

## UN ALGORITHME DES MOINDRES CARRÉS À FENÊTRE GLISSANTE GÉNÉRALISÉE: Le GSW RLS

Karim Maouche

Dirk T. M. Slock

Institut EURECOM, 2229 route des Crêtes, B.P. 193, 06904, Sophia Antipolis Cedex, FRANCE

### RÉSUMÉ

Nous présentons un nouvel algorithme des moindres carrés récursif (RLS): le GSW RLS. Cet algorithme utilise une fenêtre généralisée constituée d'une fenêtre exponentielle pour les  $L$  données les plus récentes puis d'une fenêtre exponentielle de même facteur d'oubli mais atténuée pour le reste des données. Nous donnons l'analyse asymptotique au second ordre pour deux types de variations du canal (marche aléatoire et processus autoregressif d'ordre 1) et nous prouvons que le GSW RLS possède une meilleure capacité de poursuite que les algorithmes RLS classiques.

### ABSTRACT

We derive a new RLS algorithm: the GSW RLS algorithm. This algorithm uses a generalized window which consists of an exponential decay for the first  $L$  lags and the same but attenuated exponential window for the rest of the data. We analyze the steady-state EMSE with two kind of variations for the time-varying optimal filter coefficients (random walk and autoregressive process of order 1) and prove that the new algorithm performs a better tracking than the classical RLS algorithms.

## 1 INTRODUCTION

Dans l'état de l'art actuel, deux types de fenêtres sont utilisés dans les algorithmes des moindres carrés récursifs : La fenêtre exponentielle (algorithme WRLS) et la fenêtre rectangulaire (SWC RLS). L'algorithme SWC RLS poursuit mieux les variations brusques d'un système variable dans le temps. Ceci s'explique intuitivement par le fait que la fenêtre rectangulaire permet d'oublier le passé de façon plus prononcée que ne le fait la fenêtre exponentielle. Par ailleurs, l'algorithme de projection affine (AP) qui a été récemment introduit possède une meilleure capacité de poursuite que celle des algorithmes RLS. Cette supériorité vient du fait que cet algorithme utilise une fenêtre rectangulaire de taille plus courte que la taille du filtre. L'algorithme AP résout un système d'équations sous-déterminé alors que les algorithmes du type RLS résolvent un système d'équations sur-déterminé. La capacité de poursuite est d'autant meilleure que cette fenêtre est courte mais il y a une limitation à ce raisonnement car la vitesse de convergence de l'algorithme devient plus faible lorsque la taille  $L$  de la fenêtre diminue. Il est bien par exemple connu que la vitesse de convergence du NLMS (algorithme AP avec  $L = 1$ ) est mauvaise pour un signal d'entrée corrélé. D'autre part, l'algorithme AP peut donner de mauvais résultats à cause du phénomène d'amplification de bruit dont l'origine est le mauvais conditionnement de la matrice de covariance d'ordre  $L$  estimée sur une fenêtre de taille  $N$  ( $N$  est l'ordre du filtre).

Dans ce papier, nous présentons un nouvel algorithme RLS: le GSW RLS qui généralise les algorithmes WRLS et SWC RLS. Cet algorithme utilise une fenêtre généralisée composée d'une fenêtre exponentielle pour les  $L$  données les plus récentes puis d'une autre fenêtre exponentielle de même facteur d'oubli, atténuée par un facteur  $1-\alpha$ . Avec cette nouvelle fenêtre, il devient possible d'approcher la capacité de poursuite de l'algorithme AP ( $L$  peut être plus faible que l'ordre du filtre), tout en gardant la convergence du type RLS (l'algorithme résout un système d'équations sur-déterminé). De plus, le problème de l'amplification de bruit est résolu à cause de la queue exponentielle de la fenêtre. L'algorithme GSW RLS a la même structure et complexité que le SWC RLS. Nous en présentons une version rapide numériquement stabilisée. Par la suite, nous donnons les résultats d'analyse asymptotique au second ordre dans les cas où le canal varie selon un modèle de marche aléatoire ou selon un processus autorégressif d'ordre 1 (AR(1)) et dans le cas où le signal d'entrée est un bruit blanc Gaussien. Ces analyses montrent la supériorité en terme de capacité de poursuite de la fenêtre généralisée. Elles font ressortir aussi, la supériorité de la fenêtre exponentielle sur la fenêtre rectangulaire, ce qui de prime abord constitue un résultat étonnant.

