

ALGORITHMES RAPIDES POUR LA DÉCOMPOSITION EN ONDELETTES CONTINUE - APPLICATION À L'IMPLANTATION DE LA RÉALLOCATION DU SCALOGRAMME

Patrice ABRY Eric CHASSANDE-MOTTIN Patrick FLANDRIN

Ecole Normale Supérieure de Lyon
 Laboratoire de Physique (URA 1325 CNRS)
 46 allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 07
 E-mail: pabry@physique.ens-lyon.fr

et

GdR 0134 CNRS *Traitement du Signal et Images*

Résumé. Nous proposons un algorithme rapide à banc de filtres pour l'implantation d'une transformée (quasi)-continue en ondelettes, fonctionnant avec une ondelette mère a priori quelconque. La conception ainsi que la mise en œuvre pratique de cet algorithme repose sur la souplesse du cadre mathématique offert par l'Analyse MultiRésolution. Nous indiquons également comment cet algorithme peut être utilisé pour proposer une implantation particulièrement efficace de la réallocation des scalogrammes.

1 Introduction

Lorsqu'on utilise une transformée en ondelettes continue, $T_x^\psi(t, a) = \langle x, \psi_{t,a} \rangle$, on peut, pour ondelette-mère ψ , choisir n'importe quel motif, pourvu qu'il satisfasse à la peu restrictive condition d'admissibilité [7]. Cette souplesse a pour prix le coût élevé de la transformée (en $O(JMN^2)$ où N , J et M sont respectivement les nombres d'échantillons du signal, d'octaves et de voies par octaves mises en jeu dans la décomposition). Au contraire, la transformée discrète en ondelettes, $d_x(k, j) = T_x^\psi(2^j k, 2^j)$ peut être implantée à l'aide d'un algorithme pyramidal rapide (en $O(N)$, [10]). Cette transformée souffre cependant de deux inconvénients pour l'analyse du signal. D'une part, l'ondelette-mère doit nécessairement être construite à partir d'une Analyse MultiRésolution (AMR) [7, 10, 11] et d'autre part, l'espace de représentation, la grille dyadique, est non redondant et non invariant par translation de l'origine des temps.

On propose ici de montrer qu'il est possible d'utiliser une transformée en ondelettes, qui cumule les avantages des versions continue et discrète: souplesse de l'outil (choix de la redondance et choix du motif d'analyse quasi-illimité) et implantation par algorithme rapide (à banc de filtres).

Abstract. We propose a fast filter bank-based algorithm to implement the (quasi)-continuous wavelet transform, which works with any a priori chosen wavelet. Both the design and the practical use of such an algorithm rely on the flexibility of the MultiResolution Analysis theory mathematical framework. We also explain how this algorithm can be used to propose a particularly efficient implementation of scalograms reassigment.

2 Principe des algorithmes rapides

Etape 1: Choix d'une AMR. Il faut commencer par choisir, à partir de celles proposées dans la littérature, une AMR $V(\phi_0)$, ou la fabriquer à partir des techniques proposées dans [4, 1, 2]. Pour une définition complète de l'AMR, on pourra consulter [7, 4, 10, 11]. Rappelons simplement qu'une AMR est constituée d'une collection $\{V_j\}_{j=0,1,\dots}$ d'espaces d'approximations emboîtés et définie à partir d'une fonction d'échelle ϕ_0 , ou de façon équivalente, de sa séquence génératrice u [7], telle que

$$\phi_0\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_k u(k) \phi_0(t - k). \quad (1)$$

Les $\{\phi_0(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ constituent une base de Riesz[11, 4] pour l'AMR, mais pas nécessairement une base orthonormée. Le choix a priori de cette AMR est important car certaines de ses propriétés (la régularité[11, 7], notamment) seront naturellement conférées aux ondelettes d'analyse.

