

RESTAURATION ENSEMBLISTE D'IMAGES PAR ITÉRATIONS PARALLÈLES EXTRAPOLÉES DE SOUS-GRADIENTS*

P. L. Combettes

Department of Electrical Engineering
City College and Graduate School
City University of New York
New York, NY 10031, USA.

RÉSUMÉ

D'un point de vue mathématique, résoudre un problème d'estimation ensembliste revient à chercher un point commun à une famille de sous-ensembles convexes d'un espace hilbertien. La méthode des projections successives a été utilisée dans la vaste majorité des problèmes de restauration et de reconstruction ensembliste d'images. Elle converge cependant lentement et requiert de surcroît le calcul de projections exactes à chaque itération, ce qui est très coûteux numériquement. On introduit dans cette communication un nouvel algorithme qui emploie en parallèle les sous-gradients associés aux divers ensembles et converge rapidement grâce à ses sur-relaxations extrapolées. Cet algorithme est simple à mettre en œuvre et nettement plus avantageux numériquement que les méthodes existantes.

ABSTRACT

From a mathematical standpoint, solving a set theoretic estimation problem reduces to finding a common point of convex sets in a Hilbert space. The method of successive projections has been used in the vast majority of set theoretic image restoration and reconstruction problems. It nonetheless suffers from slow convergence and, in addition, requires the computation of exact projections at each iteration, which constitutes a significant computational burden. In this paper we introduce a new algorithm which uses the subgradients associated with the sets in parallel and converges very efficiently thanks to its extrapolated overrelaxations. The implementation of this algorithm is straightforward and it converges much faster than existing methods.

INTRODUCTION

En restauration (ou reconstruction) ensembliste l'image à estimer, h , appartient à un espace hilbertien Ξ dans lequel elle est décrite par une famille de contraintes

$$(\forall i \in I) \quad g_i(h) \leq 0, \quad (1)$$

où les fonctionnelles $(g_i)_{i \in I}$ sont semi-continues inférieurement et convexes [6, 16, 18]. Ces contraintes peuvent porter sur h elle-même ou bien sur une de ses transformées (Fourier, Radon, ondelettes), sur le processus de formation de l'image, sur le bruit, etc. Le problème est de trouver une image satisfaisant toutes les contraintes. On définit une famille de convexes fermés par

$$(\forall i \in I) \quad S_i = \{a \in \Xi \mid g_i(a) \leq 0\}, \quad (2)$$

et le problème se réduit donc à la recherche d'un point commun à ces ensembles, à savoir

$$\text{Trouver } a^* \in S = \bigcap_{i \in I} S_i. \quad (3)$$

Bien que l'approche ensembliste ait connu un essor remarquable au cours des quinze dernières années [6, 16], elle s'est reposée presque exclusivement sur la méthode des projections convexes successives «POCS»¹ pour la résolution de (3). POCS génère une suite d'images $(a_n)_{n \geq 0}$ selon la récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{n+1} = a_n + \lambda_n (P_{n \pmod{m} + 1}(a_n) - a_n), \quad (4)$$

*Recherche subventionnée par le contrat MIP-9308609 de la National Science Foundation.

¹Projections Onto Convex Sets chez les anglo-saxons.

où l'on suppose que le nombre d'ensembles $m = \text{card } I$ est fini, où P_i est l'opérateur de projection sur S_i , et où les paramètres de relaxations satisfont

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \varepsilon \leq \lambda_n \leq 2 - \varepsilon \quad \text{avec } 0 < \varepsilon < 1. \quad (5)$$

On montre que toute suite ainsi construite converge faiblement (fortement si les ensembles possèdent certaines propriétés) vers une image dans S [14]. Malgré sa popularité, POCS présente plusieurs inconvénients.

1. Elle converge lentement et il n'existe pas de règle générale pour accélérer la convergence par le choix des paramètres de relaxation.
2. Elle ne peut traiter qu'une seule contrainte par itération. Il n'est donc pas aisé de la mettre en œuvre sur une architecture à processeurs parallèles.
3. Elle nécessite le calcul de projections exactes. Ces problèmes auxiliaires sont souvent coûteux numériquement.
4. Elle n'est applicable qu'à un nombre fini de contraintes. Ceci constitue une limitation dans certains problèmes théoriques.

