



SÉPARATION ADAPTATIVE DE SOURCES BINAIRES À L'AIDE D'UN RÉSEAU DE NEURONES NON LINÉAIRES BOUCLÉS

Zied MALOUCHE, Odile MACCHI et Eric MOREAU

Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS - ESE
Plateau de Moulon 91192 Gif-sur-Yvette
Groupement de Recherche TDSI du CNRS

RÉSUMÉ

L'utilisation de structures linéaires et de lois d'adaptation mettant en jeu des non linéarités d'ordre quatre a été à l'origine de nombreux résultats intéressants en séparation non supervisée de sources [1][2]. Ces performances n'auraient pas été atteintes sans que des hypothèses a priori sur les distributions des sources et leur indépendance soient faites. Dans cet article, on utilise une structure à base de neurones non linéaires bouclés. En rajoutant l'hypothèse de sources binaires, la qualité de séparation se voit améliorée et la robustesse du système vis-à-vis des fluctuations des paramètres du mélange et de la présence d'un bruit additif est nettement augmentée.

ABSTRACT

The use of linear structures and adaptations with fourth order nonlinearities led to a lot of interesting results in unsupervised source separation [1][2]. These performances wouldn't be reached without the a priori hypotheses on independency of the sources and on their distributions. In this paper the case of a nonlinear feedback neurone structure is considered. Thanks to the additional hypothesis that the sources are binary, the separation quality is improved and robustness of the system towards fluctuations of the mixture parameters and towards additive noise is clearly increased.

1. INTRODUCTION

La séparation de sources est un domaine de grande importance en télécommunications. Ses applications potentielles touchent non seulement le traitement d'antennes mais aussi les communications radio-mobiles. En effet, on rencontre souvent dans ces deux domaines des problèmes de mélanges linéaires émis par des sources statistiquement indépendantes. Il a été montré par Héroult et Jutten et développé dans [1][3] que deux sources inconnues, globalement sous-gaussiennes, indépendantes, centrées et de distributions symétriques mélangées linéairement peuvent être séparées d'une manière adaptative non supervisée en utilisant une structure bouclée de neurones linéaires et une adaptation du type anti-Hebb. Toutefois un problème de causalité se pose pour le calcul des sorties. Dans [2][3] cette difficulté a été levée en adoptant une structure linéaire directe pour les neurones.

Dans cet article on traite le cas de deux sources binaires. Cet a priori plus fort sur les statistiques des sources permet de choisir une structure encore plus adaptée et par conséquent plus performante. Les neurones de la structure bouclée comprennent la nonlinéarité signe dans la boucle, tout en gardant la même loi d'adaptation que dans [1]. Cette nouvelle structure présente plusieurs avantages :

- elle permet la restitution parfaite des sources dès que l'indépendance est atteinte pour les potentiels,
 - elle améliore la robustesse du système vis-à-vis des fluctuations des paramètres du mélange et du bruit qui peut s'ajouter au mélange,
 - elle augmente la vitesse de convergence de l'algorithme.
- Nous traitons successivement l'absence et la présence d'un bruit additif dans les observations. Une étude est faite des points séparants et de leur stabilité vis-à-vis de l'algorithme

adaptatif en y associant des domaines de séparation. Les simulations viennent comparer les performances de cette structure à celles de la structure linéaire bouclée. Le modèle de mélange considéré dans cet article est un modèle linéaire avec bruit. Le cas de deux sources est décrit par la relation suivante :

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad (1)$$

$\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ est le vecteur des observations,

$\mathbf{a} = [a_1, a_2]^T$ est le vecteur des deux sources indépendantes, binaires et centrées. On peut sans perte de généralité les supposer de puissance unitaire de sorte que

$$a_i = \pm 1 \quad (2)$$

avec des probabilités $\frac{1}{2}$. $\mathbf{G} = (g_{ij})$ est la matrice de mélange supposée carrée, inversible et inconnue, enfin $\mathbf{b} = [b_1, b_2]^T$ est le vecteur bruit constitué de deux composantes centrées indépendantes et de même puissance σ^2 . Le nombre de capteurs est donc égal au nombre de sources ce qui veut dire que le nombre de sources a été estimé au préalable.

