

DÉTECTION DE TRANSITOIRES PAR TRANSFORMÉE EN ONDELETTES ORTHONORMALE

Olivier LEMOINE

Laboratoire I3S, CNRS 1376 - UNSA Bât. 4, 250 Av. Albert Einstein
06 560 Valbonne Sophia-Antipolis

Cet article présente un détecteur de signaux transitoires bande-étroite de forme inconnue utilisant la transformée en ondelettes discrète orthonormale de Daubechies. Il constitue une approximation facile à mettre en œuvre du rapport de vraisemblance généralisé, qui est l'approche temporelle sous-optimale, mais souvent impossible à appliquer. De plus, ce détecteur, mis au point pour un bruit blanc gaussien, conserve un bon comportement pour de nombreux bruits colorés.

This paper presents a detector of unknown transient broadband signals using the orthonormal discrete wavelet transform of Daubechies. It constitutes an easily computable approximation of the generalized likelihood ratio, which is the sub-optimal detector in this case, but often impossible to apply. Moreover, this detector, designed for the detection in white Gaussian noise, keeps a good performance for numerous non-white noises.

1 ANALYSE DE SIGNAUX TRANSITOIRES INCONNUS

L'information contenue dans un signal est souvent concentrée sur un intervalle de temps faible devant la durée d'observation; on parle alors de signal *transitoire*. Pour détecter de tels signaux, sur lesquels on dispose en général de quelques informations *a priori* (par exemple la durée, la largeur de bande instantanée), sans en connaître la forme d'onde (ou même un modèle), l'évaluation de $s(t)$ passe par l'estimation de ses coefficients s_n de décomposition dans une base $\psi_n(t)$: $s(t) = \sum s_n \psi_n(t)$. Ainsi, le choix de la base $\psi_n(t)$ est crucial, à la fois pour la qualité de l'estimation et pour la facilité de programmation du détecteur.

L'objet de cet article est de proposer l'utilisation d'une base orthonormale d'ondelettes pour décomposer le signal, en tirant profit à la fois de la structure orthonormale de l'ondelette et de ses bonnes propriétés de localisation en temps et en fréquence. Les ondelettes choisies sont les ondelettes orthonormales à support compact de Daubechies [Dau88]. Nous allons voir que la structure orthonormale permet d'obtenir une approximation simple à mettre en œuvre du rapport de vraisemblance généralisé (approche sous-optimale), et que ce détecteur peut de plus être étendu facilement au cas d'un bruit gaussien coloré.

Le signal à détecter $s(t)$ est supposé transitoire et bande-étroite, situation que l'on rencontre fréquemment en pratique. Nous supposons de plus que l'on dispose de sa durée approximative T_e et de sa largeur de bande approximative B_e . Le bruit $b(t)$ est supposé blanc gaussien, réel, centré et de variance σ_b^2 . Les hypothèses sont :

$$\begin{cases} H_0 : x(t) = b(t) \\ H_1 : x(t) = s(t) + b(t). \end{cases}$$

Ce type de signal a déjà été étudié par certains auteurs.

- Dans [FP89], le signal est analysé par la représentation de Gabor, puis une analyse locale en temps est effectuée sur ces coefficients. Le détecteur associé est une approximation du rapport de vraisemblance généralisé, mais ne prend pas en compte le caractère bande étroite du transitoire. Il est plus complexe à mettre en œuvre que le détecteur que nous proposons car les coefficients de Gabor d'un bruit blanc gaussien ne sont pas décorrélés.

- Dans [RT91], l'idée est d'estimer la puissance instantanée du signal en intégrant la distribution pseudo-Wigner-Ville lissée sur une fenêtre étroite en fréquence. Le détecteur obtenu est robuste vis-à-vis d'un changement de durée du signal, et fournit une bonne estimation de l'instant d'arrivée et de la fréquence minimale du transitoire, mais une étude approfondie de ses performances n'est pas envisageable puisque la densité de probabilité du test n'est pas déterminée.

- La méthode exposée dans [FM92] est très semblable à celle proposée ici, à deux nuances près : les auteurs détectent des signaux dont le produit (durée \times bande) est connu, et non pas la durée et la largeur de bande. La deuxième différence est que l'ondelette choisie n'est pas orthonormale (il s'agit de l'ondelette de Morlet), ce qui implique en particulier que la densité de probabilité du test n'est pas connue.

