

# Estimation de temps de retard entre signaux colorés

B. Emile, P. Comon<sup>1</sup>

I3S-CNRS, 250 av Albert Einstein, F-06560 Sophia-Antipolis,

emile@alto.unice.fr comon@alto.unice.fr

## Résumé

De nombreuses méthodes ont été introduites pour estimer le temps retard d'un signal entre deux observations. Ici, nous proposons une méthode temporelle permettant d'estimer les retards différentiels entre  $p$  sources indépendantes, colorées, mélangées et retardées. Les signaux doivent pouvoir être assimilés à des processus MA. Il s'agit d'un problème de séparation de sources large-bande.

## Abstract

A number of different studies have been published proposing algorithms for estimating a single differential time delay between two observations. In this article, a temporal method is proposed that estimates differential delays between  $p$  independent, coloured, mixed, delayed source signals. Those signals are MA processes. This can also be seen as an extension of the so-called sources separation problem.

## 1 Introduction

L'estimation des temps de retard entre plusieurs signaux reçus sur différents capteurs est un problème important dans de nombreux domaines: sismique, biomédical, sonar, radar, télécommunications entre autres. Par exemple pour le sonar en mode passif, le calcul des temps de retard est utilisé pour estimer la position et la vitesse d'une source acoustique.

Le problème général peut se formuler de la façon suivante:  $p$  signaux sources ( $s_1, \dots, s_p$ ) inconnus, statistiquement indépendants, sont reçus sur  $p$  capteurs ( $r_1, \dots, r_p$ ):

$$\begin{aligned} r_1(t) &= s_1(t) + \dots + s_p(t) + v_1(t), \\ r_2(t) &= s_1(t + \tau_{2,1}) + \dots + s_p(t + \tau_{2,p}) + v_2(t), \\ &\dots \\ r_p(t) &= s_1(t + \tau_{p,1}) + \dots + s_p(t + \tau_{p,p}) + v_p(t). \end{aligned}$$

$\tau_{i,j}$  désigne le retard relatif d'arrivée du  $j^{\text{ième}}$  signal sur le  $i^{\text{ième}}$  capteur par rapport au premier capteur pris comme origine des temps,  $v_i$  représente le bruit reçu par le  $i^{\text{ième}}$  capteur, qui sera supposé gaussien et indépendant des signaux sources. L'utilisation des statistiques d'ordre supérieur permet non seulement l'identification des retards mais aussi la réduction de l'influence des bruits gaussiens.

De nombreuses méthodes ont été introduites pour estimer les temps de retard lorsqu'on ne considère qu'un

seul signal et sa copie retardée qui sont reçus sur deux capteurs ( $r_1(t)$  et  $r_2(t)$  avec  $s_i(t) = 0, i > 1$ ). L'originalité de la présente approche est que l'on peut estimer plus d'un retard. Contrairement à [1] et [2], cette méthode a l'avantage de travailler dans le domaine temporel et de pouvoir être développée à plus de 2 retards.

Le problème peut se résumer ainsi: recherche des temps de retard et éventuellement des signaux sources connaissant un nombre fini d'échantillons des signaux reçus. Les statistiques des signaux sources sont inconnues. On suppose seulement qu'ils proviennent du filtrage MA de signaux blancs au sens fort.

Le calcul des temps de retard se ramène dans un premier temps à l'estimation des coefficients d'un modèle MA multivariable monique (section 2) et dans un deuxième temps à l'identification du coefficient  $B_0$  en utilisant l'Analyse en Composantes Indépendantes (section 3).

## 2 Identification du modèle MA

### 2.1 Présentation du problème

Le cas de  $p$  signaux sources est exposé. On suppose qu'ils proviennent du filtrage de  $p$  bruits blancs indépendants par des filtres MA de taille identique  $q$ .

$$s_j(t) = \sum_{k=0}^q a_{j,k} \epsilon_j(t-k). \quad (1)$$

Les signaux  $\epsilon_j(t)$  ( $1 < j < p$ ) sont des signaux blancs indépendants, non-gaussiens, de moyenne nulle.