Le problème de séparation de sources consiste à restituer les sources a_i à un gain et une permutation près. Pour cela on considère un système \mathbf{S} non linéaire à deux sorties y_i :

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Il faut donc identifier les paramètres de ce système d'une manière adaptative non supervisée, de sorte qu'à la convergence on ait $\mathbf{y} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{P}\mathbf{a}$, $\mathbf{\Lambda}$ étant une matrice diagonale et \mathbf{P} étant une matrice de permutation. Pour résoudre ce problème on ne dispose que des observations ainsi que l'information a priori sur l'indépendance et la distribution des deux sources.



2. NOUVELLE STRUCTURE NON LINÉAIRE

La structure utilisée est un réseau bouclé de deux neurones non linéaires (Fig1). Les grandeurs z_i sur la figure sont traditionnellement appelées potentiels. La fonction $f(\cdot)$ est une non linéarité adaptée à l'alphabet (2) émis par ces sources. En choisissant la fonction particulière $f(z) = \text{signe}(z)$, il a été montré dans [4] que l'indépendance de z_1 et z_2 implique la restitution par les y_i des sources $a_i = \pm 1$ à une permutation et un signe près.

La relation entrée $\mathbf{x} \rightarrow$ sortie \mathbf{y} est de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{H}f(\mathbf{z}) \\ \mathbf{y} = f(\mathbf{z}) \end{cases}, \quad (4)$$

$$\mathbf{H} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & h_{12} \\ h_{21} & 0 \end{bmatrix}, f([\dots]^T) \triangleq [f(\cdot), f(\cdot)]^T.$$

La solution de l'équation implicite (4) est obtenue par deux méthodes :

- **méthode itérative:**

$$\begin{cases} z_1^k = S(z_1^{k-1}) \\ z_2^k = x_2 + h_{21}f(z_1^k) \end{cases} \quad (5)$$

$$S(z) \triangleq x_1 + h_{12}f\{x_2 + h_{21}f(z)\}. \quad (6)$$

Cette procédure s'applique à toute non linéarité $f(\cdot)$ en particulier à la fonction *signe*. Elle converge en moins de trois itérations. On montre à partir de la résolution de l'équation implicite $z = S(z)$ qu'au moins un couple et au plus deux couples différents de solutions (z_1, z_2) vérifient l'équation (5). Par conséquent, il y a une ou deux solutions pour la sortie \mathbf{y} du système.

- **méthode par détection:** adaptée à la non linéarité $f(z) = \text{signe}(z)$. Elle consiste à vérifier toutes les combinaisons de valeurs des y_i dans l'ensemble $\{-1, 1\}$, et à retenir celles qui vérifient le système d'équations (4).

Il est clair que les éléments $(g_{11}, g_{21}); a_1$ d'une part et $(-g_{11}, -g_{21}); -a_1$ d'autre part génèrent les mêmes observations x_1, x_2 . Il est donc impossible de retrouver le signe des sources. De même on ne peut retrouver leur ordre. Sans perte de généralité, on supposera donc¹

$$g_{11} > 0, \quad g_{22} > 0, \quad g_{11}g_{22} \geq |g_{12}g_{21}|. \quad (7)$$

Dans la suite on note

$$\varepsilon_{12} \triangleq \text{signe}(g_{12}); \quad \varepsilon_{21} \triangleq \text{signe}(g_{21}). \quad (8)$$

3. DOMAINES DE SÉPARATION

3.1. En absence de bruit

Dans ce paragraphe le bruit est nul. D'après (2), on montre aisément [4] qu'il existe exactement deux points \mathbf{h}_1 et \mathbf{h}_2 séparants pour les potentiels :

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 &= [-g_{12}, -g_{21}]^T \\ \mathbf{h}_2 &= [-\varepsilon_{21}g_{11}, -\varepsilon_{12}g_{22}]^T \end{aligned} \quad (9)$$

qui correspondent aux sorties

1. Il est aisé de voir que si $g_{11}g_{22} = 0$, le problème est impossible car \mathbf{G} n'est pas inversible

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= [a_1, a_2]^T \\ \mathbf{y}_2 &= [\varepsilon_{12}a_2, \varepsilon_{21}a_1]^T \end{aligned} \quad (10)$$

et aux potentiels

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= [g_{11}a_1, g_{22}a_2]^T \\ \mathbf{z}_2 &= [g_{12}a_2, g_{21}a_1]^T. \end{aligned} \quad (11)$$