- Enfin, dans [Abr94], le signal à détecter est supposé impulsionnel, donc peu étendu en temps. Le principe utilisé consiste à rechercher des coïncidences entre échelles sur le module de la TOD (semi-orthogonale) du signal observé. L'ondelette d'analyse est choisie en fonction des informations *a priori* sur la forme du transitoire. Cette méthode présente de bonnes performances en bruit blanc et en bruit en $1/f$, mais n'est plus adaptée lorsque le transitoire s'étale en temps sur plusieurs coefficients d'ondelette.



2 DÉTECTION PAR LES ONDELETTES

2.1 UTILITÉ DU SIGNAL ANALYTIQUE

L'une des principales difficultés de l'utilisation de la transformée en ondelettes discrète (TOD) pour l'analyse des données réside dans le caractère discontinu de l'échantillonnage de la variable temps. Dans un problème de détection, cet inconvénient est particulièrement désagréable dans la mesure où la trace sur la grille dyadique du transitoire à détecter peut changer de façon considérable en fonction de la localisation du transitoire [Abr94]. Un remède à cette non-invariance en temps de la TOD est de considérer le signal analytique associé au signal réel étudié : ceci permet d'assurer que le maximum local des coefficients d'ondelette coïncide avec le maximum du transitoire à toutes les échelles [Abr94]. De plus, si une certaine information sur la forme du transitoire à détecter est disponible *a priori* (sur sa régularité, sa décroissance...), elle peut servir à adapter la forme de l'ondelette, c'est-à-dire guider le choix du nombre de coefficients de l'ondelette de Daubechies choisie.

2.2 COEFFICIENTS D'ONDELETTE D'UN BRUIT BLANC

Les coefficients de la transformée en ondelettes discrète (TOD) d'un signal $x(t)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} T_{nm} &= a_0^{m/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) h^*(a_0^m u - nt_0) du ; n, m \in \mathbb{Z} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) h_{nm}^*(u) du \end{aligned}$$

avec $h_{nm}(u) = a_0^{m/2} h(a_0^m u - nt_0) ; n, m \in \mathbb{Z}$,

où $h(t)$ désigne l'ondelette mère. Nous considérons par la suite le cas d'un échantillonnage dyadique, pour lequel $a_0 = 2$ et $t_0 = 1$. La propriété d'orthonormalité des ondelettes s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{mn}(t) h_{m'n'}(t) dt = \delta_{m-m'} \delta_{n-n'} \quad (1)$$

Supposons que x soit un processus blanc gaussien, complexe analytique, de variance σ_b^2 . Comme la TOD est une fonction linéaire du signal x , les coefficients T_{nm} sont complexes et conjointement gaussiens. De plus, l'espérance mathématique des T_{nm} étant nulle, toute l'information est contenue dans leur moment d'ordre 2 :

$$E[T_{nm} T_{lk}^*] = \sigma_b^2 \delta_{m-k} \delta_{n-l}, \quad (2)$$

ce qui signifie que la matrice de corrélation des coefficients d'ondelette est un multiple de la matrice identité, donc particulièrement simple à inverser. Cette propriété sera mise à profit dans le calcul du test de détection.

Notons T le vecteur de tous les coefficients d'ondelette T_{nm} du bruit blanc gaussien analytique $x(t)$ (l'ordre dans lequel les T_{nm} sont rangés dans T n'a pas d'importance). Soit N la longueur de T . Considérons maintenant la densité de probabilité $p_0(T)$ du vecteur T . La première question qui se pose est celle de la circularité de T . En fait, elle découle de celle de x de la façon suivante :

comme $E[x(u)x(u')] = 0, \forall u, u'$,

$$\begin{aligned} E[T_{nm} T_{n'm'}^*] &= \int \int E[x(u)x(u')] h_{nm}(u) h_{n'm'}^*(u') du du' \\ &= 0, \forall n, m, n', m'. \end{aligned}$$

Ceci établit la circularité de T . D'où l'expression de la densité de probabilité du vecteur T (voir [Pic93]) :

$$p_0(T) = \pi^{-N} \det^{-1}(\Gamma_T) \exp[-T^H \Gamma_T^{-1} T] \quad (3)$$

où $\Gamma_T = E[TT^H] = \sigma_b^2 \mathbf{1}$ désigne la matrice de covariance de T .