On considère maintenant les  $p$  capteurs  $r_i(t)$  recevant les  $p$  signaux  $\epsilon_j(t)$  sans ajout de bruit (si le bruit est gaussien, l'utilisation des cumulants d'ordre 4 nous permettra de ne pas en tenir compte pour de grands temps

<sup>1</sup>aussi à Thomson-sintra, B.P.157, F-06903 Sophia-Antipolis Cedex



d'intégration):

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^q a_{j,k} \epsilon_j(t-k), \\ r_2(t) &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^q a_{j,k} \epsilon_j(t+\tau_{2,j}-k), \\ &\dots \\ r_p(t) &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^q a_{j,k} \epsilon_j(t+\tau_{p,j}-k). \end{aligned} \quad (2)$$

Les retards  $\tau_{i,j}$  n'étant pas entiers, on interpole les  $p$  signaux sources par des sinus cardinaux (théorème d'échantillonnage) pour pouvoir écrire l'équation (2) sous forme d'un modèle MA long. On se place dans le cas discret ( $n$  se substitue à la variable temporelle  $t$ ) et on se limite à une sommation finie sachant que les retards doivent être compris strictement entre les deux bornes de sommation:

$$\epsilon_j(n+\tau_{i,j}-k) = \sum_{r=-m}^{+m} \epsilon_j(n-k-r) \text{sinc}(r+\tau_{i,j}),$$

$\text{sinc}()$  représente le sinus cardinal et  $i, j \in \{1, \dots, p\}$ .

En introduisant ces résultats dans l'équation (2), et en réalisant des permutations de sommations, le système reçu par les capteurs se ramène à un modèle MA non causal multivariable:

$$r_i(n) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=-m}^{q+m} [c_{i,j,k} \epsilon_j(n-k)], \quad i \in [1, p]. \quad (3)$$

La relation entre les coefficients du modèle MA est:

$$c_{i,j,k} = \sum_{r=-m}^m a_{j,k-r} \text{sinc}(r+\tau_{i,j}), \quad (4)$$

pour  $i > 1$  et  $c_{1,j,k} = a_{j,k}$ . Ces relations seront considérées pour  $-m \leq k \leq q+m$  en sachant que pour  $k < 0$  et  $k > q$ ,  $c_{1,j,k} = a_{j,k} = 0$ .

## 2.2 Estimation des retards

### 2.2.1 Solution utilisant l'interpolation

Une fois les coefficients  $c_{i,j,k}$  estimés (paragraphe suivants), les relations précédentes (4) nous permettent de remonter aux retards en estimant les valeurs  $\alpha_{i,j,p} = \text{sinc}(p+\tau_{i,j})$ , par résolution du système surdimensionné suivant pour un retard ( $\tau_{i,j}$ ,  $i > 1$ ):

$$\begin{pmatrix} c_{i,j,-m} \\ \vdots \\ c_{i,j,q+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{j,0} & \dots & a_{j,-2m} \\ \vdots & & \\ a_{j,q+2m} & \dots & a_{j,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{i,j,-m} \\ \vdots \\ \alpha_{i,j,m} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

avec,  $a_{i,j,l} = 0$  pour  $l < 0$  et  $l > q$ .

En écrivant la relation (5) en notation condensée:  $C_{-m,q+m} = A\alpha$ , la solution des moindres carrés nous permettant d'estimer les  $\alpha_{i,j,k}$  est alors donnée par:

$$\alpha = (A^T A)^{-1} A^T C_{-m,q+m}.$$

On peut remonter au retard en cherchant le maximum de la fonction suivante:

$$f(t) = \sum_{l=-m}^m \alpha_{i,j,l} \text{sinc}(t-l) = \sum_{l=-m}^m \text{sinc}(l+\tau_{i,j}) \text{sinc}(t-l).$$

En effet, pour  $m = \infty$ ,  $f(t) = \text{sinc}(t+\tau_{i,j})$ . Cette fonction a son maximum pour  $t = -\tau_{i,j}$ , voir [3]. La même démarche peut être utilisée pour estimer tous les  $\tau_{i,j}$  indépendamment.

### 2.2.2 Solution directe

[3] propose une autre solution basée sur le calcul direct des retards sans optimisation à l'aide de la relation:

$$\tau_{i,j} = -n + \frac{\alpha_{i,j,n-1}}{\alpha_{i,j,n} + \alpha_{i,j,n-1}}, \quad (6)$$

où  $n = \max_r(\alpha_{i,j,r})$ . Cette solution peut aussi être appliquée dans le cas présent.