Le but de cette communication est d'introduire une méthode générale pour résoudre (3) qui s'affranchit des limitations de POCS. La méthode proposée emploie les sous-gradients associés aux diverses contraintes simultanément et converge rapidement grâce à ses sur-relaxations extrapolées. Elle est en outre simple à mettre en œuvre et nettement plus avantageuse numériquement que les méthodes existantes. Nos résultats théoriques sur sa convergence unifient et généralisent ceux de plusieurs algorithmes connus. Des résultats numériques sont également présentés.



PRÉLIMINAIRES

On se place dans un espace hilbertien réel Ξ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, d'une norme $\| \cdot \|$ et d'une distance d . On notera $B(a, \gamma)$ la boule fermée de centre a et de rayon γ , tL la transposée d'un opérateur $L : \Xi \rightarrow \Xi$; $\text{card } A$ le cardinal d'un ensemble A , $\mathcal{C}A$ son complémentaire, 1_A sa fonction caractéristique (i.e. $1_A(a) = 1$ si $a \in A$ et $1_A(a) = 0$ si $a \notin A$), \bar{A} son adhérence, et $\circ A$ son intérieur.

Rappelons quelques résultats d'analyse convexe [2, 12]. Soit $g : \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle et soit

$$S_\eta = \{a \in \Xi \mid g(a) \leq \eta\}, \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

sa section de niveau η . Si les sections $(S_\eta)_{\eta \in \mathbb{R}}$ sont fermées, alors g est semi-continue inférieurement (s.c.i.). Nous dirons que g est semi-bornément compacte inférieurement si pour n'importe quelle boule fermée B les ensembles $(\bar{S}_\eta \cap B)_{\eta \in \mathbb{R}}$ sont compacts. Supposons désormais que g est convexe. Le sous-différentiel de g au point a est l'ensemble de ses sous-gradients, à savoir,

$$\partial g(a) = \{t \in \Xi \mid (\forall b \in \Xi) \langle b - a \mid t \rangle \leq g(b) - g(a)\}. \quad (7)$$

Si g est s.c.i., elle est continue et donc sous-différentiable : $(\forall a \in \Xi) \partial g(a) \neq \emptyset$. Si g est Gâteaux-différentiable au point a , elle possède un sous-gradient unique en ce point que l'on note $\nabla g(a)$ et que l'on appelle gradient : $\partial g(a) = \{\nabla g(a)\}$. Si $\emptyset \neq A \subset \Xi$ est fermé et convexe, alors tout point $a \in \Xi$ admet une projection unique $P_A(a)$ sur A définie par $d(a, P_A(a)) = \min_{b \in A} d(a, b) = d(a, A)$. De plus,

$$(\forall a \in \mathcal{C}A) \quad \nabla d(a, A) = \frac{a - P_A(a)}{\|a - P_A(a)\|}. \quad (8)$$

ALGORITHME

Projections sous-différentielles. Comme on l'a vu plus haut, un inconvénient des algorithmes classiques de projection est que le calcul des projections est délicat quand les ensembles n'ont pas une forme géométrique simple (hyperplan, demi-espace, boule, etc.). Nous nous proposons ici de remplacer, à l'itération n , la projection exacte de $a_n \in \mathcal{C}S_i$ sur le convexe S_i par la projection $P_{i,n}(a_n)$ de a_n sur un demi-espace affine fermé $S_{i,n}$ contenant S_i mais pas a_n . D'après (7), nous pouvons explicitement définir ce demi-espace par

$$S_{i,n} = \{a \in \Xi \mid \langle a_n - a \mid t_{i,n} \rangle \geq g_i(a_n)\}, \quad t_{i,n} \in \partial g_i(a_n). \quad (9)$$