La particularité essentielle que présente cette structure est le fait qu'on ait mieux que des points séparants pour la sortie mais des domaines entiers :

$$\mathcal{H}_1 : \begin{cases} h_{12} \in]-g_{11} - g_{12}, g_{11} - g_{12}[\\ h_{21} \in]-g_{22} - g_{21}, g_{22} - g_{21}[\end{cases}, \quad (12)$$

$$\mathcal{H}_2 : \begin{cases} h_{12} \in]|g_{12}| - \varepsilon_{21}g_{11}, |g_{12}| - \varepsilon_{21}g_{11}[\\ h_{21} \in]-|g_{21}| - \varepsilon_{12}g_{22}, |g_{21}| - \varepsilon_{12}g_{22}[\end{cases}. \quad (13)$$

Pour \mathbf{h} dans ces domaines, les sorties gardent les valeurs données en (10).

3.2. En présence de bruit

En présence des bruits b_i additifs, indépendants, bornés et centrés, les points séparants gardent les mêmes expressions \mathbf{h}_1 et \mathbf{h}_2 sous la condition :

$$|g_{ij}| > |b_k|_{max}, \quad \forall i, j, k \in \{1, 2\}. \quad (14)$$

Les potentiels à la séparation s'écrivent :

$$\mathbf{z}_1^b = \mathbf{z}_1 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{z}_2^b = \mathbf{z}_2 + \mathbf{b}. \quad (15)$$

A ces expressions correspondent les deux sorties inchangées \mathbf{y}_1 et \mathbf{y}_2 .

Les domaines de séparation se rétrécissent à cause du bruit :

$$\mathcal{H}_1^b : \begin{cases} h_{12} \in]-\sqrt{g_{11}^2 - \sigma^2} - g_{12}, \sqrt{g_{11}^2 - \sigma^2} - g_{12}[\\ h_{21} \in]-\sqrt{g_{22}^2 - \sigma^2} - g_{21}, \sqrt{g_{22}^2 - \sigma^2} - g_{21}[\end{cases}, \quad (16)$$

$$\mathcal{H}_2^b : \begin{cases} h_{12} \in]-\sqrt{g_{12}^2 - \sigma^2} - \varepsilon_{21}g_{11}, \sqrt{g_{12}^2 - \sigma^2} - \varepsilon_{21}g_{11}[\\ h_{21} \in]-\sqrt{g_{21}^2 - \sigma^2} - \varepsilon_{12}g_{22}, \sqrt{g_{21}^2 - \sigma^2} - \varepsilon_{12}g_{22}[\end{cases} \quad (17)$$

où σ^2 est la puissance des b_i .

Lorsque le point (h_{12}, h_{21}) est situé dans l'un de ces domaines, les sorties suivent les sources à une permutation et un signe près selon (10), sans être affectées par la présence du bruit dans les potentiels. Cette élimination parfaite du bruit constitue un gain important.

4. ALGORITHME ADAPTATIF

4.1. Loi d'adaptation et points stationnaires

Il a été prouvé dans [4] que l'indépendance des grandeurs z_1 et z_2 n'est obtenue que lorsque le point $\mathbf{h} = [h_{12}, h_{21}]^T$ coïncide avec l'un des points séparants \mathbf{h}_1 ou \mathbf{h}_2 . Par la suite, on a choisi la loi d'adaptation de Héroult et Jutten puisqu'elle est destinée à obtenir l'indépendance de z_1 et z_2 . l'incrément dépend des potentiels des neurones :

$$\Delta h_{ij} = -\mu z_i^3 z_j, \quad \mu > 0, \quad i \neq j, \quad h_{ii} = 1, \quad (18)$$



le pas d'adaptation μ étant petit. L'algorithme s'écrit donc :

$$\begin{cases} \mathbf{z}(\mathbf{n}) = \mathbf{x}(\mathbf{n}) + \mathbf{H}(\mathbf{n}-1)f(\mathbf{z}(\mathbf{n})) \\ \mathbf{y}(\mathbf{n}) = f(\mathbf{z}(\mathbf{n})) \end{cases}, \quad (19)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{n}) = \mathbf{H}(\mathbf{n}-1) + \mu\Delta\mathbf{H}(\mathbf{n}). \quad (20)$$