### 2.2.3 Solution par transformée de Fourier

Soient  $\bar{a}_j(\omega)$  et  $\bar{c}_{i,j}(\omega)$  les transformées de Fourier des échantillons  $a_{j,k}$  et  $c_{i,j,k}$ . Le rapport de ces deux quantités  $\frac{\bar{c}_{i,j}}{\bar{a}_j}$  nous donne l'exponentielle complexe du retard,  $e^{i\omega\tau_{i,j}}$  ( $\bar{c}_{i,j} = \bar{a}_j e^{i\omega\tau_{i,j}}$ ). La transformée de Fourier inverse de  $\bar{c}_{i,j}/\bar{a}_j$  donne un Dirac pour la valeur du retard  $\tau_{i,j}$  ce qui nous permet d'estimer  $\tau_{i,j}$  [4].

## 2.3 Solution du modèle MA

On revient au modèle MA que l'on écrit sous forme vectorielle:

$$r(t) = \sum_{k=-m}^{q+m} B_k \epsilon(t-k), \quad (7)$$

où:  $B_k = [c_{i,j,k}]_{i,j}$ ,  $r(t) = [r_i(t)]_i$ ,  $\epsilon(t) = [\epsilon_j(t)]_j$ .

Le modèle obtenu est un MA vectoriel non causal. On va l'identifier comme dans [5] mais en tenant compte de cette différence. Le problème de la résolution de modèles MA non-causaux a également été vu dans [6]. Les seuls termes connus sont les signaux reçus sur les capteurs,  $r(t)$ . On est donc ramené à un problème d'identification de modèle MA multivariable en aveugle. La résolution directe du modèle MA nécessite la connaissance de  $B_0$ . On fait alors le changement de modèle suivant pour se ramener à un modèle monique:  $w(t) = B_0 \epsilon(t)$ . Un nouveau modèle est alors considéré:

$$r(t) = \sum_{k=-m}^{q+m} A_k w(t-k), \quad (8)$$

avec  $A_0 = I_p$  ( $I_p$ : matrice identité  $p \times p$ ). Les coefficients  $A_k$  et  $w(t)$  sont estimés dans un premier temps, puis l'ACI est utilisée [7] pour retrouver les bons coefficients du modèle,  $B_i$ . Le nouveau processus  $w(t)$  est toujours blanc temporellement mais plus spatialement puisque ses coefficients sont corrélés entre eux:  $w(t) = B_0 \epsilon(t)$ . On se contente de définir son cumulatif pour le retard nul ( $\otimes$  désigne le produit de Kronecker):  $C_w = \text{cum}(w(t) \otimes w(t) \otimes w(t))$ .

Par analogie aux travaux dans [7], on peut écrire :

$$C_{u,v,q,m} = cum \left( \begin{pmatrix} r_1(t+u) \\ r_2(t+u) \\ \dots \\ r_p(t+u) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_1(t+v) \\ r_2(t+v) \\ \dots \\ r_p(t+v) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_1(t+q) \\ r_2(t+q+m) \\ \dots \\ r_p(t+q+m) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t-m) \\ \dots \\ r_p(t-m) \end{pmatrix} \right),$$

Soit  $\bar{C} = unvec_p(C)$ . Grâce à la propriété suivante :  $[F^T \otimes G]vec(X) = vec(GXF)$ , l'équation précédente devient :

$$\bar{C}_{u,v,q,m} = \left[ A_v \otimes \begin{pmatrix} a_{1,q} & \dots & a_{p,q} \\ \dots & & \\ c_{p,1,q+m} & \dots & c_{p,p,q+m} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_{1,0} & \dots & a_{p,0} \\ \dots & & \\ c_{p,1,-m} & \dots & c_{p,p,-m} \end{pmatrix} \right] \bar{C}_w A_u^T.$$

La même relation existe pour  $u = 0$ . La matrice  $A_u$  peut alors être obtenue en combinant les équations où  $u \neq 0$  et  $u = 0$  :

$$\bar{C}_{u,v,q,m} = \bar{C}_{0,v,q,m} A_0^{-T} A_u^T, \quad (9)$$

avec  $-m \leq u, v \leq q$  et  $u \neq 0$ .