2.3 FILTRAGE DANS LE PLAN TEMPS-ÉCHELLE

Les coefficients d'ondelette, pour une position donnée τ, ξ du masque $T_e \times B_e$ (τ désigne alors l'instant d'arrivée du transitoire et ξ sa fréquence minimale), sont sélectionnés de la façon suivante : tous les coefficients T_{nm} tels que

$$2^{-m} \in [\xi, \xi + B_e] \text{ et } n2^m \in [\tau, \tau + T_e] \quad (4)$$

sont retenus. Sur la figure 1, les coefficients concernés sont compris dans le rectangle en trait plein. Notons P le nombre total de coefficients T_{nm} ainsi obtenus.

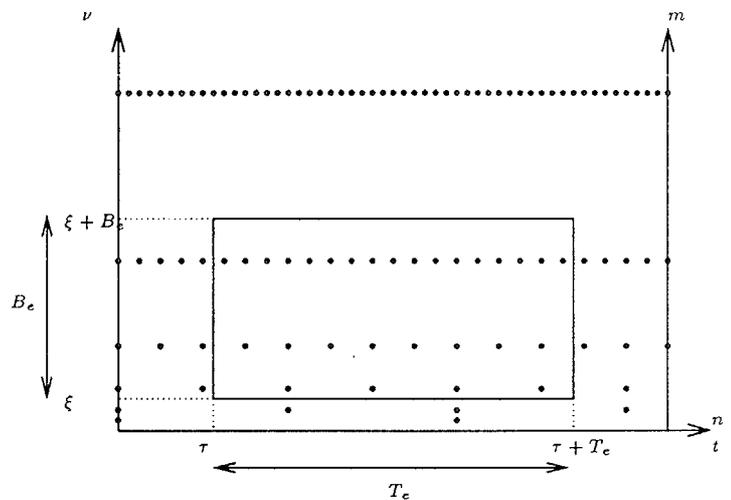


Figure 1: Localisation des coefficients d'ondelette sur la grille dyadique. Le rectangle comprend les coefficients affectés par la présence d'un signal entre les instants τ et $\tau + T_e$ et les fréquences ξ et $\xi + B_e$.

2.4 TEST DE DÉCISION

Calculons le rapport de vraisemblance. Sous H_0 ,

$$\log p_0(T) = -N \log \pi - 2N \log \sigma_b - \frac{1}{\sigma_b^2} T^H T,$$

Sous H_1 , nous supposons que T a exactement P éléments qui sont de moyenne non nulle, dont les positions sont déterminées par les valeurs de τ et ξ et par la façon dont sont rangés les coefficients T_{nm} dans T . Ceci découle directement de l'hypothèse selon laquelle le signal $s(t)$ est transitoire bande-étroite. Les $N - P$ éléments restant sont de moyenne nulle. Puisque ces P éléments sont à des positions connues de T , nous pouvons supposer sans perte de généralité que nous les avons réordonnés aux P premières positions de T . Notons μ le vecteur des moyennes non nulles de ces P éléments, T_1 le vecteur des éléments correspondants de T et T_2 le complémentaire de T_1 à T : $T^T = [T_1^T T_2^T]^T$. Ces trois grandeurs μ, T_1 et T_2 dépendent de τ et ξ , mais pour ne pas alourdir les notations, nous ne l'écrivons pas explicitement. La densité de probabilité sous H_1 est alors donnée par

$$\log p_1(T) = -N \log \pi \sigma_b^2 - \frac{1}{\sigma_b^2} [T_1 - \mu | T_2]^H \begin{bmatrix} T_1 - \mu \\ T_2 \end{bmatrix}$$

où T_1 et μ sont de dimension P et T_2 de dimension $(N - P)$. μ représente le vecteur des paramètres inconnus. Le rapport de vraisemblance généralisé s'écrit

$$\max_{\mu} \{ \log p_1(T) \} - \log p_0(T)$$

D'après l'expression de $\log p_1(T)$, celui-ci est maximum pour $\mu = T_1$, et dans ce cas (en faisant passer la variance dans le seuil), le rapport de vraisemblance généralisé devient :

$$\lambda(\tau, \xi) = [T^H T - (T_2)^H T_2] = (T_1)^H T_1 = \sum_{k=1}^P |T_1(k)|^2. \quad (5)$$