## 2 L'ALGORITHME GSW RLS

Le filtre transverse adaptatif  $W_{N,k}$  forme une combinaison linéaire des  $N$  échantillons consécutifs du signal d'entrée



$\{x(i-n), n = 0, \dots, N-1\}$  pour approximer l'opposé du signal désiré  $d(i)$ . Le signal d'erreur résultant est donné par

$$\epsilon_N(i|k) = d(i) + W_{N,k} X_N(i) = d(i) + \sum_{n=0}^{N-1} W_{N,k}^{n+1} x(i-n) \quad (1)$$

où  $X_N(i) = [x^H(i) x^H(i-1) \dots x^H(i-N+1)]^H$  est le vecteur de régression et  $^H$  l'opérateur de transposition et conjugaison complexe. Dans l'algorithme RLS, les  $N$  coefficients du filtre  $W_{N,k} = [W_{N,k}^1 \dots W_{N,k}^N]$  sont adaptés de manière à minimiser récursivement le critère des moindres carrés suivant

$$\xi_N(k) = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \|\epsilon_N(i|k)\|^2, \quad (2)$$

où  $\lambda \in (0, 1]$  est le facteur d'oubli exponentiel,  $\|v\|_\lambda^2 = v \Lambda v^H$ ,  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_F$ . D'un autre côté, l'algorithme SWC RLS minimise récursivement le critère suivant

$$\xi_{N,L}(k) = \sum_{i=k-L+1}^k \lambda^{k-i} \|\epsilon_N(i|k)\|^2, \quad (3)$$

où la longueur  $L$  de la fenêtre rectangulaire doit être plus grande que l'ordre du filtre, auquel cas, la matrice de covariance du signal d'entrée est inversible. Considérons maintenant le critère associé à la fenêtre généralisée  $w_i$ :

$$\xi_{N,L}(k) = \sum_{i=1}^k w_{k-i} \|\epsilon_N(i|k)\|^2, \quad w_i = \begin{cases} \lambda^i & 0 \leq i \leq L \\ (1-\alpha)\lambda^i & i > L \end{cases} \quad (4)$$

Ce nouveau critère généralise les critères des algorithmes RLS et SWC RLS. En effet, nous retrouvons le critère du RLS (2) à partir de (4) en prenant  $\alpha = 0$  et celui du SWC RLS (3) à partir de (4) quand  $\alpha = 1$  et  $\lambda = 1$ .

Soit  $W_{N,L,k}$  le filtre optimal calculé pour la nouvelle fenêtre, la minimisation de (4) donne

$$W_{N,L,k} = -P_{N,L,k}^H R_{N,L,k}^{-1}, \quad (5)$$

où

$$R_{N,L,k} = (1-\alpha) \sum_{i=1}^{k-L} \lambda^{k-i} X_N(i) X_N^H(i) + \sum_{i=k-L+1}^k \lambda^{k-i} X_N(i) X_N^H(i) \\ P_{N,L,k} = (1-\alpha) \sum_{i=1}^{k-L} \lambda^{k-i} X_N(i) d^H(i) + \sum_{i=k-L}^k \lambda^{k-i} X_N(i) d^H(i), \quad (6)$$

sont respectivement la matrice de covariance et le vecteur d'intercorrélations échantillons qui vérifient les récurrences

$$R_{N,L+1,k} = \lambda R_{N,L,k-1} + X_N(k) X_N^H(k) \\ = R_{N,L,k} - \alpha \lambda^L X_N(k-L) X_N^H(k-L) \quad (7)$$

$$P_{N,L+1,k} = \lambda P_{N,L,k-1} + X_N(k) d^H(k) \\ = P_{N,L,k} - \alpha \lambda^L X_N(k-L) d^H(k-L) \quad (8)$$

A partir de (7) et (8), nous utilisons 2 fois le Lemme d'Inversion Matriciel (LIM) pour arriver à une solution récursive dans le temps. Une première étape consiste en une mise à jour sur l'ordre et le temps :  $(k-1, L) \rightarrow (k, L+1)$ , étape similaire à celle du RLS classique et est suivie par une

mise à jour sur l'ordre  $(k, L+1) \rightarrow (k, L)$ .

