



Synthèse de Diagramme de Réseau d'Antenne

par

Optimisation Convexe

Hervé Lebret

ONERA DES/SR BP72 92322 Chatillon Cedex
email: lebret@onera.fr

Résumé

La synthèse de diagrammes de réseaux d'antennes consiste à déterminer les poids complexes d'un réseau d'antennes de manière à satisfaire un certain nombre de spécifications ou à dire si ces spécifications sont infaisables. Il apparaît que ces problèmes peuvent être très souvent mis sous la forme de problèmes d'optimisation convexe qui peuvent être résolus numériquement par des algorithmes tels que les méthodes de points intérieurs.

Abstract

Antenna array pattern synthesis deals with choosing the complex weights of an antenna array in order to satisfy a set of specifications or to say if such a set is feasible. It appears that these problems can often be expressed as convex optimization problems which can be solved numerically with algorithms such as interior point methods.

1 Synthèse de diagrammes de réseaux d'antennes

Si on considère un réseau d'antennes linéaire, il est bien connu que le facteur de réseau $G(\theta)$ en réception ou en émission s'écrit:

$$G(\theta) = \sum_{i=1}^N w_i e^{j \frac{2\pi}{\lambda} x_i \cos \theta}$$

où les poids complexes w_i sont les paramètres. Les autres termes sont la position des éléments x_i , la longueur d'onde λ et la direction angulaire par rapport à l'axe du réseau θ .

En synthèse de diagramme, on cherche en général une loi de poids donnant une forme particulière au module du facteur de réseau comme par exemple le placement de zéros ou la minimisation des lobes secondaires relativement à une direction donnée du lobe principal. On peut également ajouter des contraintes sur les poids ou sur la puissance des signaux.

Si on utilise comme nouveaux paramètres les parties réelle et imaginaire des poids complexes, on peut exprimer le module du facteur de réseau comme une fonction quadratique convexe. De plus de nombreuses contraintes utilisées en synthèse comme celles citées précédemment sont des contraintes linéaires et quadratiques, et par conséquent très souvent convexes. On peut alors exprimer de nombreux problèmes de synthèse sous la forme

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && e^T x \\ & \text{sujet à} && \|A_i x + b_i\|^2 \leq c_i^T x + d_i, \\ & && i = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (1)$$

Ce problème est un programme quadratique convexe à contraintes convexes dont nous allons montrer comment il est

résolu dans le paragraphe suivant.

La synthèse de diagrammes optimaux est un sujet de recherche vieux de plus de quarante ans. Parmi les publications les plus récentes, on pourra noter les travaux de Bucci [1]. Cependant les propriétés de convexité n'ont été que très rarement mentionnées. La synthèse de diagrammes de réseau d'antennes par optimisation convexe est le sujet de la thèse de doctorat [2].

2 Optimisation convexe

Il n'est pas question de revenir ici sur l'importance de l'optimisation convexe. Mentionnons simplement l'ouvrage récent de Hiriart-Urruty et Lemaréchal [3]. Notons également le développement récent de nouveaux algorithmes tels que l'algorithme de l'ellipsoïde et surtout les méthodes de points intérieurs. L'ouvrage de Nesterov and Nemirovsky [4] montre l'intérêt de ces nouvelles méthodes.

Les travaux de S. Boyd [5] montrent que l'optimisation convexe est un outil efficace pour de nombreux problèmes d'ingénierie. S. Boyd s'est particulièrement intéressé à l'automatique, mais l'optimisation convexe peut avoir de nombreuses autres applications. La synthèse de diagrammes de réseaux est une de ces applications prometteuses.

Pour ce travail, nous avons développé de nombreux codes de programmation linéaire et quadratique convexe (à contraintes quadratiques). Nous avons tout d'abord utilisé l'algorithme de l'ellipsoïde qui s'est révélé très lent pour ces applications. Nous avons ensuite travaillé sur des méthodes de points intérieurs primales et primale-duales, en suivant les travaux mentionnés précédemment. Nous avons en particulier développé un code très efficace de programmation quadratique à contraintes quadratiques.