$\lambda(\tau, \xi)$ est le test de décision qu'il faut comparer à un seuil pour décider H_0 ou H_1 :

$$\lambda(\tau, \xi) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \lambda_0.$$

Sous H_0 , $\lambda(\tau, \xi)$ (somme de carrés de coefficients indépendants qui suivent une loi gaussienne) est distribué selon une loi du χ^2 à P degrés de liberté, et sous H_1 , selon une loi du χ^2 non centrée à P degrés de liberté et de paramètre de non-centralité $\nu = (\mu)^H \mu$. La distribution de $\lambda(\tau, \xi)$ sous H_0 permet la détermination du seuil λ_0 pour une probabilité de fausse alarme donnée. La distribution de $\lambda(\tau, \xi)$ sous H_1 permet le calcul de la probabilité de détection en fonction des coefficients d'ondelette du signal analysé.

3 CAS D'UN BRUIT COLORÉ

Dans le cas d'un bruit additif coloré, la transformée en ondelettes présente une autre propriété intéressante : la corrélation des coefficients d'ondelette décroît de façon exponentielle (parfois hyperbolique) en fonction du temps et des échelles, pour une classe importante de processus stationnaires, ainsi que pour les mouvements Browniens fractionnaires [DM94]. Ainsi, si le processus $b(t)$ n'est plus blanc, la matrice de corrélation de ses coefficients d'ondelette sera encore approximativement diagonale, ce qui signifie que les coefficients d'ondelette T_{nm} pourront être considérés comme indépendants et identiquement distribués selon une loi gaussienne complexe. Par conséquent, la statistique (5) aura la même expression (la nouvelle variance des T_{nn} devra être estimée) et la densité de probabilité sera toujours une loi du χ^2 .

4 PERFORMANCES

4.1 CALCUL DU SEUIL

Le seuil de détection λ_0 est obtenu en inversant l'expression de la probabilité de fausse alarme :

$$\begin{aligned} P_{fa} &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} p_{\Lambda_0}(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2^{P/2} \Gamma(P/2)} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{P/2-1} e^{-\lambda/2} d\lambda. \end{aligned}$$

Cependant, cette inversion ne semble pas possible analytiquement. Un moyen simple et efficace de contourner cette difficulté est d'utiliser l'approximation de Wilson-Hilferty de la loi du χ^2 [KS69]. Celle-ci nous donne le seuil directement par la formule :

$$\lambda_0 = \sigma_b^2 P \left(\frac{2}{\sqrt{9P}} \operatorname{erf}^{-1}(1 - 2P_{fa}) + 1 - \frac{2}{9P} \right)^3$$

où $\operatorname{erf}^{-1}(x)$ désigne l'inverse de la fonction d'erreur¹, dont il existe des algorithmes de calcul.

4.2 SIMULATIONS

Il est intéressant de considérer les performances de ce détecteur pour différents transitoires à détecter, afin d'en étudier la robustesse, et de comparer ses performances à celles d'autres détecteurs : le filtre adapté (qui suppose le signal parfaitement connu) et le détecteur d'énergie (qui ne suppose aucune connaissance sur le signal). Les différents transitoires considérés sont les suivants :

- une modulation linéaire de fréquence d'amplitude instantanée gaussienne, dont la fréquence instantanée va de 0.2 à 0.4 en fréquence normalisée (voir figure 2 (a)) ;
- une modulation linéaire de fréquence d'amplitude exponentielle décroissante, dont la fréquence instantanée va de 0.2 à 0.4 en fréquence normalisée (2 (b)) ;
- une ondelette de Daubechies à 20 coefficients (2 (c)) ;