Les points stationnaires sont les solutions du système :

$$E[\Delta\mathbf{H}(\mathbf{n})] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} E[z_1^3 z_2] = 0 \\ E[z_1 z_2^3] = 0 \end{cases}. \quad (21)$$

Il est simple de vérifier que les points séparants \mathbf{h}_1 et \mathbf{h}_2 sont solutions du système (21) donc ce sont des points stationnaires pour l'algorithme (20). Il est à noter qu'il existe deux autres points stationnaires :

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_3 &= \left[\frac{g_{11}-g_{12}}{\text{signe}(g_{22}-g_{21})}, -\frac{g_{21}+g_{22}}{\text{signe}(g_{11}+g_{12})} \right]^T \\ \mathbf{h}_4 &= \left[-\frac{g_{11}+g_{12}}{\text{signe}(g_{21}+g_{22})}, \frac{g_{22}-g_{21}}{\text{signe}(g_{11}-g_{12})} \right]^T \end{aligned} \quad (22)$$

mais ces deux points ne sont pas séparants.

4.2. Stabilité des points stationnaires

Un développement au premier ordre de l'équation déterministe associée à l'incrément moyen $E[\Delta(\mathbf{h})]$ au voisinage de chacun de ces points stationnaires \mathbf{h}_1 et \mathbf{h}_2 a permis de fixer une condition nécessaire de convergence de l'algorithme qui est une borne supérieure sur le pas d'adaptation μ . C'est la plus petite des deux bornes suivantes :

$$\mu_1 = \frac{\xi_1 - \sqrt{\xi_1^2 - 4\xi_2}}{\xi_2}, \quad \mu_2 = \frac{\xi_3 - \sqrt{\xi_3^2 - 4\xi_4}}{\xi_4} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 3(g_{11}(g_{22}^2 + \sigma^2) + g_{22}(g_{11}^2 + \sigma^2)), \\ \xi_2 &= 2g_{11}g_{22}(4g_{11}^2g_{22}^2 + 3g_{11}^2\sigma^2 + 3g_{22}^2\sigma^2), \\ \xi_3 &= 3(|g_{12}|(g_{21}^2 + \sigma^2) + |g_{21}|(g_{12}^2 + \sigma^2)), \\ \xi_4 &= 2|g_{12}||g_{21}|(4g_{12}^2g_{21}^2 + 3g_{12}^2\sigma^2 + 3g_{21}^2\sigma^2). \end{aligned} \quad (24)$$

Evidemment ce n'est pas une condition suffisante pour la stabilité des points \mathbf{h}_1 et \mathbf{h}_2 . En effet la procédure (5) de calcul des sorties et son initialisation influent sur le comportement de l'algorithme. Il a été montré dans [4] que selon la matrice de mélange \mathbf{G} , trois cas sont à distinguer :

1. $g_{11}g_{12}g_{21}g_{22} < 0$: $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \Phi$ et les deux points séparants sont stables (voir Fig2 avec une matrice $\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,5 & 0,4 \end{bmatrix}$).
2. $g_{11}g_{12}g_{21}g_{22} > 0$ et $(g_{11} - |g_{12}|)(g_{22} - |g_{21}|) > 0$ c-à-d que a_1 est dominant dans l'une des observations et a_2 est dominant dans l'autre : un des domaines est contenu dans l'autre. Un seul point stationnaire séparant est stable (voir Fig3 avec une matrice $\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}$).
3. $g_{11}g_{12}g_{21}g_{22} > 0$ et $(g_{11} - |g_{12}|)(g_{22} - |g_{21}|) < 0$ c-à-d que l'une des deux sources est dominante dans les deux observations : les deux domaines séparants présentent une zone d'intersection qui rend inopérant l'algorithme (18). $\mathbf{h}(\mathbf{n})$ est donc susceptible soit de converger vers les points stationnaires séparants soit d'osciller entre les deux, selon l'initialisation de la procédure itérative. Ce cas est considéré comme instable (voir Fig4 avec une matrice $\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}$).

Il a été montré dans [4] que les points stationnaires \mathbf{h}_3 et \mathbf{h}_4 étaient instables, ce qui évite à l'algorithme de converger vers une des deux solutions non séparantes.

