

**PERFORMANCES DES ANTENNES A CONJUGAISON DE PHASES**

Franck FLORIN

THOMSON-CSF RCM, Centre d'Electronique de Brest, 1 rue de la 10ème DFL, 29283 Brest cedex, France

**RÉSUMÉ**

Les antennes actives à conjugaison de phase exploitent l'invariance de la propagation afin de s'autofocaliser d'elles-mêmes en présence d'une cible ponctuelle unique. Elles utilisent un processus itératif qui permet au lobe de directivité à l'émission de converger en principe vers le lobe de directivité d'une antenne pointé vers la cible. Toutefois la réelle performance du processus n'avait jamais été étudiée. On reprend ici les principaux résultats de [4] qui montrent que les performances de l'antenne à conjugaison de phase sont davantage liées au rapport signal sur bruit initial qu'au nombre d'itérations.

**1. INTRODUCTION**

Le principe de l'antenne "rétrodirective" (encore appelée "antenne à conjugaison de phase" ou "miroir à retournement temporel" [1][2,3]) consiste, à partir d'une même antenne fonctionnant à l'émission et à la réception, à réémettre, en créant un processus itératif, les signaux reçus inversés dans le temps (ou après avoir conjugué les phases en monochromatique).

Lorsque l'antenne est en présence d'une cible ponctuelle unique et au bout d'un certain nombre de récurrences (par "récurrence" on entend un cycle émission-réception), l'onde émise se trouve focalisée dans la direction de la cible.

L'intérêt de l'antenne rétrodirective réside dans son aptitude à s'auto-focaliser, indépendamment de la forme du front d'onde.

On évalue ici ses performances en fonction du rapport signal sur bruit et du nombre de récurrences.

Deux cas sont abordés, qui diffèrent par les hypothèses faites sur le bruit de mesure :

Dans le premier cas (§4), le bruit est spatialement blanc, indépendamment du signal émis.

Dans le second cas (§5), le bruit est généré par un champ diffus. Il se comporte comme de la réverbération ou du fouillis ("clutter") et modifie sa corrélation spatiale au fur et à mesure que l'émission devient directive.

**2. FORMULATION ALGEBRIQUE DU PRINCIPE DE RETRODIRECTIVITE**

On dispose d'une antenne à la fois émettrice et réceptrice,

**ABSTRACT**

Active phase conjugation arrays exploit the direct and reverse invariant ways of propagation in order to self-focus, in the presence of one only point target. The used process allows the transmitting array beam to converge in principle on the target direction. However the real performance of the process had never been studied. We recall here the results of [4] which show that the performance of the phase conjugation array is much more dependent of the initial signal to noise ratio than of the number of iterations.

composée de M capteurs de gains identiques normalisés à 1 à la réception. On ne considère que le problème monochromatique. On rappelle que dans ce cas le front d'une onde plane arrivant dans la direction  $\theta$  est représenté par son vecteur directionnel associé  $\mathbf{a}(\theta)$ .

On suppose que l'on dispose d'un modèle de distribution spatiale des vecteurs directionnels paramétré par la variable  $\theta$ .

On adopte ici l'hypothèse de conservation de l'énergie suivant laquelle la somme des énergies émises dans toutes les directions est égale à l'énergie émise au total :

$$\int \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}(\theta)^* \mu(\theta) = \mathbf{I} \quad (1)$$

Le champ imagé est constitué d'une cible unique représentée par son vecteur directionnel associé  $\mathbf{a}_0$ . ( $\|\mathbf{a}_0\|^2 = M$ )

L'antenne émet un signal dont la puissance est fixée et constante. Les phases d'émission sur les différents capteurs sont les conjuguées des phases reçues. Ainsi, si le vecteur  $\mathbf{X}_n$  est le vecteur signal reçu par l'antenne à la récurrence n, l'antenne réémet à la récurrence n+1 :

$$\alpha_{n+1} \mathbf{X}_n^* \quad (2)$$

Le coefficient d'amplification du signal est supposé tel que la puissance émise est normalisée à 1. On pose ainsi:

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{E(\|\mathbf{X}_n\|^2)}} \quad (3)$$

Le vecteur signal reçu à la récurrence n est défini par une relation faisant intervenir explicitement une composante "signal" et une composante "bruit" :



$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbf{X}_n = S_n \mathbf{a}_o + \mathbf{B}_n \quad (4)$$

avec:

$S_n$  = "signal" reçu à la récurrence n.  
 $\mathbf{B}_n$  = "bruit" gaussien centré complexe circulaire de covariance  $\mathbf{\Gamma}_b(n)$ , indépendant de  $\mathbf{X}_n$ .

$S_n$  est donné par la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{n+1} = \beta \alpha_{n+1} (S_n^* M + \mathbf{B}_n^* \mathbf{a}_o) \quad (5)$$

avec la condition initiale:  $S_1 = \beta$ .

$\beta$  = coefficient d'atténuation qui prend en compte la réflexion sur la cible, l'atténuation par divergence et l'absorption des ondes par le milieu.  $\beta$  est un réel.

Si l'on pose:  $E(|S_n|^2) = \gamma_n$

alors on remarque que:

$$E(\mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^*) = \gamma_n \mathbf{a}_o \mathbf{a}_o^* + \mathbf{\Gamma}_b(n) \quad (8)$$

En prenant l'espérance du module au carré de (5) et compte tenu de la définition (3) de  $\alpha_{n+1}$  et de (8), on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \gamma_{n+1} = \beta^2 \frac{\gamma_n M^2 + \mathbf{a}_o^* \mathbf{\Gamma}_b(n) \mathbf{a}_o}{\gamma_n M + \text{Tr}\{\mathbf{\Gamma}_b(n)\}} \quad (9)$$

avec comme condition initiale :  $\gamma_1 = \beta^2$

### 3. CHOIX DU CRITERE DE PERFORMANCE

Pour évaluer les performances de l'antenne à conjugaison de phases, on peut utiliser le rapport signal sur bruit à la récurrence n en sortie de formation de voie à la réception dans la direction de la cible, défini par:

$$\eta_n = \frac{\gamma_n M^2}{\mathbf{a}_o^* \mathbf{\Gamma}_b(n) \mathbf{a}_o} \quad (11)$$

Le rapport signal sur bruit ainsi exprimé caractérise le traitement uniquement dans la direction de la cible et à la réception.

En comparaison, le rapport signal sur bruit en sortie de l'antenne classique (c'est-à-dire omnidirectionnelle à l'émission) est défini par :

$$\eta_o = \frac{|\beta|^2 M}{\gamma_b} \quad (12)$$

On peut aussi utiliser un critère qui caractérise l'émission et prend davantage en compte le comportement de l'antenne dans l'ensemble des directions d'observation, à savoir le gain de directivité de l'antenne à l'émission à la récurrence n+1:

$$G_{n+1} = \frac{\mathbf{a}_o^* E(\mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^*) \mathbf{a}_o}{E(\|\mathbf{X}_n\|^2)} \quad (13)$$

qui vaut encore :

$$G_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\beta^2} \quad (14)$$

$G_{n+1}$  vaut 0 au minimum et M au maximum. Il est bien sûr souhaitable qu'il vaille au moins 1.