L'optimisation convexe donne des optima globaux. De plus, en utilisant les conditions d'optimalité ou plus généralement, la théorie de la dualité, il est possible d'obtenir des bornes inférieures sur les valeurs optimales et donc une précision absolue sur les résultats obtenus. Enfin il est possible de résoudre également des problèmes de faisabilité permettant de chercher des synthèses faisables, mais pas nécessairement optimales.

Les méthodes de points intérieurs utilisent des fonctions de pénalité qui englobent l'objectif à minimiser et les contraintes qui doivent être satisfaites. Une de ces fonctions possibles est

$$\begin{aligned} \phi(x, l) = & q \log(e^T x - l) \\ & + \sum_{i=1}^L \log \left((c_i^T x + d_i) - \|A_i x + b_i\|^2 \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Dans cette fonction, l représente une borne inférieure de l'optimum recherché et q est un paramètre qui doit être supérieur à L pour assurer la convergence. L'algorithme revient alors à minimiser $\phi(x, l)$ pour des valeurs de l fixes, puis à calculer de nouvelles bornes inférieures l . On trouvera en annexe une description de cet algorithme.

3 Exemples de synthèses

Les applications de l'optimisation convexe à la synthèse d'antenne sont très nombreuses [2]. Elles commencent avec le problème classique de la minimisation des lobes secondaires pour n'importe quel type de réseau d'antennes. Elles peuvent être généralisées à des problèmes incluant des gabarits sur le module du facteur de réseau de formes très variées, des contraintes sur les poids et sur la puissance des signaux. De plus il est très important de signaler que l'on peut ainsi donner les limitations d'un réseau donné grâce à la précision obtenue. Enfin on peut dire si des spécifications (convexes) données sont réalisables ou non. On trouvera de tels exemples dans [6]

3.1 Réjection d'interférence dans les lobes secondaires

On va traiter ici la minimisation du niveau du diagramme dans une région angulaire limitée avec pour contraintes supplémentaires un niveau maximal donné sur l'ensemble des lobes secondaires et principal. Pour ces simulations, on envisage le cas d'un réseau de $N = 64$ antennes séparées d'une demi-longueur d'onde. Dans un premier temps, on va supposer que le signal à traiter se trouve dans la direction 90° alors qu'une interférence se trouve aux alentours de 70° . Une incertitude existant sur la position de cette interférence, on peut chercher à construire un trou "assez large" dans sa direction tout en imposant au niveau du lobe principal de rester inférieur à 0dB et à celui des lobes secondaires de rester inférieur à -12dB.

Pour écrire le problème à résoudre, il est tout d'abord nécessaire de discrétiser les différentes zones angulaires traitées. Ainsi le lobe principal est centré en 90° , a une demi-largeur de 1.7° et les contraintes sont appliquées tous les 0.1° . La zone à minimiser est centrée en 70° , a une largeur de 15° , discrétisée tous les 0.5° . Enfin les lobes secondaires

vont de 0 à 180° tous les degrés à l'exclusion du lobe principal et de la région minimisée.

La figure 1 représente le diagramme obtenu après optimisation par les techniques de points intérieurs. La courbe en pointillé est une référence qui correspond au diagramme standard où tous les poids sont égaux. Pour cette simulation, la précision requise était de 10^{-6} en valeur décimale, si bien qu'il est possible d'affirmer que pour les contraintes données, il n'existe pas de loi de pondération permettant d'obtenir une amélioration du niveau de réjection avec la précision donnée. C'est la propriété de convexité du problème qui permet en effet d'affirmer que l'optimum obtenu est l'optimum global du problème.