On vérifiera sans peine que $a_n \notin S_i \Rightarrow a_n \notin S_{i,n}$ et $S_i \subset S_{i,n}$, et que la projection $P_{i,n}(a_n)$ sur $S_{i,n}$, appelée projection sous-différentielle, est donnée par

$$P_{i,n}(a_n) = \begin{cases} a_n - \frac{g_i(a_n)}{\|t_{i,n}\|^2} t_{i,n} & \text{si } a_n \notin S_i, \\ a_n & \text{si } a_n \in S_i. \end{cases} \quad (10)$$

Ainsi, seul le calcul d'un sous-gradient $t_{i,n}$ est nécessaire pour traiter la contrainte $g_i(a_n) \leq 0$ au lieu de la projection exacte $P_i(a_n)$. On a donc «linéarisé» le problème non linéaire de la projection. Bien sûr, quand la projection exacte est facile à calculer, on peut prendre $g_i = d(\cdot, S_i)$ et (10) donne alors $P_i(a_n)$ grâce à (8). La notion de projection sous-différentielle est donc une extension de celle de projection.

Algorithme. On se donne $a_0 \in \Xi$, $C \in \mathbb{N}^*$, $\delta \in]0, 1/C[$, $\varepsilon \in]0, 1[$, et on définit la récurrence :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{n+1} = a_n + \lambda_n \left(\sum_{i \in I_n} w_{i,n} P_{i,n}(a_n) - a_n \right), \quad (11)$$

où à chaque itération n :

(a) La famille I_n des indices des ensembles sélectionnés vérifie

$$\emptyset \neq I_n \subset I \quad \text{et} \quad \text{card} \{i \in I_n \mid a_n \notin S_i\} \leq C; \quad (12)$$

(b) Les projections sous-différentielles $(P_{i,n}(a_n))_{i \in I_n}$ sont définies par (10);

(c) Les poids $(w_{i,n})_{i \in I_n}$ vérifient

$$\sum_{i \in I_n} w_{i,n} = 1 \quad \text{et} \quad (\forall i \in I_n) \quad w_{i,n} \geq \delta 1_{\mathcal{C}S_i}(a_n); \quad (13)$$

(d) Le paramètre de relaxation vérifie $\lambda_n \in [\varepsilon, (2 - \varepsilon)L_n]$, où

$$L_n = \begin{cases} \frac{\sum_{i \in I_n} w_{i,n} \|P_{i,n}(a_n) - a_n\|^2}{\left\| \sum_{i \in I_n} w_{i,n} P_{i,n}(a_n) - a_n \right\|^2} & \text{si } a_n \notin \bigcap_{i \in I_n} S_i, \\ 1 & \text{si } a_n \in \bigcap_{i \in I_n} S_i. \end{cases} \quad (14)$$

Remarques.

1. L'algorithme (11)-(14) est une généralisation des algorithmes de projection de [4, 9, 13, 14, 15] et des algorithmes de projection sous-différentielle de [3, 5, 11].
2. La suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définit les blocs d'ensembles balayés à chaque itération. Le balayage est statique si $(\forall n \in \mathbb{N}) I_n = I$ (tous les ensembles sont invoqués à chaque itération), admissible s'il existe $(M_i)_{i \in I} \subset \mathbb{N}^*$ tels que $(\forall (i, n) \in I \times \mathbb{N}) i \in \bigcup_{k=n}^{n+M_i-1} I_k$ (S_i est invoqué au moins une fois au cours de tout cycle de M_i itérations consécutives), et chaotique si $I = \limsup_{n \rightarrow +\infty} I_n$ (chaque ensemble est invoqué infiniment souvent). On a : statique \Rightarrow admissible \Rightarrow chaotique. Finalement, si on prend $(\forall n \in \mathbb{N}) \text{card } I_n = 1$, on obtient un algorithme sériel.
3. L'algorithme (11)-(14) permet l'emploi simultané de plusieurs ensembles puisque l'on fait la moyenne des projections sous-différentielles. D'un point de vue numérique, il peut efficacement être mis en œuvre en adaptant, par le choix des blocs d'ensembles, la charge de calcul de chaque itération à la puissance des processeurs parallèles dont on dispose.
4. En vertu de la convexité de $\| \cdot \|$, on a $L_n \geq 1$. Le mode de relaxation (d) comprend donc à la fois la condition standard (5) employée dans la plupart des travaux [3, 4, 5, 9, 14] et la condition $\varepsilon \leq \lambda_n \leq L_n$ employée dans [15]. L'intérêt pratique de cette extension est d'autoriser l'emploi de sur-relaxations extrapolées qui accélèrent très nettement l'algorithme, comme nous le verrons dans les simulations. Notons que pour les algorithmes sériels on a $L_n = 1$ et on ne peut extrapoler les relaxations au-delà de 2; c'est notamment le cas de POCS.
5. Un mode de relaxation semblable à (d) a été utilisé dans [7], où l'on s'intéressait à la construction d'un point fixe commun à une famille de contractions fermes.