Etape 2: M ondelette-mères. Soient ψ l'ondelette (non nécessairement construite à partir d'une AMR) choisie pour faire l'analyse et Ψ sa transformée de Fourier. On note, de plus, ν_0 la fréquence centrale du filtre passe-bande que constitue l'ondelette. On construit, à partir de ce motif élémentaire, M versions dilatées,

$$\psi_m(t) = \frac{1}{\sqrt{a_m}} \psi_m\left(\frac{t}{a_m}\right), \quad m = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (2)$$

1 avec des facteurs de dilatation $\{a_m\}_{m=0,1,\dots,M-1}$ qui varient



de 1 à 2,

$$1 \leq a_m < 2, \quad m = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Ce jeu de M motifs élémentaires produit, par construction, des filtres passe-bande dont les fréquences centrales évoluent en $\nu_m = \nu_0/a_m$, de sorte que leurs transformées de Fourier $\Psi_m(\nu) = \sqrt{a_m}\Psi(a_m\nu)$ découpent la bande $[\nu_0/2, \nu_0]$, et donc chaque octave, en M voies. Ils définissent donc M ondelettes-mères. L'échantillonnage logarithmique produit par la découpe en octaves, de la transformée discrète en ondelettes, peut être préservé, en effectuant le choix particulier, proposé dans [13], $a_m = 2^{m/M}$, $m = 0, 1, \dots, M - 1$ et supposé dans toute la suite.

Etape 3: L'idée centrale, l'approximation multirésolution. L'idée-clé de la méthode consiste à produire, à partir des M motifs élémentaires définis ci-dessus, M ondelettes incluses dans l'AMR choisie. Ceci peut être réalisé en effectuant des projections orthogonales des ψ_m sur le premier des sous-espaces V_0 de l'AMR. On obtient ainsi M ondelettes,

$$\tilde{\psi}_m = Proj_{V_0} \psi_m,$$

qui constituent les meilleures approximations, au sens des moindres carrés, des ψ_m . Comme ces ondelettes-approximations appartiennent à V_0 , elles s'écrivent comme combinaisons linéaires de ces vecteurs de base,

$$\tilde{\psi}_m(t) = \sum_k v_m(k) \phi_0(t - k) \quad m = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (3)$$

Les $\{v_m(k)\}_{k \in \mathbb{Z}, m = 0, 1, \dots, M-1}$ peuvent être obtenus à partir des produits scalaires

$$v_m(k) = \langle \psi_m(\cdot), \mathring{\phi}_0(\cdot - k) \rangle \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad m = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (4)$$

où les $\{\mathring{\phi}_0(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ constituent la base de Riesz duale des $\{\phi_0(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ in V_0 (pour une définition, consulter [4, 7]). Dans le langage de l'AMR, les jeux d'équations (3) et (4) définissent M espaces d'ondelettes, pour lesquels la requête d'orthogonalité a été abandonnée.

L'algorithme. En lieu et place des véritables coefficients de la décomposition quasi-continue en ondelettes $T_x^{(\psi)}$, on va calculer les coefficients approchés $\tilde{T}_x^{(\psi)}$ suivants,

$$\left. \begin{aligned} T_x^{(\psi)}(k, 2^j + \frac{m}{M}) &= \langle x(\cdot), 2^{-j/2} \psi_m(2^{-j}(\cdot - k)) \rangle \\ \tilde{T}_x^{(\psi)}(k, 2^j + \frac{m}{M}) &= \langle x(\cdot), 2^{-j/2} \tilde{\psi}_m(2^{-j}(\cdot - k)) \rangle \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Puisque les ondelettes $\tilde{\psi}_m$ sont issues d'une AMR, il est facile de montrer que les coefficients $\tilde{T}_x^{(\psi)}(k, a_{j,m})$ d'une octave donnée peuvent être obtenus à partir de coefficients $ca_x(k, j - 1)$ calculés pour l'octave précédente à l'aide des formules de récurrences suivantes,

$$\left. \begin{aligned} ca_x(k, j) &= \sum_n u(-n) ca_x(2^{j-1}k - n, j - 1) \\ \tilde{T}_x^{(\psi)}(k, a_{j,m}) &= \sum_n v_m(-n) ca_x(2^{j-1}k - n, j - 1) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Dans le cadre de la théorie de l'AMR, les coefficients ca_x jouent le rôle des *coefficients d'approximation*. La séquence initiale doit être obtenue à partir du signal à analyser par

$$ca_x(k, 0) = \langle x(\cdot), \phi_0(\cdot - k) \rangle \quad (7)$$

Le jeu d'équations précédent peut être réécrit sous la forme d'un filtrage à temps discret