En utilisant (5) et (8), on a

$$W_{N,L,k} R_{N,L,k} = W_{N,L+1,k} R_{N,L+1,k} - \alpha \lambda^L d(k-L) X_N^H(k-L). \quad (9)$$

En écrivant  $R_{N,L+1,k}$  en fonction de  $R_{N,L,k}$ , (9) devient

$$W_{N,L,k} = W_{N,L+1,k} + \alpha \lambda^L \nu_{N,L+1}(k) \tilde{D}_{N,L+1,k}, \quad (10)$$

où  $\nu_{N,L+1}(k) = d(k-L) + W_{N,L+1,k} X_N(k-L)$  et  $\tilde{D}_{N,L+1,k} = -X_N^H(k-L) R_{N,L,k}^{-1}$  sont le signal d'erreur à postériori et le gain de Kalman à priori associé. Appliquons alors le LIM à (7), nous obtenons

$$R_{N,L,k}^{-1} = R_{N,L+1,k}^{-1} - D_{N,L+1,k}^H \delta_{N,L+1}^{-1}(k) D_{N,L+1,k}, \quad (11)$$

avec  $D_{N,L+1,k} = -X_N^H(k-L) R_{N,L+1,k}^{-1}$  et  $\delta_{N,L+1}(k) = \alpha^{-1} \lambda^{-L} - D_{N,L+1,k} X_N(k-L)$  le gain de Kalman à postériori et la variable de vraisemblance. Par ailleurs, il est facile de montrer que  $\tilde{D}_{N,L+1,k} = \alpha^{-1} \lambda^{-L} \delta_{N,L+1}^{-1}(k) D_{N,L+1,k}$  et que l'erreur a priori est  $\nu_{N,L+1}^p(k) = d(k-L) + W_{N,L,k} X_N(k-L) = \alpha^{-1} \lambda^{-L} \delta_{N,L+1}^{-1}(k) \nu_{N,L+1}(k)$ . En associant les équations obtenues avec celles de la partie mise à jour sur l'ordre et le temps, nous obtenons les équations du GSW RLS

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{N,L,k} &= -\lambda^{-1} X_N^H(k) R_{N,L,k-1}^{-1} \\ \gamma_{N,L}^{-1}(k) &= 1 - \tilde{C}_{N,L,k} X_N(k) \\ \epsilon_{N,L}^p(k) &= d(k) + W_{N,L,k-1} X_N(k) \\ \epsilon_{N,L}(k) &= \epsilon_{N,L}^p(k) \gamma_{N,L}(k) \\ W_{N,L+1,k} &= W_{N,L,k-1} + \tilde{C}_{N,L,k} \epsilon_{N,L}(k) \\ R_{N,L+1,k}^{-1} &= \lambda^{-1} R_{N,L,k-1}^{-1} - \tilde{C}_{N,L,k}^H \gamma_{N,L}(k) \tilde{C}_{N,L,k} \\ D_{N,L+1,k} &= -X_N^H(k-L) R_{N,L+1,k}^{-1} \\ \delta_{N,L+1}(k) &= \alpha^{-1} \lambda^{-L} - D_{N,L+1,k} X_N(k-L) \\ \nu_{N,L+1}(k) &= d(k-L) + W_{N,L+1,k} X_N(k-L) \\ \nu_{N,L+1}^p(k) &= \alpha^{-1} \lambda^{-L} \delta_{N,L+1}^{-1}(k) \nu_{N,L+1}(k) \\ W_{N,L,k} &= W_{N,L+1,k} + \alpha \lambda^L D_{N,L+1,k} \nu_{N,L+1}^p(k) \\ R_{N,L,k}^{-1} &= R_{N,L+1,k}^{-1} - D_{N,L+1,k}^H \delta_{N,L+1}^{-1}(k) D_{N,L+1,k} \end{aligned} \quad (12)$$