5. SIMULATIONS

Les performances du système sont évaluées pour chaque quantité considérée (par exemple z) à partir de la puissance de l'erreur à l'optimalité (par exemple $z - z_1$). La dégradation de performances en présence d'un bruit blanc gaussien de puissance σ^2 est représentée par la quantité

$$DPB = \frac{E[(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{th})^T(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{th})]}{E[(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{th})^T(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{th})]_{sansbruit}} \quad (25)$$

en fonction du rapport signal sur bruit $1/\sigma^2$, \mathbf{y}_{th} étant la valeur attendue de \mathbf{y} .

Pour le mélange $\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la convergence des potentiels z_i des neurones est meilleure d'environ $3dB$ que dans le cas linéaire $f(z) = z$ (voir Fig5a). Quant à la sortie \mathbf{y} , elle est pratiquement parfaite (Fig5b). Sa convergence est très rapide. Il suffit que les coefficients (h_{12}, h_{21}) du filtre se trouvent dans le domaine de séparation \mathcal{H}_1 ou \mathcal{H}_2 (Figs 2, 3) pour que la sortie restaure parfaitement l'entrée. D'après (Fig6), la détérioration des performances en présence de bruit est nettement moins importante dans le cas non linéaire que dans le cas linéaire. Ceci confirme bien la robustesse du système non linéaire proposé en présence de bruit.

6. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons étudié la séparation de deux sources binaires par un réseau de deux neurones non linéaires bouclés sur une non linéarité du type signe et adaptés selon la règle de Héroult et Jutten. Ce réseau est nettement plus avantageux qu'un réseau linéaire. En effet, il permet une restitution parfaite des sources, une amélioration de la robustesse vis-à-vis du bruit (la non linéarité rend possible l'élimination d'éventuelles composantes de bruit) et de la variation du mélange, enfin il permet une convergence plus rapide vers la solution séparante. Cette structure peut être utilisée pour un nombre quelconque de sources discrètes, en mettant autant de neurones que de sources. L'extension au cas de sources à un plus grand nombre de niveaux se fait en remplaçant la non linéarité par la fonction de décision correspondante.

7. RÉFÉRENCES

- [1] J. Héroult et C. Jutten, "Blind separation of sources, Part I: An adaptive algorithm based on neuromimetic architecture", *Signal Processing*, 24, 1991, pp 1-10.
- [2] E. Moreau and O. Macchi, "Two novel architectures for the self-adaptive separation of signals", *ICC'93, IEEE International Conference on Communication*, Geneva, Switzerland, Vol. 2, pp 1154-1159, May 1993.
- [3] O. Macchi and E. Moreau, "Self-adaptive source separation, Part I: Convergence analysis of a direct linear neural network controlled by the Héroult-Jutten adaptation law", Submitted to *IEEE Transaction on Signal Processing*, May 1994.
- [4] Z. Malouche, "Réseau de neurones et apprentissage non supervisé en séparation adaptative de sources", Rapport de stage de DEA, Juillet 1994.

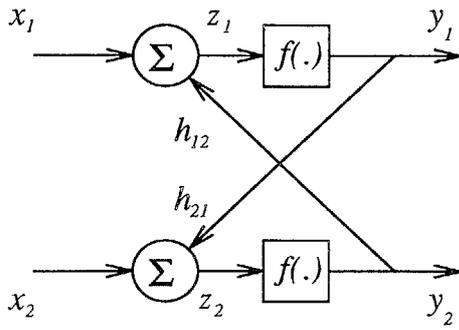


FIG. 1 - Réseau de deux neurones non linéaires bouclés

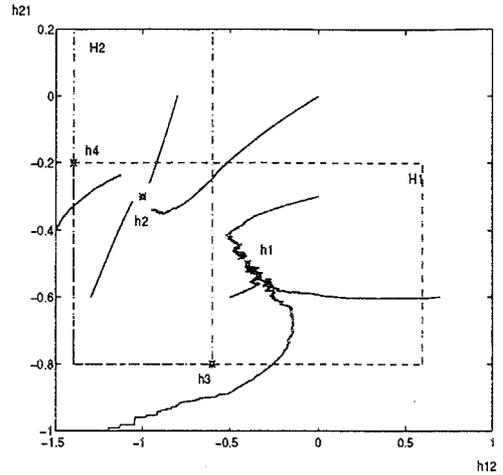


FIG. 4 - Domaines de séparation dans le cas (3) (défaillance de l'algorithme dans la zone d'intersection $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$)