$$\left. \begin{aligned} ca_x(k, j) &= \sum_n h^j(n) * ca_x(k - n, j - 1) \\ \tilde{T}_x^{(\psi)}(k, a_{j,m}) &= \sum_n g_m^j(n) ca_x(k - n, j - 1) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

où les filtres h^j et g_m^j sont définis par:

$$\left. \begin{aligned} h^j(n) &= u(-k), \text{ si } n = 2^j k \\ &= 0, \text{ sinon} \\ g_m^j(n) &= v_m(-k), \text{ si } n = 2^j k \\ &= 0, \text{ sinon} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Les coefficients $\tilde{T}_x^{(\psi)}$ peuvent donc être obtenus comme les sorties d'un algorithme à banc de filtres, dont un schéma est présenté sur la figure 1. Sa structure emboîtée ou récursive préserve la qualité principale de l'algorithme proposé par Mallat, pour le calcul de la décomposition discrète en ondelettes, sa structure pyramidale: pour calculer les coefficients d'une octave donnée, on travaille à partir de ceux de l'octave précédente plutôt qu'à partir du signal lui-même. Elle est, donc, à l'origine de la substantielle réduction du coût de calcul de cette implantation de la transformée continue en ondelettes (en $O(JMN)$, où N est la taille du signal analysé, J le nombre d'octaves impliquées dans la décomposition et M le nombre de voies par octaves, au lieu de $O(JMN^2)$ pour un calcul classique).

Remarques. L'utilisation de l'algorithme précédent appelle plusieurs remarques.

1. L'erreur $|\tilde{T}_x^{(\psi)} - T_x^{(\psi)}|$ est contrôlable. Elle reste bornée et constante quel que soit le nombre d'octaves mises en jeu [1]. De manière évidente, celles-ci dépendent de la qualité des approximations des ψ_m par les $\tilde{\psi}_m$. Pour une ondelette choisie ψ et une multirésolution donnée, les quantités $|\psi_m - \tilde{\psi}_m|$ sont fixées. On peut, cependant, les réduire en adaptant l'AMR à l'ondelette à approcher à l'aide des techniques décrites dans [1, 2], en augmentant sa régularité, ou en s'assurant que le support de la transformée de Fourier de ψ se situe essentiellement dans la bande de fréquence réduite $[-1/2, 1/2]$ (ce qui est également requis pour l'implantation classique des transformées).

2. Les coefficients v_m se calculent théoriquement à l'aide de produits scalaires impliquant les vecteurs de la base duale (cf. eq. (4)). On peut éviter la recherche de la base duale, en utilisant le fait que celle-ci s'obtient par [4, 15, 1],

$$\mathring{\phi}_0(t) = \sum_k \gamma^{-1}(k) \phi_0(t - k)$$

où γ est la séquence d'autocorrélation de la fonction ϕ_0 ,

$$\gamma(k) = \langle \phi_0(\cdot), \phi_0(\cdot - k) \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

et γ^{-1} est la séquence inverse

$$\sum_n \gamma^{-1}(n) \gamma(k - n) = \delta_{0,k}.$$

Cette séquence peut, de plus, être facilement obtenue à partir de la séquence génératrice u [2], plutôt que par le calcul des produits scalaires qui la définissent. Les v_m se déduisent donc efficacement par l'équation,

$$v_m(k) = \sum_n v'_m(k - n) \gamma(n)$$

où

$$v'_m(k) = \langle \psi_m(\cdot), \phi_0(\cdot - k) \rangle.$$

Ces derniers produits scalaires peuvent également être aisément calculés. On peut, en effet, obtenir une très bonne approximation de la forme d'onde ϕ_0 à partir de sa séquence génératrice, sur une grille aussi fine que choisie [1]:

$$\phi(\cdot/2^P) = 2^{-P/2} u * \uparrow_2 [u] * \dots * \uparrow_{2^{P-2}} [u] * \uparrow_{2^{P-1}} [u]. \quad (10)$$

où $\uparrow_2 [u]$ est l'opérateur qui insère un 0 entre chaque coefficient de la séquence u .

3. Le jeu d'équations (8) ainsi que les définitions des filtres (équations (9)) indiquent clairement la filiation de cet algorithme avec l'algorithme à trous [14]. Dans notre version, cependant, on force l'usage d'ondelettes construites à partir d'AMR et on insère le nombre désiré de voies par octaves pour obtenir un échantillonnage aussi fin que souhaité de l'axe des échelles.