L'algorithme est initialisé avec  $R_{N,L,0} = \mu I$ ,  $\mu$  étant un nombre réel positif relativement petit. L'algorithme GSW RLS a la même structure que l'algorithme SWC RLS. Sa complexité est en  $O(N^2)$  opérations. L'exploitation de la structure de déplacement de l'inverse de la matrice de covariance permet de dériver une version rapide du GSW RLS.

### 3 L'algorithme GSW SFTF

La dérivation d'un algorithme rapide est rendue facile du fait que le GSW RLS a la même structure que le SWC RLS dont une version rapide stabilisée est donnée dans [1]. En utilisant ces résultats, nous donnons l'algorithme GSW SFTF, une

version rapide numériquement stabilisée du GSW RLS

$$\begin{aligned}
& \left( A_{N,L,k}, \alpha_{N,L}^{-1}(k), \tilde{C}_{N+1,L,k}, \gamma_{N+1,L}^{-s}(k) \right) \\
& = f_U \left( A_{N,L',k'}, \lambda^{-1} \alpha_{N,L'}^{-1}(k'), \left[ 0 \tilde{C}_{N,L,k'} \right], \gamma_{N,L}^{-s}(k), X_{N+1}(k) \right) \\
& \left( B_{N,L,k}, \beta_{N,L}(k), \left[ \tilde{C}_{N,L,k} \ 0 \right], \gamma_{N,L}^{-s}(k) \right) \\
& = f_D \left( B_{N,L',k'}, \lambda \beta_{N,L'}(k'), \tilde{C}_{N+1,L,k}, \gamma_{N+1,L}^{-s}(k), X_{N+1}(k) \right) \\
& \left( A_{N,L',k}, \alpha_{N,L'}^{-1}(k), \hat{D}_{N+1,L,k}, -\hat{\delta}_{N+1,L}^s(k) \right) \\
& = f_U \left( A_{N,L,k}, \alpha_{N,L}^{-1}(k), \left[ 0 \hat{D}_{N+1,L,k} \right], -\hat{\delta}_{N,L}^s(k), X_{N+1}(k_L) \right) \\
& \left( B_{N,L',k}, \beta_{N,L'}(k), \left[ \hat{D}_{N,L,k} \ 0 \right], -\hat{\delta}_{N,L}^s(k) \right) \\
& = f_D \left( B_{N,L,k}, \beta_{N,L}(k), \hat{D}_{N+1,L,k}, -\hat{\delta}_{N+1,L}^s(k), X_{N+1}(k_L) \right) \\
& k \text{ pair: } \gamma_{N,L}(k) = \alpha \lambda^{N+L-1} \hat{\delta}_{N,L}^s(k) \beta_{N,L'}(k) \alpha_{N,L'}^{-1}(k) \\
& \quad \hat{\delta}_{N,L}(k) = \hat{\delta}_{N,L}^s(k) \\
& k \text{ impair: } \hat{\delta}_{N,L}^{-1}(k) = \alpha \lambda^{N+L-1} \gamma_{N,L}^{-s}(k) \beta_{N,L'}(k) \alpha_{N,L'}^{-1}(k) \\
& \quad \gamma_{N,L}^{-1}(k) = \gamma_{N,L}^{-s}(k) \\
& (W_{N,L,k}, \epsilon_{N,L}(k)) = f_J \left( W_{N,L',k'}, \tilde{C}_{N,L,k}, \gamma_{N,L}(k), d(k), X_N(k) \right) \\
& \left( W_{N,L',k}, -\alpha \lambda^{L'} \nu_{N,L'}(k) \right) \\
& = f_J \left( W_{N,L,k}, \hat{D}_{N,L,k}, -\hat{\delta}_{N,L}^{-1}(k), d(k_L), X_N(k_L) \right), \quad (13)
\end{aligned}$$