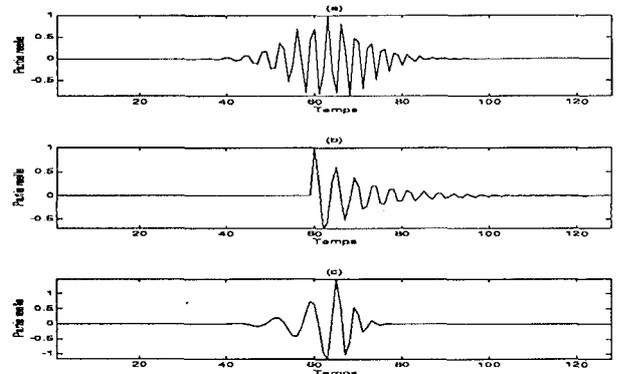


Figure 2: Transitoires utilisés pour les simulations : (a) : chirp d'amplitude instantanée gaussienne ; (b) : chirp d'amplitude exponentielle décroissante ; (c) : ondelette de Daubechies à 20 coefficients.

Les courbes représentées figure 3 correspondent aux courbes COR en bruit blanc gaussien, pour les trois détecteurs et les trois transitoires. Elles ont été établies chacune à partir de 1000 réalisations du bruit. Elles donnent l'évolution de la probabilité de détection en fonction du rapport signal sur bruit ($RSB_{dB} = 10 \log \frac{E_s}{\sigma_b^2}$), pour une probabilité de fausse alarme fixée à 10^{-4} . Comme cela était prévisible, le filtre adapté et le détecteur d'enveloppe ont des performances qui ne dépendent pas du signal analysé. Par contre, le détecteur par transformée en ondelettes se comporte différemment selon la forme du transitoire à détecter. Ainsi, ses meilleures performances sont obtenues lorsque le transitoire a la forme de l'ondelette d'analyse. Pour les autres transitoires, ses performances diminuent, tout en restant nettement supérieures à celles du détecteur d'énergie. On constate donc d'après ces courbes que le détecteur par transformée en ondelettes tire avantageusement profit des informations *transitoire* et *bande-étroite*, seules informations qui le distinguent du détecteur d'énergie.

Dans le cas d'un bruit gaussien coloré, dont la coloration est obtenue par le filtre AR(1) donné par : $b(n) = A_1 b(n) + v(n)$ où $v(n)$ est une séquence blanche gaussienne centrée, de variance 1, avec $A_1 = 0.98$, les courbes COR du détecteur par

¹définie par $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

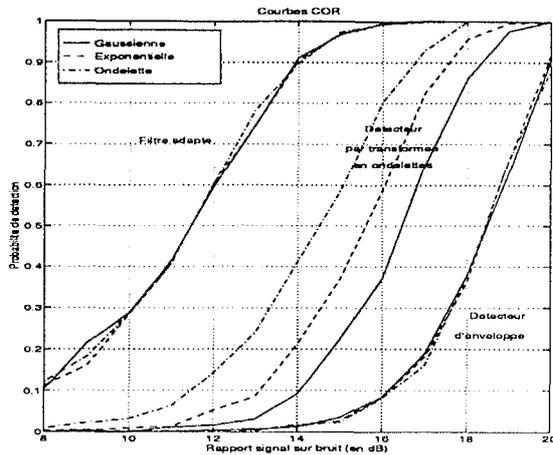


Figure 3: Courbes COR en bruit blanc gaussien, pour une probabilité de fausse alarme de 10^{-4} .

transformée en ondelettes sont données figure 4. Celles-ci présentent peu de différences par rapport aux courbes COR obtenues dans le cas d'un bruit blanc, sauf pour le transitoire correspondant à l'ondelette, pour lequel une amélioration se produit. Cette amélioration s'explique par le fait que le bruit coloré a un spectre "basse-fréquence", et que ce transitoire est situé à une fréquence moyenne, donc à une échelle sur laquelle le bruit n'est pas très présent. Pour les autres transitoires, ceci est moins flagrant car ils sont plus étalés en fréquence (et donc en échelle). Par conséquent, les performances de ce détecteur restent sensiblement les mêmes (voire s'améliorent) lorsque le bruit gaussien prend une coloration.