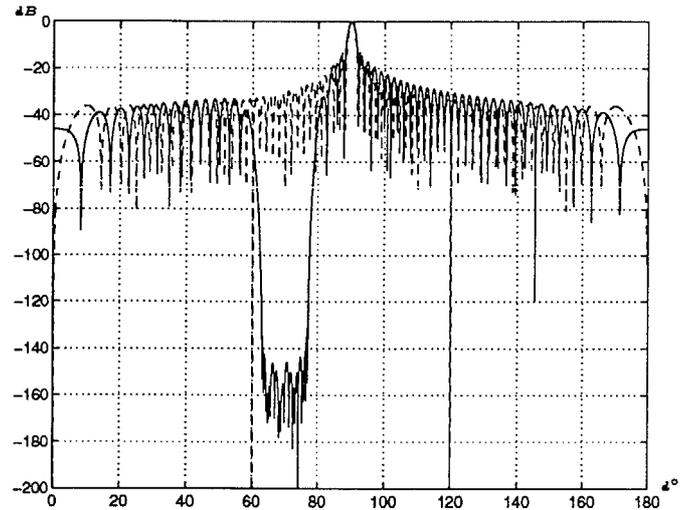


FIG. 1 - Optimisation du niveau de réjection dans les lobes secondaires.

On peut de plus comparer les résultats obtenus à ceux donnés par les techniques d'adaptivité classique qui consistent à minimiser la puissance des signaux reçus par le réseau, à savoir signal utile, interférence et bruit thermique. On obtient par cette technique une solution analytique au problème

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && w^T R w \\ & \text{ sujet à} && G(\theta_0) = 1 \end{aligned}$$

Ainsi si on considère une interférence de niveau 120dB par rapport à un signal normalisé et une densité de bruit thermique par élément σ_i de 10^{-2} nécessaire dans le calcul de la matrice de covariance R , on obtient le diagramme en pointillé sur la figure 2. Le trait plein représente la minimisation du niveau autour de 70° . On constate ainsi que l'on a pu construire une réjection d'interférence efficace aussi bien en niveau qu'angulairement.

Une question importante peut alors être posée: qu'en est-il du rapport signal à bruit obtenu après optimisation. Plus précisément ici, que vaut le rapport:

$$\frac{S}{N} = \left| \sum_{i=1}^N w_i \right|^2 / \sum_{i=1}^N |w_i|^2$$

On sait que ce rapport est optimal pour la conformation standard où tous les poids sont égaux à l'inverse du nombre d'antennes (lorsque $\theta_0 = 90^\circ$ et $G(\theta_0) = 1$, [2]). Le rapport signal à bruit ne peut donc qu'être dégradé. On constate ici que la valeur obtenue par la procédure d'optimisation donne

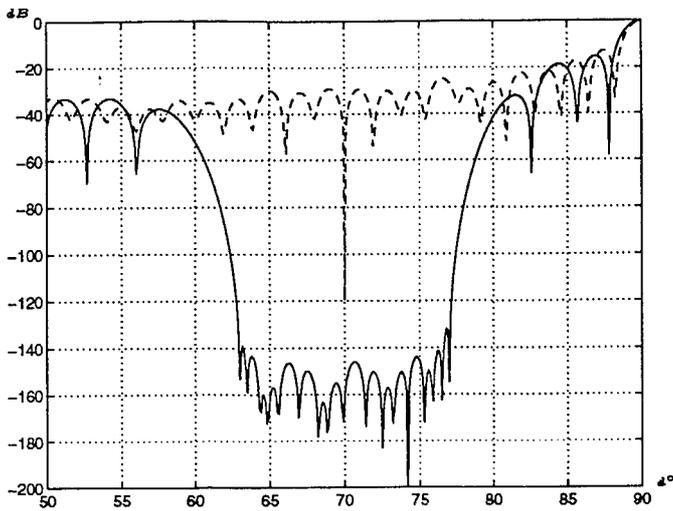


FIG. 2 - Optimisation et adaptivité.

une perte négligeable de 0.6dB. On peut donc en conclure que cette procédure donne d'excellents résultats pour une réjection d'interférence dans les lobes secondaires.