En considérant toutes les valeurs que peut prendre  $v$ , on se ramène à un système linéaire. Comme  $v$  est tel que :  $-m \leq v \leq q$ , le système suivant est établi :

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_{u,-m,q,m} \\ \vdots \\ \bar{C}_{u,q,q,m} \end{pmatrix} A_u^{-T} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{0,-m,q,m} \\ \vdots \\ \bar{C}_{0,q,q,m} \end{pmatrix} A_0^{-T}, \quad (10)$$

soit en notations simplifiées :

$$C_u A_u^{-T} = C_0 A_0^{-T}. \quad (11)$$

En utilisant la propriété suivante : si  $GX = C$  alors  $[I_p \otimes G]vec(X) = vec(C)$ , on obtient le système linéaire :

$$[I_p \otimes (C_0 A_0^{-T})]vec(A_u^T) = vec(C_u), \quad (12)$$

qui nous permet d'estimer  $A_u^T$  au sens des moindres carrés, donc avec plus de précision si le nombre des données est faible [5]. La relation (12) nous permet donc d'accéder aux coefficients  $A_k$  du modèle MA définis par la formule (8).

**Remarque :** si  $m$  est inconnu, ou s'il est très différent suivant les retards, on peut se passer de sa connaissance en posant  $C_{u,v,q} = cum\{r(t+u) \otimes r(t+v) \otimes r_1(t) \otimes r_1(t+q)\}$  au lieu de  $C_{u,v,q,m}$ . La résolution est identique à la méthode précédente avec un nombre inférieur d'équations (cette méthode sera appliquée dans les simulations).

## 3 Estimation de $B_0$ par ACI

### 3.1 Présentation

La méthode précédente nous permet donc d'obtenir les coefficients du modèle MA monique,  $A_k$ , dont on peut déduire  $w(t)$ . Les cumulants de  $w(t)$  sont en fait obtenus, ce qui nous suffit pour la suite.

On a  $w(t) = B_0 \epsilon(t)$ , la méthode de l'ACI [7] permet d'obtenir  $B_0$  connaissant  $w(t)$  et sachant que le processus  $\epsilon(t)$  est blanc spatialement et temporellement. D'après (7), nous avons :  $B_k = A_k B_0$ . Les coefficients  $B_k$  se déduisent de cette expression. Il nous reste donc à obtenir  $B_0$  par la méthode de l'ACI.

### 3.2 Analyse en Composantes Indépendantes

Le problème est donc le suivant, connaissant  $w(t) = B_0 \epsilon(t)$ , on cherche à obtenir  $B_0$  sachant que les statistiques de  $\epsilon(t)$  sont inconnues et que les seules conditions que nous imposons sont :  $\epsilon_i(t)$  indépendants et blancs temporellement.

La théorie de l'ACI ayant déjà été étudiée en détail [7], nous allons simplement en rappeler les différentes étapes à l'ordre 2. Comme l'ACI est définie à une permutation près, on pose  $z = P\epsilon$ . On cherche alors à identifier  $A$  tel que  $w(t) = Az(t)$ . Dans un premier temps, on décorrèle les observations en les filtrant par  $L^{-1}$ ,  $L$  étant une racine carrée de la covariance de  $w(t)$ ,  $\bar{w} = L^{-1}w$ . Dans un second temps, on évalue la transformation unitaire,  $Q$ , telle que la variable  $s = Q^H \bar{w}$  soit de composantes deux à deux indépendantes. La dernière étape consiste à normaliser les colonnes de la matrice obtenue, par multiplication d'une matrice diagonale  $\Delta$ . On obtient donc :  $w = LQ\Delta^{-1}z$ .

## 4 Simulations

On se place tout d'abord dans le cas de deux signaux sources. Les deux signaux sources ( $s_1$  et  $s_2$ ) sont deux modèles MA d'ordre 2 ( $q=2$ ). Ils sont les filtrés des séquences  $\epsilon_i$ , i.i.d., uniformes, de moyenne nulle et de variance unité :  $s_i(t) = v_i(t) + a_{1,i}\epsilon_i(t-1) + a_{2,i}\epsilon_i(t-2)$ , avec  $a_{1,1} = -.86$ ,  $a_{2,1} = .74$ , et  $a_{1,2} = -.77$ ,  $a_{2,2} = .59$ . On choisit deux retards non entiers proches de zero :  $\tau_1 = 0.8$ ,  $\tau_2 = 0.2$  ( $m = 2$ ).

On estime tous les  $A_i$  pour  $0 < i \leq q$  à l'aide de la méthode présentée dans le paragraphe 2.3, mais où toutes les équations contenant  $m$  sont supprimées (on a moins d'équation, mais elles sont moins sensibles aux erreurs d'estimations).  $m$  peut alors être inconnu.

Les signaux sont de tailles 5000, et on considère 100 réalisations différentes.