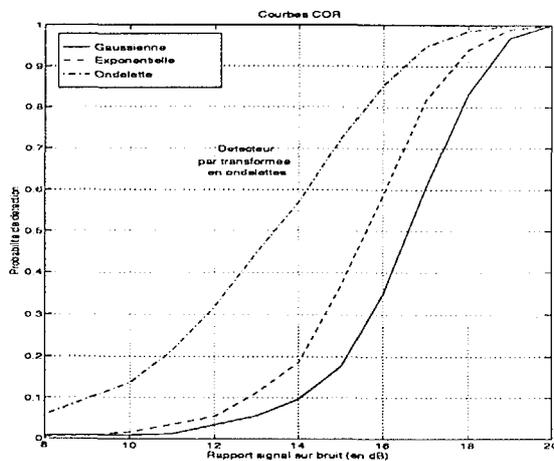


Figure 4: Courbes COR en bruit gaussien coloré, pour une probabilité de fausse alarme de 10^{-4} .

5 CONCLUSION

Nous avons présenté un détecteur de signaux transitoires bande-étroite utilisant la transformée en ondelettes orthonormale (ondelettes de Daubechies). L'avantage d'une analyse temps-fréquence sur une méthode purement temporelle est qu'elle peut exploiter facilement les hypothèses *transitoire* et *bande-étroite*. La propriété d'orthonormalité de la base d'ondelettes ainsi que les bonnes localisations en temps et en fréquence des ondelettes de Daubechies à support compact permettent de construire une approximation "locale" du rapport de vraisemblance généralisé, très simple à mettre

en œuvre. Ce détecteur, conçu pour la détection en bruit blanc gaussien, conserve de bonnes propriétés dans le cas d'un bruit gaussien coloré. Un certain degré de liberté est laissé à l'utilisateur quand au choix de l'ondelette (le nombre de coefficients intervenant dans les filtres discrets), ce qui lui permet de l'adapter approximativement au transitoire à détecter (si une certaine information est disponible sur sa forme, sa régularité...).

Une variante à ce détecteur pourrait consister à abandonner l'orthogonalité des ondelettes au profit d'une plus grande souplesse au niveau du choix de l'ondelette: ceci peut être intéressant lorsque la forme de l'ondelette est connue. La transformée en ondelettes discrète semi-orthogonale (voir [Abr94]) est alors un outil bien adapté puisqu'elle offre toute une palette de techniques de synthèse d'ondelettes. Cependant, le contrecoût de ceci est que le test optimal est plus complexe à mettre en œuvre.

Une seconde variante, plus axée sur les propriétés statistiques du bruit, pourrait être de choisir l'ondelette de façon à diagonaliser la matrice de corrélation des coefficients d'ondelette, quel que soit le bruit additif. Cette approche, qui est semblable à une décomposition de Karhunen-Loève, a été étudiée par Zhang et Walter dans [ZW94]. Elle nécessite la connaissance de la fonction de corrélation du bruit.

Références

- [Abr94] P. Abry. *Transformée en ondelettes - Analyse multirésolution et signaux de pression en turbulence*. PhD thesis, Université C. Bernard Lyon I, 1994.
- [Dau88] I. Daubechies. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. *Communication on Pure and Applied Mathematics*, XLI:909-996, 1988.
- [DM94] R. Dijkerman and R. Mazumdar. Wavelet Representations of Stochastic Processes and Multiresolution Stochastic Models. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42(7):pp 1640-1652, July 1994.
- [FM92] M. Frisch and H. Messer. The use of the Wavelet Transform in the Detection of an Unknown Transient Signal. *IEEE Trans. on Information Theory*, 38(2):892-897, March 1992.
- [FP89] B. Friedlander and B. Porat. Detection of Transient Signals by the Gabor Representation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(2):169-180, February 1989.
- [KS69] M. Kendall and A. Stuart. *The Advanced Theory of Statistics*, volume 1. C. Griffin, 1969.
- [Pic93] B. Picinbono. *Random Signals and Systems*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1993.
- [RT91] P. Rao and F.J. Taylor. Detection and Localisation of Narrow-band Transient Signals using the Wigner Distribution. *Journal of Acoustical Society of America*, 90(3):1423-1434, September 1991.
- [ZW94] J. Zhang and G. Walter. A wavelet-based kl-like expansion for wide-sense stationary random processes. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42(7):pp 1737-1745, July 1994.