CONVERGENCE

On rappelle que la famille $(S_i)_{i \in I}$ est finie ou dénombrable et qu'elle est définie par (2), où $(g_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctionnelles convexes et s.c.i. Nous dirons que les sous-différentiels de $(g_i)_{i \in I}$ sont localement uniformément bornés si

$$(\forall \gamma \in \mathbb{R}_+^*) (\exists \zeta \in \mathbb{R}_+^*) (\forall i \in I) (\forall a \in B(0, \gamma)) \partial g_i(a) \subset B(0, \zeta). \quad (15)$$

Théorème 1. [8] Supposons que les sous-différentiels de $(g_i)_{i \in I}$ soient localement uniformément bornés. Alors, toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par (11)-(14) avec balayage admissible converge faiblement vers un élément de S . \square

Théorème 2. [8] Supposons que les sous-différentiels de $(g_i)_{i \in I}$ soient localement uniformément bornés. Alors, toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par (11)-(14) avec balayage chaotique converge fortement vers un élément de S si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- (i) $\overset{\circ}{S} \neq \emptyset$;
- (ii) $\text{card } I < +\infty$ et l'une des fonctionnelles est semi-bornément compacte inférieurement. \square

Les Théorèmes 1 et 2 généralisent les résultats de [3, 4, 9, 14, 15] sur la convergence des méthodes de type (11).

Dans les applications numériques pratiques, le nombre de contraintes est fini ainsi que la dimension de l'espace Ξ des images et on utilisera le corollaire suivant du Théorème 2(ii). Il généralise les résultats de [5] (une version «sous-gradient» de POCS) et de [11] (où le balayage est statique).

Corollaire 1. Supposons que $\dim \Xi < +\infty$ et $\text{card } I < +\infty$. Alors, toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par (11)-(14) avec balayage chaotique converge vers un élément de S . \square

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Nous reprenons ici un exemple de restauration numérique d'image similaire à celui présenté dans [17]. Les images sont de taille $N \times N$, où $N = 128$. On se place donc dans l'espace euclidien usuel \mathbb{R}^{N^2} .

L'image originale est dégradée par convolution avec un noyau uniforme ℓ de taille 9×9 et addition d'un bruit u (cf. Figure 1). L'image dégradée s'écrit donc $x = Lh + u$, où L est la matrice Toeplitz par blocs associée au noyau ℓ . Le rapport image convoluée-sur-bruit est de 35dB. On doit estimer h à partir de x et d'informations à priori sur h , ℓ , et u . L'ensemble S des solutions est défini à partir de trois contraintes. Nous utiliserons tout d'abord l'ensemble $S_1 = (\mathbb{R}_+)^{N^2}$ associé à la contrainte de positivité. Nous supposons ensuite que la transformée de Fourier discrète (TFD) $\mathcal{F}(h) = \hat{h}$ de h est connue sur un quart de son support pour les fréquences basses. L'ensemble correspondant est $S_2 = \{a \in \Xi \mid \hat{a}1_K = \hat{h}1_K\}$, où K contient les couples d'indices $\{0, \dots, N/8 - 1\}^2$ ainsi que les indices résultant des symétries de la TFD bi-dimensionnelle réelle. On montre aisément que les projections d'une image a_n sur S_1 et S_2 s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} P_1(a_n) = \dagger[\max\{0, a_n^{(i)}\}]_{0 \leq i \leq N^2-1} \triangleq P_{1,n}(a_n), \\ P_2(a_n) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{h}1_K + \widehat{a_n}1_{\mathcal{C}_K}) \triangleq P_{2,n}(a_n). \end{cases} \quad (16)$$



Figure 1 : Image originale, image dégradée et image restaurée (de haut en bas).