où  $k' = k-1$ ,  $L' = L-1$ ,  $k_L = k-L+1$ ,  $\hat{D}_{N,L,k} = \lambda^{1-L} D_{N,L,k}$  et  $\hat{\delta}_{N,L}(k) = \lambda^{-2(L-1)} \delta_{N,L}(k)$ .  $A_{N,L,k}$  et  $B_{N,L,k}$  sont les filtres de prédiction avant et arrière et  $\alpha_{N,L}(k)$  et  $\beta_{N,L}(k)$  les énergies des erreurs de prédiction correspondantes. Pour la définition des transformations  $f_U$ ,  $f_D$  and  $f_J$ , on pourra se reporter à [2]. La complexité du GSW SFTF est de  $16N$  opérations, qui est aussi celle du SWC SFTF.

## 4 Analyse des performances

Nous nous proposons de donner une analyse des performances de l'algorithme GSW RLS dans le cas général d'un canal variable dans le temps. Pour ce faire, nous considérons deux modèles de variations: dans le premier, le filtre optimal est un processus AR d'ordre 1 et le second modèle est un modèle du type marche aléatoire. Dans [3], nous donnons l'analyse de l'algorithme dans le cas d'une variation de canal selon un modèle à moyenne ajustée.

Dans ce qui suit, nous notons  $W_{N,k}$ , le filtre estimé et  $X_k$ , le vecteur de régression à l'instant  $k$ . Considérons le modèle d'identification classique pour le signal désiré:

$$d(k) = W_{N,k-1}^o X_k + n(k), \quad (14)$$

où  $n(k)$  est une séquence i.i.d. Gaussienne, centrée et de variance  $\sigma_n^2$  ( $n(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ ) et  $W_{N,k}^o$  est le filtre optimal à l'instant  $k$ . Notons  $\omega_i$ , les coefficients de la fenêtre utilisée. A partir de (5) et (14), il est possible d'exprimer le vecteur déviation  $\tilde{W}_{N,k} = W_{N,k} - W_{N,k}^o$  comme

$$\tilde{W}_{N,k} = \left( \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i (\Delta_{k,i} X_{k-i} + n_{k-i}) X_{k-i} \right) R_k^{-1}, \quad (15)$$

où  $\Delta_{k,i} = W_{N,k}^o - W_{N,k-i-1}^o$ . Soit  $COV_k$ , la matrice de covariance du filtre déviation:  $COV_k = E \tilde{W}_{N,k}^H \tilde{W}_{N,k}$ . En supposant que  $k$  est assez grand pour que  $R_{N,k} \approx ER_{N,k} =$

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \right) R = \tau^{-1} R \text{ et en utilisant le fait que } E \tilde{W}_k^H \tilde{W}_k = \\
& E_X E_{n,Z|X} \tilde{W}_k^H \tilde{W}_k, \text{ on trouve} \\
& COV_k = \tau R^{-1} \left( \sigma_n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i^2 X_{k-i} X_{k-i}^H + \sum_{i,j=0}^{\infty} \omega_i \omega_j C_{i,j} \right) \tau R^{-1}, \quad (16)
\end{aligned}$$

où  $C_{i,j} = E X_{k-i} X_{k-j}^H \Delta_{i-j} X_{k-j} X_{k-j}^H$  et  $\Delta_{i-j} = E \Delta_{k,i}^H \Delta_{k,j}$ . Dans le cas où  $X_k$  est un vecteur réel Gaussien, il vient

$$C_{i,j} = R \Delta_{i-j} R + T_{i-j} \Delta_{i-j} T_{i-j} + T_{i-j} \text{tr}(T_{j-i} \Delta_{i-j}) \quad (17)$$

avec  $T_{i-j} = E X_{k-i} X_{k-j}^T$ .