4. Comme tout algorithme à banc de filtres dédié à l'analyse de signaux à temps continu, celui-ci requiert une phase d'initialisation, matérialisée par l'équation (7). En pratique, on ne connaît le signal x qu'à travers ses échantillons $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Nous avons proposé dans [3] une méthode qui permet d'obtenir une excellente approximation des $\{ca_x(k, 0)\}_{k \in \mathbb{Z}}$,

$$ca_x(k, 0) = \sum_n x_n \phi_0(n - k)$$

et donc de réaliser, de manière efficace, cette étape préliminaire.

5. Des implantations de décompositions en ondelettes qui reposent sur des idées similaires ont été développées et proposées récemment et indépendamment par d'autres auteurs, [12] par exemple, et, [18, 17] où un usage particulièrement judicieux de la multirésolution spline est effectué.

3 Scalogrammes réalloués et algorithme rapide

La réallocation. La réallocation est une technique générale, dont l'objectif est d'améliorer la lisibilité des représentations énergétiques et qui consiste à déplacer la valeur d'une distribution du point où elle a été calculée vers un autre point qui est davantage représentatif de la distribution locale de l'énergie [5, 6, 9]. Initialement proposé et développé dans le contexte des représentations temps-fréquence, cette technique a récemment été étendue aux distributions temps-échelle. Nous nous intéressons plus particulièrement au cas particulier du scalogramme (module carré de la décomposition en ondelettes), associé à une ondelette ψ .

Implantation de la réallocation. Pour implanter pratiquement une décomposition en ondelettes, il est évidemment nécessaire d'échantillonner l'espace de représentation temps-échelle, et, donc, de choisir le niveau de redondance de la transformée [7]. Puisque la technique de réallocation est susceptible de déplacer de l'énergie de n'importe quel point du plan vers n'importe quel autre, elle requiert un échantillonnage dense du plan temps-échelle (i.e., un niveau de redondance et donc un coût de calcul élevé). De plus, on

montre [8] que le calcul de la réallocation nécessite d'introduire en parallèle deux autres analyses reposant sur les ondelettes $(\mathbf{T}\psi)(t) \equiv t.\psi(t)$ et $(\mathbf{D}\psi)(t) \equiv d\psi(t)/dt$, puis de combiner les informations qu'elles fournissent d'une façon adéquate. Pour ces deux raisons, forts niveaux de redondance et transformées multiples, les préoccupations de coût de calcul sont donc d'importance.

L'algorithme. Pour obtenir une implantation rapide de la réallocation, on va évidemment chercher des approximations multirésolution pour chacune des M ondelettes déduites des trois ondelettes initiales ψ , $\mathbf{D}\psi$ and $\mathbf{T}\psi$. Cela signifie rechercher les $3M$ séquences,

$$\left. \begin{aligned} v_m(k) &= \langle \psi(\cdot), \phi_0(\cdot - k) \rangle \\ v_m^{\mathbf{D}}(k) &= \langle \mathbf{D}\psi(\cdot), \phi_0(\cdot - k) \rangle \\ v_m^{\mathbf{T}}(k) &= \langle \mathbf{T}\psi(\cdot), \phi_0(\cdot - k) \rangle \end{aligned} \right\}$$

Des considérations identiques à celles de la partie précédente (remplacement des coefficients vrais par des coefficients approchés et structure réursive) permettent d'obtenir les équations qui gouvernent l'algorithme de réallocation rapide,

$$\left. \begin{aligned} ca_x(k, j) &= \sum_n u(-n) ca_x(j - 1, 2^{j-1}k - n) \\ \tilde{T}_x^{(\psi)}(k, a_{j,m}) &= \sum_n v_m(-n) ca_x(j - 1, 2^{j-1}k - n) \\ \tilde{T}_x^{(\mathbf{D}\psi)}(k, a_{j,m}) &= \sum_n v_m^{\mathbf{D}}(-n) ca_x(j - 1, 2^{j-1}k - n) \\ \tilde{T}_x^{(\mathbf{T}\psi)}(k, a_{j,m}) &= \sum_n v_m^{\mathbf{T}}(-n) ca_x(j - 1, 2^{j-1}k - n) \end{aligned} \right\}$$