3.2 Réjection d'interférence dans le lobe principal

On vient de montrer tout l'intérêt des techniques d'optimisation convexe pour la réjection d'interférence dans les lobes secondaires. Il est donc d'autant plus intéressant de résoudre le même type de problème pour le cas plus délicat où l'interférence se situe dans le lobe principal. On sait en effet qu'avec les techniques d'adaptivité, on assiste à une remontée des lobes secondaires et une déformation du lobe principal. On va voir ici les informations apportées par les techniques d'optimisation convexe en termes de formes de diagrammes et de dégradation du rapport signal à bruit. De plus l'optimisation convexe donnera des résultats globaux d'optimisation, donc définitifs.

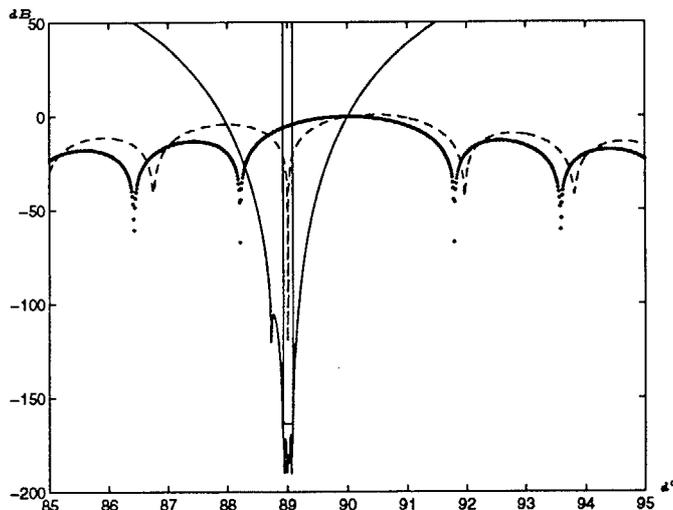


FIG. 3 - Minimisation pour une zone de 0.15 degré.

Ici l'interférence est située à 89° et le signal utile reste à 90°. On va tout d'abord chercher à minimiser le niveau du diagramme sur une largeur de 0.15° autour de cet angle. Il n'y a par contre que peu de contraintes sur les lobes

secondaires et principaux, (le niveau maximal admissible est en effet de 100dB!) Ainsi, on peut espérer connaître le niveau maximal de réjection de l'interférence.

La figure 3 montre un niveau de réjection est de -163dB. Sur cette figure, on distingue le diagramme naturel avec des lobes secondaires à -13dB, le diagramme issu de l'adaptivité en pointillé et le diagramme optimisé en trait plein. Il a été ajouté un gabarit qui indique la largeur de la zone minimisée et le niveau optimal obtenu. Il convient de faire deux remarques. La première est évidente d'après la figure: le niveau des lobes secondaires et principal s'est dégradé, ce qui ne doit pas étonner puisque les contraintes y étaient faibles. De plus le rapport signal à bruit est lui aussi fortement diminué, passant à une valeur de -79dB. On voit donc que dans cette configuration, le problème d'optimisation a été résolu de manière satisfaisante puisque le niveau est fortement minimisé. Il faut cependant ajouter que cette solution n'est pas physiquement réaliste étant donnés les niveaux de lobes secondaires et de rapport signal à bruit obtenus.

Une seconde simulation a été effectuée en élargissant la région à minimiser de 0.15° à 0.3°. Le résultat obtenu est en figure 4. Les contraintes étant plus fortes, il est logique que le niveau optimal soit moins bon. Ici, il vaut -117dB, ce qui reste satisfaisant. De plus le rapport signal à bruit reste fortement dégradé, à -70dB.

