. La reconstruction de $X(t)$ est donc possible (avec une erreur faible) par le filtrage inverse de l'énergie centrée autour de $\omega=0$. Cette opération suppose la connaissance de la fréquence ω_0 et de la fonction caractéristique $\Psi(\omega)$.

Rappelons qu'une condition pour une reconstruction sans erreur, mentionnée dans la section 2, est que $\Psi(\omega)$ ne s'annule pas sur le support fréquentiel de $X(t)$. Nous remarquons que cette condition est automatiquement remplie, puisque la fonction caractéristique d'un processus gaussien est une gaussienne.

Il est à noter qu'avec un système échantillonné, la somme infinie de composantes spectrales entraîne des problèmes de repliement. Quand la fréquence de l'échantillonnage est suffisamment élevée, cet effet peut être négligé.

6. EXEMPLES DE SIMULATION

Afin d'illustrer ce principe de codage par échantillonnage gaussien, on prend un signal $N.R.Z$ de 20 bits, avec $\omega_0 = 0.15\pi$ et $H(\omega)$ un filtre Butterworth de largeur $\omega_H = \frac{\omega_0}{2}$. La figure 2 montre la densité spectrale d'une réalisation de ce processus, où nous voyons sans mal l'apparition des nouvelles composantes spectrales.

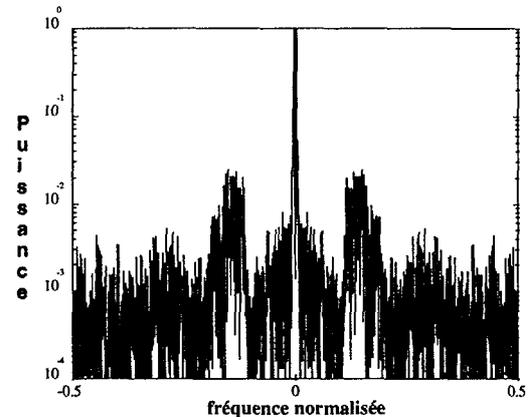


Figure 2 : densité spectrale après jitter

On montre l'effet du jitter en étudiant le signal codé et le processus reconstruit pour différentes



valeurs de σ^2 . La première figure montre le signal original.

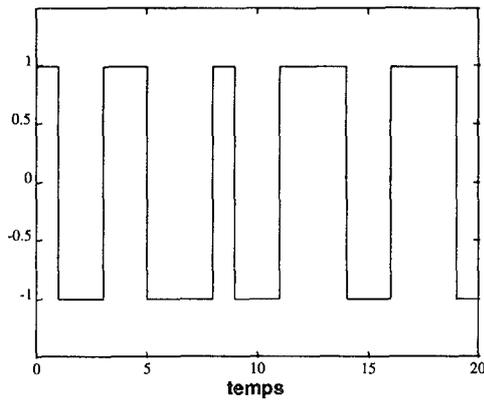


Figure 3 : signal original

Les figures 4 et 5 montrent le signal codé et la reconstruction pour $\sigma^2 = \frac{1}{9}$.

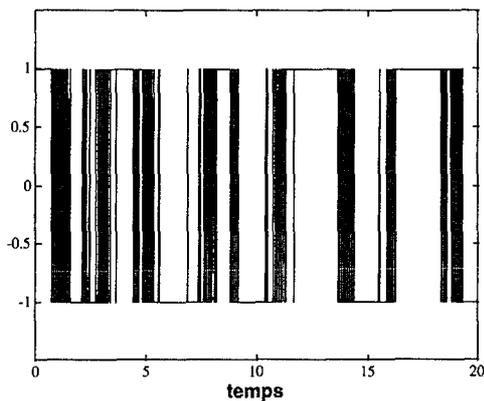


Figure 4 : signal codé - $\sigma^2 = \frac{1}{9}$

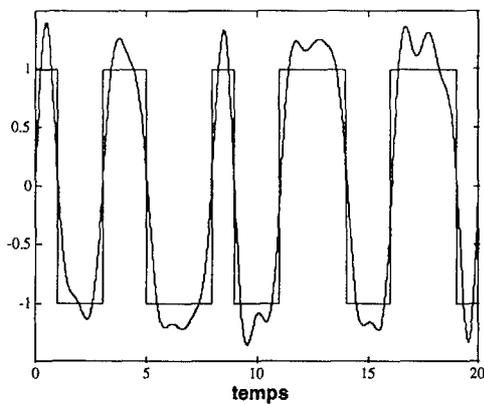


Figure 5 : signal reconstruit - $\sigma^2 = \frac{1}{9}$

Les figures montrent que, lorsque la variance du jitter est faible, le processus reconstruit correspond bien au signal de départ. Par contre, l'effet

du codage est faible dans la mesure où il est possible de repérer la séquence des bits à partir de l'observation de signal transmis. En augmentant la variance à $\sigma^2 = \frac{1}{3}$ on obtient un codage plus fort (figure 6), ce qui implique bien sûr une erreur de reconstruction plus élevée.

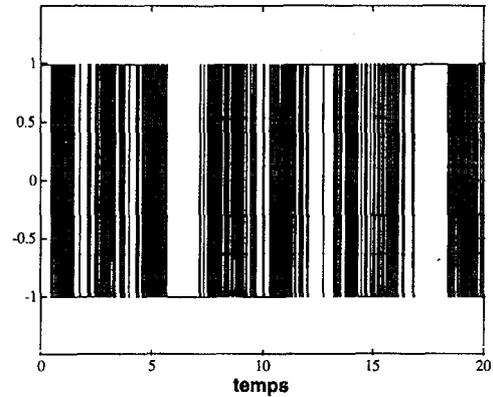


Figure 6 : signal codé - $\sigma^2 = \frac{1}{3}$

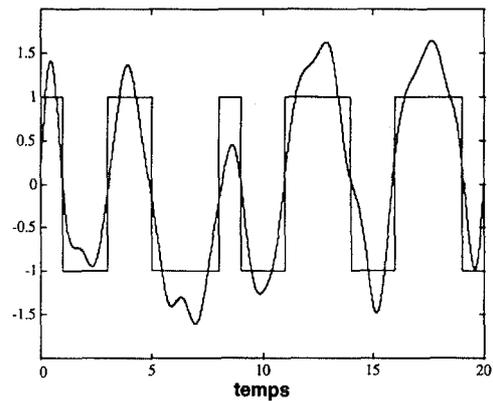


Figure 7 : signal reconstruit - $\sigma^2 = \frac{1}{3}$

7. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté une méthode de codage basée sur un changement d'horloge gaussien. On a vu que, si les paramètres sont bien définis, la reconstruction avec une faible erreur est possible.

8. REFERENCES

- [1] B.Lacaze, *Une décomposition des processus stationnaires à variation d'horloge*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 313, Série I, p. 973-976, 1991
- [2] J.L.Doob, *Stochastic processes*, Wiley 1953
- [3] A.Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, MacGraw Hill, 1965