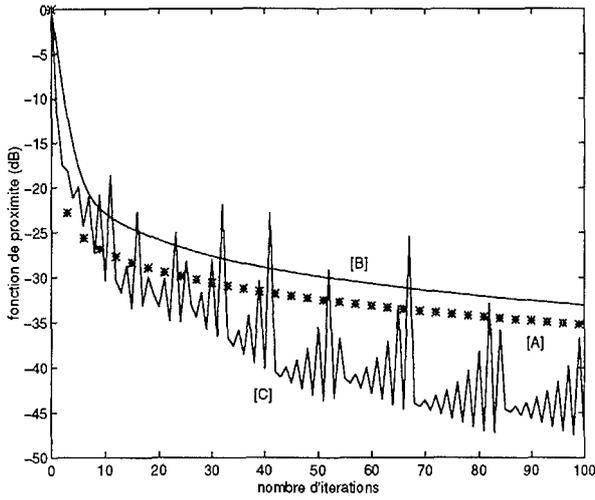


Figure 2 : Convergence des algorithmes.

([A] : POCS, [B] : SIRT, [C] : méthode proposée.)

Nous supposons enfin que les composantes du vecteur u sont indépendantes et distribuées comme une variable aléatoire U dont on connaît les moments $E|U|^2$ et $E|U|^4$. En imposant un niveau de confiance de 95% sur cette contrainte, on aboutit à l'ensemble [10]

$$\begin{cases} S_3 = \{a \in \Xi \mid \|x - La\|^2 \leq \rho\} \\ \rho = N^2 E|U|^2 + 1.96N \sqrt{E|U|^4 - E^2|U|^2} \end{cases} \quad (17)$$

Cet ensemble s'est avéré très utile dans de nombreuses applications. Malheureusement, son opérateur de projection doit être déterminé par une procédure itérative coûteuse [17]. En revanche, en utilisant (10) et le fait que $\nabla g_3(a_n) = \nabla(\|x - La_n\|^2 - \rho) = -2 {}^t L(x - La_n)$, on invoque simplement cet ensemble à l'itération n par le biais de la projection sous-différentielle

$$P_{3,n}(a_n) = \begin{cases} a_n + \frac{\|r_n\|^2 - \rho}{2\|{}^t L r_n\|^2} {}^t L r_n & \text{si } \|r_n\|^2 > \rho, \\ a_n & \text{si } \|r_n\|^2 \leq \rho, \end{cases} \quad (18)$$

où $r_n = x - La_n$. En utilisant une procédure standard [1], on calcule cette expression efficacement dans le domaine fréquentiel grâce à la transformation de Fourier rapide, ce qui donne

$$P_{3,n}(a_n) = \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{a}_n + \frac{\|\widehat{r}_n\|^2 - N^2 \rho}{2\|\widehat{\ell} \widehat{r}_n\|^2} \widehat{\ell} \widehat{r}_n \right), \quad (19)$$

où $\widehat{r}_n = \widehat{x} - \widehat{\ell} \widehat{a}_n$. Notons que le calcul exact de $P_3(a_n)$ proposé dans [17] requiert une vingtaine d'itérations de coût numérique supérieur à celui de (19).

Trois algorithmes sont comparés :

- [A] L'algorithme POCS (4) avec $(\forall n \in \mathbb{N}) \lambda_n = 1$;
- [B] L'algorithme SIRT [13] : $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} = \sum_{i=1}^3 P_i(a_n)/3$;
- [C] L'algorithme (11)-(14) où $(\forall n \in \mathbb{N}) I_n = I, \lambda_n = L_n, w_{i,n} = 1/3$.