En supposant l'indépendance statistique entre  $X_{k-1}$  et  $W_{N,k}$ , l'erreur quadratique moyenne (EQM) est donnée par

$$\begin{aligned}
\text{var}(\epsilon_N^p(k)) & = \sigma_n^2 + \text{tr}(R COV_{k-1}) \\
& = \sigma_n^2 + N \sigma_n^2 \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\omega}_j^2 + \sum_{i,j=0}^{\infty} \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \text{tr}(C_{i,j} R). \quad (18)
\end{aligned}$$

avec  $\tilde{\omega}_i = \tau \omega_i$ . L'EQM (18) est composée de deux termes: le premier  $\xi_n = (1 + N \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\omega}_i) \sigma_n^2$  est la contribution du bruit de sortie alors que le second terme  $\xi_W = \sum_{i,j=0}^{\infty} \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \text{tr}(C_{i,j} R)$  est dû à la variation du canal. Pour les trois algorithmes WRLS, SWC RLS et GSW RLS, l'EQM due au bruit est:

$$\begin{aligned}
\text{GSWRLS} & : \sigma_n^2 \left( 1 + N \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{1+\alpha(\alpha-2)\lambda^{2L}}{(1-\alpha\lambda^L)^2} \right) \\
\text{RLS} & : \sigma_n^2 \left( 1 + N \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) \\
\text{SWCRLS} & : \sigma_n^2 \left( 1 + \frac{N}{L} \right). \quad (19)
\end{aligned}$$

Il faut noter que l'EQM due au bruit du WRLS peut être obtenue à partir de celle du GSW RLS pour  $\alpha = 0$ . Il en est de même pour le SWC RLS quand  $\alpha = 1$  et  $\lambda \rightarrow 1$ .

Pour la suite de l'analyse, nous considérons le cas où l'entrée est un bruit blanc de variance  $\sigma_x^2$  et  $C_{i,j}$  est une matrice diagonale, il en résulte que

$$\xi_W = \sum_{i,j=0}^{\infty} \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j (1 + (N+1)\delta_{i,j}) \text{tr}(C_{i,j}). \quad (20)$$

Nous allons maintenant examiner le cas où le canal varie selon un processus AR(1).

### 4.1 Variation du type AR(1)

Considérons le modèle de variation AR(1) du filtre optimal suivant:

$$W_{N,k}^o = \rho W_{N,k-1}^o + Z_k, \quad Z_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2 I), \quad (21)$$

Dans ce cas,  $C_{i,j} = \frac{\sigma_x^2}{1-\rho^2} (1 - \rho^{|j-i|} - \rho^{i+1} - \rho^{j+1}) I$ . D'après (20), il s'en suit que l'EQM due à la variation du canal pour les algorithmes RLS et SWC RLS sont

$$\begin{aligned}
\text{RLS} & : \frac{N \sigma_x^2 \sigma_z^2}{(1-\rho^2)} \left( 1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \left( \frac{1-\rho(2+\lambda)}{1-\rho\lambda} + \frac{2(N+1)(1-\rho)}{1-\rho\lambda^2} \right) \right) \\
\text{SWCRLS} & : \frac{N \sigma_x^2 \sigma_z^2}{L^2 (1-\rho^2)} (L(2N+L+2) - \\
& 2\rho \frac{(1-\rho^L)(N+L+1)}{1-\rho} + \frac{L(1-\rho^2) - 2\rho(1-\rho^L)}{(1-\rho)^2}) \quad (22)
\end{aligned}$$

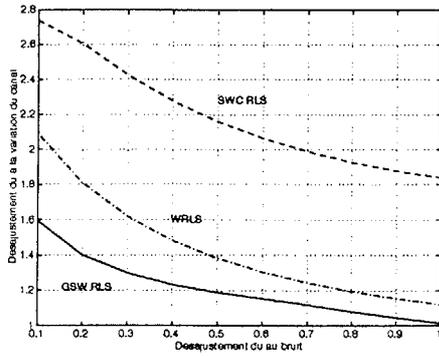


Figure 1: Courbes de désajustement pour une variation AR(1) du canal ( $N = 50$ ,  $\sigma_x^2 = \sigma_z^2 = 0.01$ ,  $\sigma_n^2 = 0.1$  et  $\rho = .99$ ).