### 4. CAS DU BRUIT BLANC SPATIALEMENT

Dans ce paragraphe, on étudie le cas où les échantillons  $\mathbf{B}_n$  sont supposés indépendants d'une récurrence à l'autre et le bruit est blanc spatialement :

$$\mathbf{\Gamma}_b(n) = \gamma_b \mathbf{I}_d \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (15)$$

Au bout de 1 récurrence le rapport signal sur bruit vaut :

$$\eta_1 = \eta_o \quad (16)$$

et le gain de directivité vaut :

$$G_2 = M \frac{\eta_o + 1}{\eta_o + M} \quad (17)$$

On remarque que :

$$G_2 \underset{\eta_o \rightarrow 0}{\sim} 1 \quad G_2 \underset{\eta_o \rightarrow +\infty}{\sim} M$$

A la n-ième récurrence, la relation (9) sur le signal devient:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \gamma_{n+1} = \beta^2 \frac{\gamma_n M + \gamma_b}{\gamma_n + \gamma_b} \quad (20)$$

Le rapport signal sur bruit à la réception à la récurrence n vaut:

$$\eta_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_b} M \quad (21)$$

Le gain de directivité à l'émission à la récurrence n+1 est proportionnel au rapport signal sur bruit :

$$G_{n+1} = M \frac{\eta_{n+1}}{\eta_o} \quad (22)$$

#### Exemple pour 10 capteurs:

Les deux critères de performance choisis précédemment ( $G_n$  et  $\eta_n$ ) sont identiques à un facteur près. Les résultats sont donnés figure 1 sous forme de courbes où l'on trouve en abscisse le rapport signal sur bruit en sortie de l'antenne classique  $\eta_o$  (formule 12) et en ordonnée le gain de directivité à l'émission de l'antenne rétrodirective ( $G_{n+1}$ ). Chaque courbe est évaluée pour un nombre de récurrences fixé. Les nombres en question vont de n=1 à 15 par pas de 1. Le nombre de capteurs de l'antenne (=M) est arbitrairement fixé à 10.

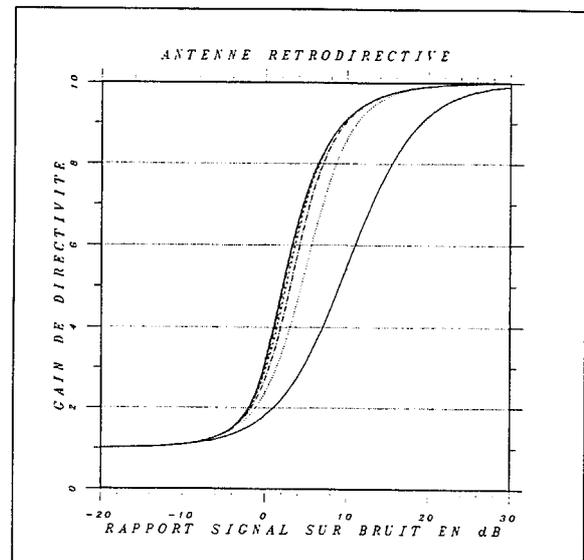


Figure 1 : Gain de directivité, bruit blanc, 10 capteurs

### Comportement asymptotique:

La suite des  $\gamma_n$  définie précédemment (formule 20) est convergente vers  $\gamma_\infty$  qui vaut:

$$\gamma_\infty = \frac{1}{2} \left[ \beta^2 M - \gamma_b + \sqrt{(\gamma_b - \beta^2 M)^2 + 4\gamma_b \beta^2} \right] \quad (23)$$

En posant :

$$\eta_\infty = \frac{\gamma_\infty}{\gamma_b} M \quad (24)$$

$$G_\infty = \frac{\gamma_\infty}{\beta^2} \quad (25)$$

on a le comportement asymptotique suivant :

$$\eta_\infty \underset{\eta_0 \rightarrow +\infty}{\sim} M \eta_0 \quad \eta_\infty \underset{\eta_0 \rightarrow 0}{\sim} \eta_0 \quad G_\infty \underset{\eta_0 \rightarrow +\infty}{\sim} M \quad G_\infty \underset{\eta_0 \rightarrow 0}{\sim} 1$$

C'est-à-dire:

"Lorsque le rapport signal sur bruit tend vers l'infini, l'antenne se comporte comme une antenne parfaitement directive (gain de directivité = M).

Lorsque le rapport signal sur bruit est faible, l'antenne rétrodirective est sans effet (gain de directivité = 1)."