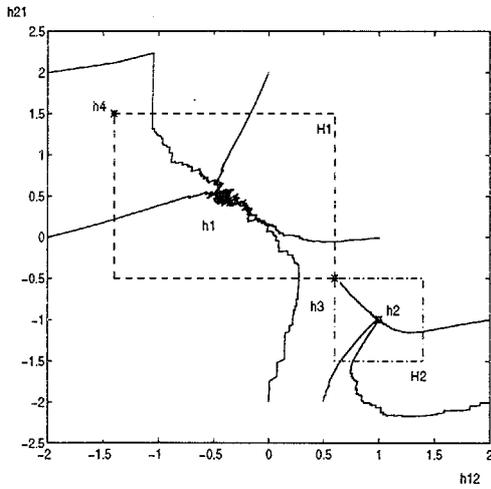


FIG. 2 - Domaines de séparation dans le cas (1) (deux points séparants stables h_1 et h_2)

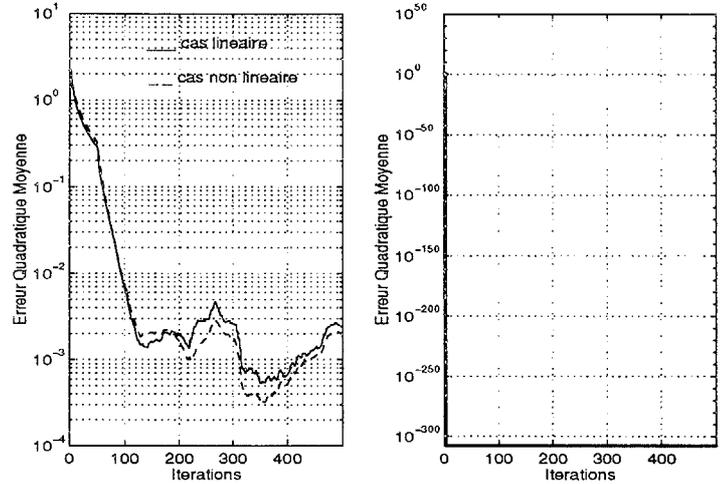


FIG. 5 - a/ Erreur quadratique moyenne sur le potentiel (cas non linéaire et linéaire) - b/ Erreur quadratique moyenne sur la sortie (cas non linéaire)

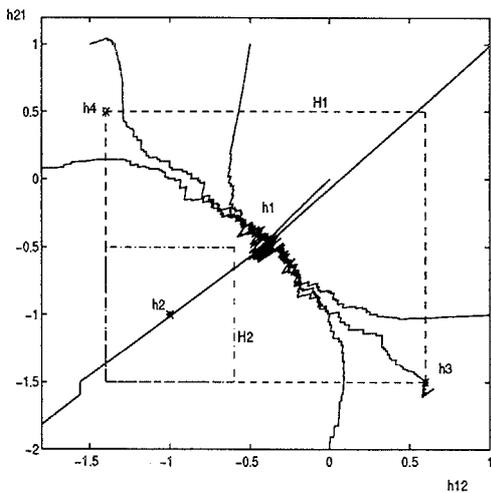


FIG. 3 - Domaines de séparation dans le cas (2) (un seul point stationnaire séparant stable h_1)

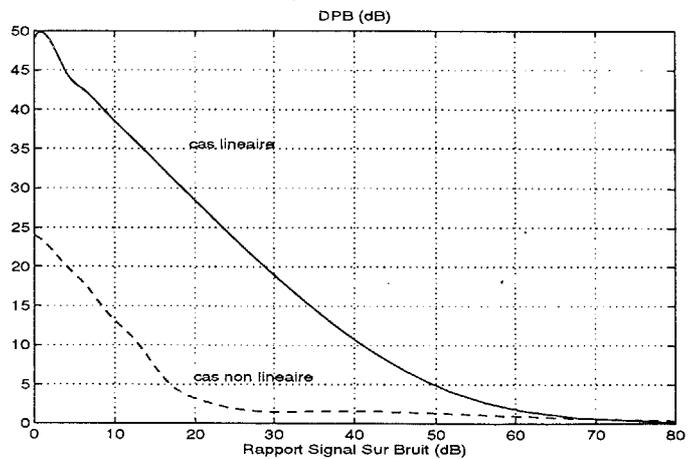


FIG. 6 - Dégradation des performances de séparation en présence de bruit