L'expression de l'EQM due à la variation du canal pour la fenêtre généralisée dépend de la valeur de  $\rho$ . Quand  $\rho \neq \lambda$ , elle vaut

$$\xi_W = \frac{N\sigma_x^2\sigma_z^2(1-\lambda)^2}{(1-\alpha\lambda^L)^2(1-\rho^2)} \left( (2N+3) \frac{1+\alpha(\alpha-2)\lambda^{2L}}{1-\lambda^2} + \frac{1-\alpha\lambda^L}{1-\lambda} \right. \\ \left. \left( \frac{1-\alpha\lambda^L}{1-\lambda} - 2\rho \frac{1-\alpha(\rho\lambda)^L}{1-\rho\lambda} \right) - 2(N+1)\rho \frac{\alpha(\alpha-2)(\rho\lambda)^L}{1-\rho\lambda^2} \right) \\ + 2\rho\lambda \left( (1-\alpha)\lambda^{2(L-1)} + \frac{1-\lambda^{2(L-1)}}{1-\lambda^2} - \alpha(\rho\lambda)^{L-1} \frac{1-(\lambda/\rho)^{L-1}}{1-(\lambda/\rho)} \right), \quad (23)$$

quand  $\rho = \lambda$ , elle est donnée par

$$\xi_W = \frac{N\sigma_x^2\sigma_z^2(1-\lambda)^2}{(1-\alpha\lambda^L)^2} \left( \frac{1-\alpha\lambda^L}{(1-\lambda)(1+\lambda)} \left( 1-\alpha\lambda^L - 2\lambda \frac{1-\alpha\lambda^{2L}}{1+\lambda} \right) \right. \\ \left. + \frac{2N+3+Q(\alpha)\lambda^{2L}}{(1+\lambda)^2} + 2\lambda^2 \frac{1-\lambda^{2(L-1)}+(1-\alpha)^2\lambda^{2L}}{(1+\lambda)^3(1-\lambda)} \right) \\ - 2(N+1)\lambda \frac{1+\alpha(\alpha-2)\lambda^{3L}}{(1+\lambda)(1+\lambda+\lambda^2)}, \quad (24)$$

avec  $Q(\alpha) = (2N+3)\alpha^2 - 2(2N+L+3)\alpha + 2$ . Nous donnons

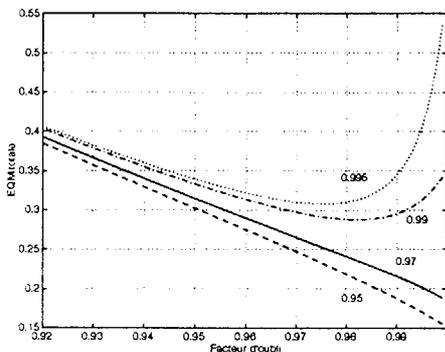


Figure 2: EQM totale de l'algorithme WRLS pour différentes valeurs de  $\rho$  ( $N = 50$ ,  $\sigma_x^2 = \sigma_z^2 = 0.01$  et  $\sigma_n^2 = 0.1$ ).

en Fig.(1), les courbes des désajustements des EQM dues à la variation du canal en fonction des désajustements dus au bruit pour les trois algorithmes. La courbe associée au GSW RLS est obtenue en minimisant par rapport à  $\lambda$  et  $L$ , le désajustement dû à la variation du canal. La valeur de  $\alpha$  étant obtenue en fixant une valeur de désajustement dû au bruit. Il ressort de ces courbes que la fenêtre généralisée est la meilleure. Il apparaît aussi que la fenêtre exponentielle possède une meilleure capacité de poursuite que la fenêtre rectangulaire. Sur les figures (2) et (3), nous donnons les EQM totales pour les fenêtres exponentielles et rectangulaires en fonction respectivement de  $\lambda$  et de  $L$  et ce, pour