## 5. CAS D'UN BRUIT DE FOUILIS OU DE REVERBERATION

Dans ce paragraphe on s'intéresse au cas où le bruit est généré par un champ uniforme de diffuseurs discrets indépendants:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbf{B}_{n+1} = \int \xi_{n+1}(\theta) \alpha_{n+1} \mathbf{x}_n^* \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}(\theta) \mu(d\theta)$$

avec  $\xi_{n+1}(\theta)$  aléatoire.

Les propriétés de  $\xi_{n+1}(\theta)$  sont supposées telles que:

$$E(\mathbf{B}_{n+1}) = 0 \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_b(n+1) &\doteq E(\mathbf{B}_{n+1} \mathbf{B}_{n+1}^*) \\ &= \gamma_R \int \alpha_{n+1}^2 E(|\mathbf{x}_n^* \mathbf{a}(\theta)|^2) \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}(\theta)^* \mu(d\theta) \end{aligned}$$

avec la condition initiale :

$$\Gamma_b(1) = \gamma_R \mathbf{Id} \quad (33)$$

**A la première récurrence** les équations sont les mêmes que dans le cas du bruit blanc (pas de corrélation spatiale du champ mesurable).

### A la n-ième récurrence

En définissant le rapport bruit sur signal :

$$\mathbf{Z}(n) = \frac{\Gamma_b(n)}{\gamma_n} \quad (34)$$

on peut déduire les relations de récurrence couplées sur le signal et sur le rapport bruit sur signal :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \gamma_{n+1} = \beta^2 \gamma_n \frac{M^2 + \mathbf{a}_0^* \mathbf{Z}(n) \mathbf{a}_0}{(\gamma_n + \gamma_R) M} \quad (35)$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbf{Z}(n+1) = \frac{\gamma_R}{\beta^2} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_0^*) + \mathbf{F}(\mathbf{Z}(n))}{M^2 + \mathbf{a}_0^* \mathbf{Z}(n) \mathbf{a}_0} \quad (36)$$

où  $\mathbf{F}(\cdot)$  est l'opérateur linéaire qui à la matrice  $\mathbf{A}$  associe la matrice  $\mathbf{F}(\mathbf{A})$  définie par :

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \int \mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{A} \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}(\theta)^* \mu(d\theta) \quad (37)$$

D'après (34), la relation (11) sur le rapport signal sur bruit devient :

$$\eta_n = \frac{M^2}{\mathbf{a}_0^* \mathbf{Z}(n) \mathbf{a}_0} \quad (38)$$

### Autre expression des relations de récurrences

$\mathbf{F}(\cdot)$  est défini sur l'espace vectoriel des matrices hermitiennes. Si on admet que  $\text{Tr}\{\mathbf{A}\mathbf{B}^*\}$  définit un produit hermitien pour deux matrices hermitiennes  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , alors on voit que  $\mathbf{F}(\cdot)$  est un opérateur hermitien.

$\mathbf{F}(\cdot)$  est donc diagonalisable sur une base orthonormale  $\{\mathbf{U}_i\}$  de

l'espace vectoriel défini sur  $\mathbb{R}$  des matrices hermitiennes,

espace de dimension  $N = M^2$ . On appelle  $\lambda_i$  les valeurs propres associées aux  $\mathbf{U}_i$ . On définit les  $\alpha_i$  et les  $\beta_i(n)$  comme étant les coefficients des décompositions sur la base des  $\mathbf{U}_i$  respectivement de  $\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{a}_0^*$  et de  $\mathbf{Z}(n)$  :

$$\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_0^* = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{U}_i \quad (39)$$

$$\mathbf{Z}(n) = \sum_{i=1}^N \beta_i(n) \mathbf{U}_i \quad (40)$$

Avec ces définitions on peut écrire les relations de récurrences (35) et (36) sous la forme :

$$\gamma_{n+1} = \beta^2 \gamma_n \frac{M^2 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i(n)}{(\gamma_n + \gamma_R) M} \quad (41)$$

$$\forall i=1, \dots, N \quad \beta_i(n+1) = \frac{\gamma_R}{\beta^2} \lambda_i \frac{\alpha_i + \beta_i(n)}{M^2 + \sum_{j=1}^N \alpha_j \beta_j(n)}$$

On voit en particulier que :

$$(\lambda_i = 0) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \beta_i(n+1) = 0) \quad (43)$$

et que l'on peut se limiter aux valeurs propres non nulles.