La matrice  $B_0$  est estimée grâce à la méthode de l'ACI, puis on calcule les coefficients  $B_i$ . A partir des coefficients  $B_i$ , on remonte aux retards en utilisant la solution par interpolation présentée au paragraphe 2.2.1; on

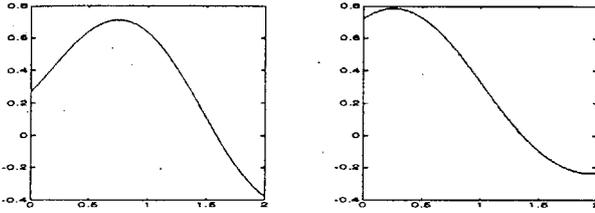


Figure 1: les deux figures représentent les deux fonctions dont on cherche la position des maxima qui correspondent aux retards (0.2 et 0.8).

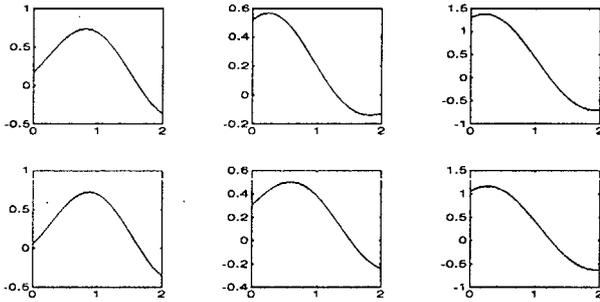


Figure 2: les six figures représentent les six fonctions dont on cherche la position des maxima qui correspondent aux retards.

maximise donc deux fonctions sinus cardinales (figure 1 et tableau 1).

$\tau_1$		$\tau_2$	
moy.	var.	moy.	var.
0.76	0.14	0.24	0.096

Table 1 Moyennes et variances de l'estimation de deux retards pour 100 tirages. Les vraies valeurs des retards sont:  $\tau_1 = 0.8$  et  $\tau_2 = 0.2$ .

Dans le cas de trois signaux sources  $a_{1,1} = -.86, a_{2,1} = .74, a_{1,2} = -.77, a_{2,2} = .59, a_{3,1} = -0.68, a_{3,2} = 0.67$ , on obtient les 6 fonctions à optimiser (figure et table 2).

$\tau_{ij}$	$j$	1		2		3	
		moy.	var.	moy.	var.	moy.	var.
2		0.78	0.24	0.28	0.18	0.17	0.09
3		0.84	0.32	0.61	0.15	0.23	0.16

Table 2 Moyennes et variances pour l'estimation de 6 retards correspondants aux 3 signaux sources. Les vrais retards sont:  $\tau_{21} = 0.8, \tau_{22} = 0.4, \tau_{23} = 0.2, \tau_{31} = 0.9, \tau_{32} = 0.6, \tau_{33} = 0.3$ .

## 5 Conclusion

L'estimation des temps de retard revient donc dans un premier temps à l'identification d'un modèle MA multivariable, puis utilise l'ACI. L'estimation finale des retards peut être calculée directement ou par maximisation d'une fonction. Ce type de méthode a l'avantage

de pouvoir être développé à plus de deux retards et de travailler dans le domaine temporel, donc implicitement en bande large.

## Références

- [1] P. COMON and B. EMILE. Estimation of time delays in the blind mixture problem. In *Proc. EU-SIPCO*, pages 482-485, Edinburgh, Scotland, 1994.
- [2] B. EMILE, P. COMON, and J. LEROUX. Estimation of time delays between wide-band sources. In *Proc. of the IEEE-ATHOS workshop on High-Order Statistics*, Begur, Girona, SPAIN, June 1995.
- [3] Y.T. CHAN, J.M. RILEY, and J.B. PLANT. A parameter estimation approach to time-delay estimation and signal detection. *IEEE Trans. ASSP*, 28(1):8-16, February 1980.
- [4] C.L. NIKIAS and R.PAN. Time delay estimation in unknown spatially correlated noise. *IEEE Trans. ASSP*, 36(11):1706-1714, November 1988.
- [5] P. COMON. MA identification using fourth order cumulants. *Signal processing*, 26:381-388, 1992.
- [6] A. SWAMI, G. GIANNAKIS, and S. SHAMSUNDER. Multichannel ARMA processes. *IEEE Trans. ASSP*, 42(4), April 1994.
- [7] P. COMON. Analyse en composantes indépendantes et identification aveugle. *Traitement du signal*, 7:435-450, 1990.