De nouveau, elles peuvent être réexprimées par des convolutions à temps discret,

$$\left. \begin{aligned} ca_x(k, j) &= \sum_n h^j(n) * ca_x(k - n, j - 1) \\ \tilde{T}_x^{(\psi)}(k, a_{j,m}) &= \sum_n g_m^j(n) ca_x(k - n, j - 1) \\ \tilde{T}_x^{(\mathbf{D}\psi)}(k, a_{j,m}) &= \sum_n g_m^{d,j}(n) ca_x(k - n, j - 1) \\ \tilde{T}_x^{(\mathbf{T}\psi)}(k, a_{j,m}) &= \sum_n g_m^{t,j}(n) ca_x(k - n, j - 1) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

où les filtres h^j , g_m^j , $g_m^{d,j}$ et $g_m^{t,j}$ sont définis respectivement par les u , v_m , $v_m^{\mathbf{D}}$ et $v_m^{\mathbf{T}}$ respectivement, comme dans l'équation (9). L'algorithme pyramidal de réallocation rapide est présenté Figure 1.

Il est important de remarquer de plus que l'usage d'une **unique** AMR pour approximer les $3M$ ondelettes produit un supplément de réduction de coût de calcul puisqu'il suffit de calculer une seule séquence d'approximation pour les trois transformées. Toutes les remarques de la partie précédente restent valables. Certaines illustrations de [8] ont été produites avec ces algorithmes.

Multirésolutions spline. Tous les résultats énoncés jusqu'ici sont valides quel que soit l'AMR choisie. Dans le cas des AMR splines [15], la phase de triple approximation va se trouver simplifiée. La fonction d'échelle *naturelle* ϕ_0 de l'AMR spline d'ordre n est la convoluée n -ième $\beta^{(n)}$ de la fonction porte Π_1 ($\Pi_1(t) = 1$, si $0 \leq t < 1$, et $\Pi_1(t) = 0$, sinon). Elle se trouve connectée à la fonction d'échelle de la multirésolution d'ordre $n - 1$ par une relation de dérivation [16]. De cette relation, on peut montrer que les $v_m^{\mathbf{T}}$ and $v_m^{\mathbf{D}}$ s'obtiennent directement à partir des v_m . Il n'est donc pas nécessaire d'appliquer trois fois la procédure



d'approximation.

$$\begin{aligned} v_m(k) &= \sum_p b_{(n)}^{-1}(k-p)\psi_m(p) \\ v_m^{\mathbf{T}}(k) &= \sum_p b_{(n)}^{-1}(k-p)p\psi_m(p) \\ v_m^{\mathbf{D}}(k) &= \sum_{p,n} b_{(n)}^{-1}(k-p-n)c_{(n-1)}(n) \dots \\ &\quad \dots (v_m(p+1) - v_m(p)) \end{aligned}$$

où $b_{(n)}(k) = \beta^{(n)}(t = k)$ et $c_{(n)}(k) = \beta^{(n)}(t = k - 1/2)$ [16].

Transformées à fenêtres multiples. Cette méthode d'approximation de motifs d'analyse par projection orthogonale dans une AMR peut être étendue à l'implantation de transformées à fenêtres multiples, dont l'objectif est d'améliorer l'analyse du signal par la confrontation des représentations produites par ces différentes fenêtres. Le cadre multirésolution fournit à la fois un cadre très souple pour l'approximations des motifs élémentaires et très efficace pour l'implantation des transformées.