Les performances sont données par :

$$G_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\beta^2} \quad (44)$$

$$\eta_n = \frac{M^2}{\sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i(n)} \quad (45)$$

Connaissant  $\alpha_i$  et  $\beta_i(1)$  on peut donc calculer toutes les performances, à partir des relations (41), (42), (44) et (45).

### Comportement asymptotique :

On obtient les comportements asymptotiques suivants :

$$\eta_\infty \underset{\eta_0 \rightarrow +\infty}{\sim} \eta_0 \frac{M^3}{\mathbf{a}_0^* \mathbf{F}(\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_0^*) \mathbf{a}_0} \quad \eta_\infty \underset{\eta_0 \rightarrow 0}{\sim} \eta_0$$



$$G_{\infty} \underset{\eta_0 \rightarrow +\infty}{\sim} M \quad G_{\infty} \underset{\eta_0 \rightarrow 0}{\sim} 1$$

Nota : On remarque que contrairement à ce qui se passe dans le cas du bruit blanc, le gain de directivité à l'émission et le rapport signal sur bruit à la réception ne sont plus proportionnels, même asymptotiquement :  $\eta_{\infty} \neq \eta_0 G_{\infty}$ .

### Etude d'un cas particulier

Dans ce cas particulier on fixe la forme paramétrique du vecteur directionnel et de la mesure associée :

- l'antenne est une ALU (Antenne Linéaire à capteurs Uniformément répartis)
- la mesure est uniforme en  $\sin\theta$  est l'antenne n'est ni sur- ni sous-échantillonnée

Dans ces conditions l'opérateur  $F(\cdot)$  s'écrit :

$$F(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{a}(u)^* \mathbf{A} \mathbf{a}(u) \mathbf{a}(u) \mathbf{a}(u)^* du \quad (51)$$

avec :

$$\mathbf{a}(u) = [e^{-inmu}]_{m=1, \dots, M} \quad (52)$$

On pose également (la cible est par le travers de l'antenne) :

$$\mathbf{a}_0 = [1, 1, \dots, 1]^T \quad (53)$$

Les équations (41) et (42) précédentes se réécrivent de la façon suivante, compte-tenu d'une nouvelle numérotation des éléments propres (on se limite aux valeurs propres utiles) :

$$\gamma_{n+1} = \beta^2 \gamma_n \frac{M^2 + \sum_{i=1}^M \alpha_i \beta_i(n)}{(\gamma_n + \gamma_R) M} \quad (54)$$

$$\forall m=1, \dots, M \quad \beta_m(n+1) = \frac{\gamma_R}{\beta^2} m \frac{\alpha_m + \beta_m(n)}{M^2 + \sum_{j=1}^M \alpha_j \beta_j(n)}$$

avec :

$$\text{et : } \alpha_M = \sqrt{M} \text{ et } \forall m=1, \dots, M-1 \quad \alpha_m = \sqrt{2m} \quad (56)$$

$$\beta_M(1) = \frac{\gamma_R}{\gamma_1} \sqrt{M} \text{ et } \forall m=1, \dots, M-1 \quad \beta_m(1) = 0$$

Ces équations (54) à (57) permettent d'évaluer les performances de l'antenne rétrodirective en présence de fouillis ou de réverbération.