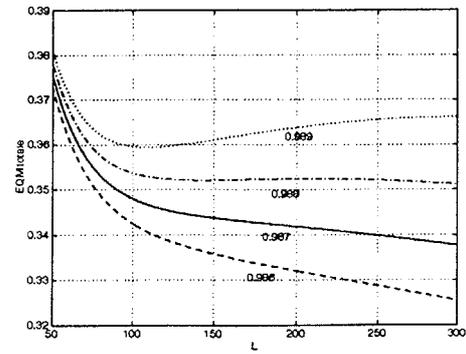


Figure 3: EQM totale de l'algorithme SWCRLS pour différentes valeurs de  $\rho$  ( $N = 50$ ,  $\sigma_x^2 = \sigma_z^2 = 0.01$  et  $\sigma_n^2 = 0.1$ ).

différentes valeurs de  $\rho$ . Ces courbes montrent que lorsque la variation du canal optimal devient relativement rapide ( $\rho < 0.98$ ), l'EQM devient strictement décroissante en fonction de  $\lambda$  (resp.  $L$ ). Dans cette situation l'EQM a pour limite quand  $\lambda \rightarrow 1$  (resp.  $L \rightarrow \infty$ ) la variance du signal désiré:  $\text{var}(d_k) = \sigma_n^2 + \frac{N\sigma_x^2\sigma_z^2}{1-\rho^2}$ . Nous retrouvons par contre, le comportement classique des algorithmes adaptatifs pour des variations plus lentes du canal ( $\rho > 0.98$ ).

## 4.2 Variation du type marche aléatoire

Dans le cas de la marche aléatoire, le filtre optimal vérifie

$$W_{N,k}^o = W_{N,k-1}^o + Z(k), \quad Z(k) \text{ i.i.d. } \sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2 I). \quad (25)$$

et  $C_{i,j} = \min(i+1, j+1)\sigma_z^2 I$ , ce qui donne pour (20)

$$\text{GSWRLS} : \frac{N\sigma_x^2\sigma_z^2}{(1-\alpha\lambda^L)^2} \left( (N+2) \frac{\alpha(2-\alpha)\lambda^{2L}\theta(\lambda)+1}{(1+\lambda)^2} - \frac{2\alpha\lambda^L P(\lambda)}{1-\lambda} \right. \\ \left. + 2(1-\alpha)L\lambda^{2L-1}(1-\lambda) + 2\lambda \frac{P(\lambda^2)-(1-\alpha)^2\lambda^{2L+1}\theta(\lambda)}{(1+\lambda)^2(1-\lambda)} \right) \\ \text{RLS} : N\sigma_x^2\sigma_z^2 \frac{2+N(1-\lambda)}{(1+\lambda)^2(1-\lambda)} \\ \text{SWCRLS} : N\sigma_x^2\sigma_z^2 \frac{(L+1)(3N+2L+4)}{L} \quad (26)$$

avec  $\theta(\lambda) = L\lambda^2 - L - 1$ ,  $P(\lambda) = 1 - L\lambda^{L-1} + (L-1)\lambda^L$ . Nous avons déterminé les paramètres optimaux de la fenêtre généralisée. Les calculs montrent que celle-ci possède une meilleure capacité de poursuite mais l'amélioration apportée est nettement moins importante que celle obtenue dans le cas de la variation AR(1) du canal. Dans le cas de la marche aléatoire, la fenêtre exponentielle présente aussi une meilleure capacité de poursuite que la fenêtre rectangulaire.

## Références

- [1] D.T.M. Slock and T. Kailath "A modular prewindowing framework for covariance FTF RLS algorithms". *Signal Processing*, 28(1):47-61, 1992.
- [2] D.T.M. Slock and T. Kailath "A modular multichannel multiexperiment fast transversal filter RLS algorithm". *Signal Processing*, 28(1):25-45, 1992.
- [3] K. Maouche and Dirk T.M. Slock. "The Generalized Sliding Window Recursive Least-Squares (GSW RLS) Algorithm". Technical Report RR N° 95-021, Institut Eurécom, Sophia Antipolis, France, April, 1995.