Références

- [1] ABRY, P., ALDROUBI, A.: "Designing multiresolution analysis-type wavelets and their fast algorithms," *J. Fourier Anal. Appl.* (à paraître 1995).
- [2] ABRY, P., ALDROUBI, A.: "Semi- and Bi- orthogonal MRA-type Wavelet Design and their Fast Algorithms," *Proc. SPIE Conf.*, San Diego, 1995.
- [3] ABRY, P., FLANDRIN, P.: "On the initialization of the discrete wavelet transform," *IEEE Signal Proc. Lett.* **SPL-1**, pp. 32-34, 1994.
- [4] ALDROUBI A., UNSER, M.: "Families of multiresolution and wavelet spaces with optimal properties," *Num. Func. Anal. Opt.*, Vol. 14, pp. 417-446, 1993.
- [5] F. AUGER, P. FLANDRIN, "Generalization of the reassignment method to all bilinear time-frequency and time-scale representations," *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc. ICASSP-94*, pp. IV-317-320, Adelaide, 1994.
- [6] F. AUGER, P. FLANDRIN, "Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 43, No 5, pp. 1068-1089, 1995.
- [7] I. DAUBECHIES, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [8] P. FLANDRIN, E. CHASSANDE-MOTTIN, "Sur la réallocation des scalogrammes," 15ème Coll. GRETSI, Juan les Pins, 1995.
- [9] K. KODERA, C. DE VILLEDARY, R. GENDRIN, "A new method for the numerical analysis of time-varying signals," *Phys. Earth Plan. Int.*, No. 12, pp. 142-150, 1976.
- [10] MALLAT, S.: "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. II(7), pp. 674-693, 1989.
- [11] MEYER, Y., *Ondelettes et opérateurs*, Hermann, 1990.

- [12] MAES, S.: "A fast quasi-continuous wavemet transform algorithm," *Coll "Temps-fréquence, Ondelettes et Multirésolution"*, pp. 31.1-31.4, INSA Lyon, 1994.
- [13] RIOUL, O., DUHAMEL, P.: "Fast Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transforms," *IEEE Trans. Info. Theory*, Vol. 38, No 2, pp.569-586, 1992.
- [14] SHENSA M.J.: "The discrete wavelet transform: wedding the a trous and Mallat algorithms", *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 40, No. 10, pp. 2464-2482, 1992.
- [15] UNSER, M., ALDROUBI A., EDEN M., "A family of polynomial spline wavelet transforms," *Signal Processing*, Vol. **SP 30**, pp.141-162, 1993.
- [16] , UNSER, M., ALDROUBI A., EDEN M., "B-Spline Signal Processing: Part I-Theory", *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 41, pp. 821-833, 1993.
- [17] VRHEL, M.J., LEE, C., UNSER, M., "Fast continuous wavelet transform", *ICASSP*, 1995.
- [18] VRHEL, M.J., LEE, C., UNSER, M., "Fast continuous wavelet transform: theory and implementation", submitted to *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 1995.

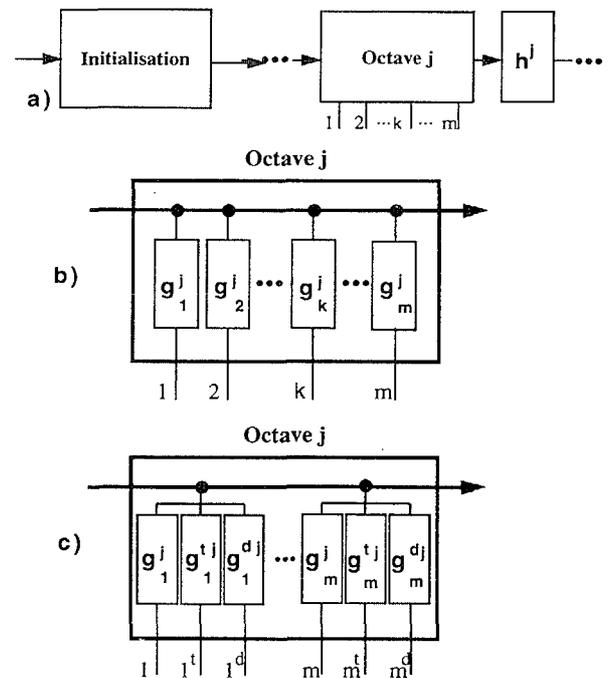


Figure 1: Algorithmes rapides à banc de filtres pour la décomposition en ondelettes et la réallocation. a- schéma général des algorithmes: le calcul des coefficients de la décomposition à l'octave $j + 1$ s'obtient à partir de l'approximation à l'octave j plutôt qu'à partir du signal lui-même, d'où la réduction du coût de calcul. b- cellule de l'octave j pour une transformée en ondelettes simple. c- cellule de l'octave j pour la réallocation, elle fait usage de trois filtres en parallèle. Les filtres utilisés sont dits à trous: les filtres de l'octave j se déduisent de ceux de l'octave $j - 1$ par insertion d'un 0 entre chaque échantillon.