Les résultats sont donnés sous forme de courbes où l'on trouve en abscisse le rapport signal sur bruit en sortie de l'antenne classique  $\eta_0$  (formule 12) et en ordonnée le gain de directivité à l'émission de l'antenne rétrodirective par rapport à l'antenne classique ( $G_{n+1}$ ). Chaque courbe est évaluée pour un nombre de récurrences fixé. Les nombres en question vont de  $n=1$  à 15 par pas de 1. Le nombre de capteurs de l'antenne ( $=M$ ) est arbitrairement fixé à 10. Le champ de cibles est constitué d'une source unique au gisement  $\theta_0 = 0$  degrés par rapport au travers (broad-side) de l'antenne. La propagation est supposée isocélère et la cible située en champ de FRAUNHOFFER de l'antenne (ondes planes). L'index de la cible est variable. Le bruit est un champ de réverbération uniforme.

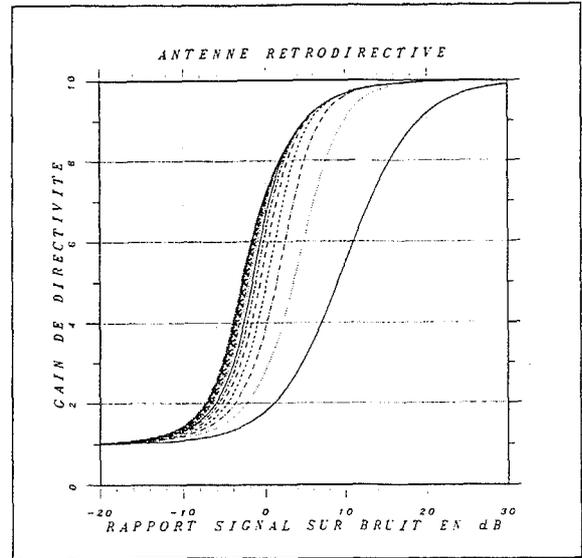


Figure 2 : Gain de directivité, bruit de fouillis ou de réverbération, ALU à 10 capteurs

## 6. CONCLUSION

L'évaluation des performances de l'antenne à conjugaison de phases, par rapport à l'antenne classique, en fonction du rapport signal sur bruit et du nombre de récurrences, dans les cas d'un bruit blanc et d'un bruit de champ diffus uniforme (réverbération ou fouillis), montre clairement la limitation de principe du procédé : le gain de directivité maximum, qui est celui de l'antenne bien pointée sur la cible à l'émission, n'est atteint que pour un rapport signal sur bruit infini, quel que soit le nombre de récurrences ; même pour un nombre infini de récurrences il existe une limite au gain de directivité ; cette limite dépend du rapport signal sur bruit initial.

On s'aperçoit également que les performances sont meilleures dans le cas d'un bruit de fouillis (réverbération) que dans le cas d'un bruit blanc. Ceci semble normal puisque la corrélation spatiale du champ diffus joue en faveur de la focalisation : les diffuseurs situés dans un voisinage proche de la cible tendent à focaliser l'antenne vers la cible.

## 7. BIBLIOGRAPHIE

- [1] B.D. STEINBERG, Principles of Aperture and Array System Design, John Wiley & Sons, New York, 1976
- [2] C. PRADA, J.-L. THOMAS, M. FINK, Miroirs acoustiques à retournement temporel itératif: Théorie et expériences, Colloque GRETSI 93, Juan-Les-Pins, 13 au 16 Sept. 1993, Proceedings pp. 1247-1250.
- [3] M. FINK, C. PRADA, F. WU, Self focusing with "time reversal" acoustic mirrors, Acoustical Imaging, Vol.18, Ed. by H. LEE and G. WADE, Plenum Press, New York, 1991.
- [4] F. FLORIN, Contribution aux traitements d'antennes passif et actif à l'aide du formalisme algébrique. Application à la focalisation. Thèse de Doctorat en Sciences de l'université de Rennes I, mention traitement du signal et télécommunications, 12 Septembre 1994.