Dans chaque cas on initialise avec $a_0 = x$ et on utilise les cent premières valeurs de la fonction de proximité normalisée, i.e.

$$\left(10 \log_{10} \frac{\sum_{i=1}^3 d(a_n, S_i)^2}{\sum_{i=1}^3 d(a_0, S_i)^2} \right)_{0 \leq n \leq 100}, \quad (20)$$

pour évaluer la progression des algorithmes vers une solution (cf. Figure 2). On observe tout d'abord que POCS est plus rapide que SIRT. Ceci montre que, contrairement à une opinion très répandue, une méthode de projection parallèle n'est pas forcément plus rapide qu'une méthode sérielle. On remarque surtout que la méthode proposée est bien plus rapide que POCS et SIRT : d'une part elle converge en un nombre d'itérations moindre grâce à ses relaxations extrapolées; d'autre part ces itérations sont peu coûteuses puisqu'elles utilisent la projection sous-différentielle (19) pour invoquer S_3 au lieu de la projection exacte requise par POCS et SIRT.

L'image obtenue au bout de cent itérations de la méthode [C] apparaît au bas de la Figure 1.

RÉFÉRENCES

- [1] H. C. Andrews and B. R. Hunt, *Digital Image Restoration*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977.
- [2] J.-P. Aubin, *L'Analyse Non Linéaire et Ses Motivations Économiques*. Paris: Masson, 1984.
- [3] H. H. Bauschke and J. M. Borwein, "On projection algorithms for solving convex feasibility problems," à paraître dans *SIAM Rev.*
- [4] F. E. Browder, "Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces," *Math. Z.*, vol. 100, pp. 201-225, Juil. 1967.
- [5] Y. Censor and A. Lent, "Cyclic subgradient projections," *Math. Programming*, vol. 24, pp. 233-235, 1982.
- [6] P. L. Combettes, "The foundations of set theoretic estimation," *Proc. IEEE*, vol. 81, pp. 182-208, Fév. 1993.
- [7] P. L. Combettes, "Construction d'un point fixe commun à une famille de contractions fermes," *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, vol. 320, pp. 1385-1390, Juin 1995.
- [8] P. L. Combettes, "Convex set theoretic image recovery by extrapolated iterations of parallel subgradient projections." Rapport de recherche, City University of New York, 1994 (soumis).
- [9] P. L. Combettes and H. Puh, "Iterations of parallel convex projections in Hilbert spaces," *Numer. Funct. Anal. Optim.*, vol. 15, pp. 225-243, 1994.
- [10] P. L. Combettes and H. J. Trussell, "The use of noise properties in set theoretic estimation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 39, pp. 1630-1641, Juil. 1991.
- [11] L. T. Dos Santos, "A parallel subgradient projections method for the convex feasibility problem," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 18, pp. 307-320, Juin 1987.
- [12] I. Ekeland and R. Temam, *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels*. Paris: Dunod, 1974.
- [13] P. Gilbert, "Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections," *J. Theoretical Biol.*, vol. 36, pp. 105-117, Juil. 1972.
- [14] L. G. Gurin (Gubin), B. T. Polyak, and E. V. Raik, "The method of projections for finding the common point of convex sets," *USSR Comput. Math. and Math. Phys.* vol. 7, pp. 1-24, 1967.
- [15] N. Ottavy, "Strong convergence of projection-like methods in Hilbert spaces," *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 56, pp. 433-461, Mar. 1988.
- [16] H. Stark (Editor), *Image Recovery: Theory and Application*. San Diego, CA: Academic Press, 1987.
- [17] H. J. Trussell and M. R. Civanlar, "The feasible solution in signal restoration," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. 32, pp. 201-212, Apr. 1984.
- [18] D. C. Youla and H. Webb, "Image restoration by the method of convex projections: Part 1 - theory," *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. 1, pp. 81-94, Oct. 1982.