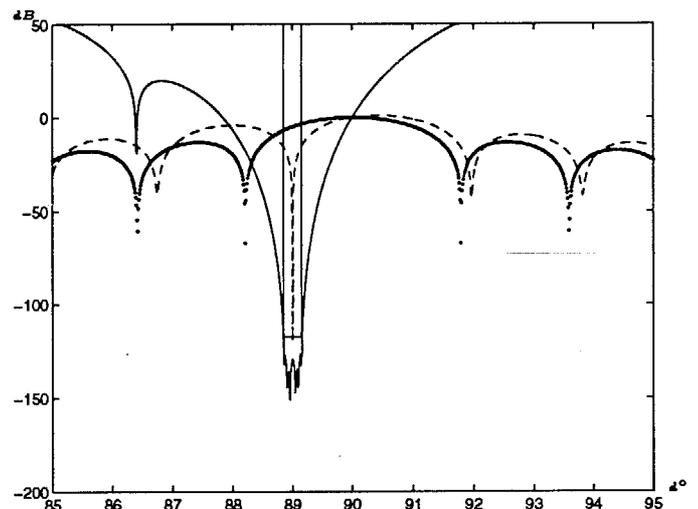


FIG. 4 - Minimisation pour une zone de 0.3 degré.

Terminons cet exposé par deux autres simulations similaires. La première consiste à considérer une interférence de niveau 40dB et à chercher à faire un trou de 60dB d'une largeur de 0.3°. Les méthodes de points intérieurs sont donc utilisées pour résoudre un problème de faisabilité sans optimalité. Le résultat est obtenu aisément en résolvant un problème d'optimisation qui est interrompu dès qu'un point intérieur satisfait le problème. La figure 5 donne le diagramme obtenu. On voit ainsi un trou légèrement supérieur à 60dB, alors que la technique d'adaptivité à placer un trou de 40dB. Ici la dégradation du signal à bruit reste de 34dB. On montre ici un second avantage de l'optimisation convexe par sa capacité à donner des points satisfaisant un ensemble de contraintes.

La dernière simulation concerne à nouveau la minimisation introduite dans ce paragraphe. On a toutefois ajouté des contraintes sur les lobes secondaires et principal. Les

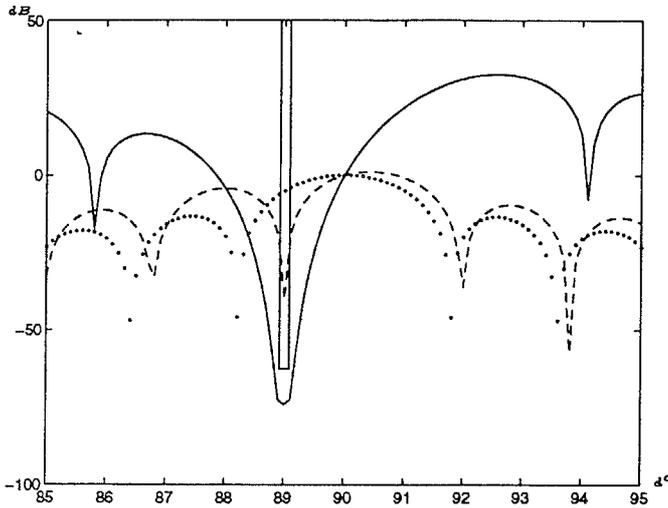


FIG. 5 - Faisabilité d'un trou de 60dB pour une zone de 0.3 degré.

lobes secondaires doivent rester en dessous de -5dB pour les valeurs entières des angles en degrés alors que le lobe principal ne doit pas remonter au dessus de 3dB. De plus la région à minimiser à une taille de 0.6°. Ce problème beaucoup plus contraignant donne une solution illustrée par la figure 6. Le niveau de réjection de 17dB est alors totalement insuffisant même si la perte de rapport signal à bruit n'est que de 11dB. L'ensemble des contraintes appliqué ici est donc trop important.

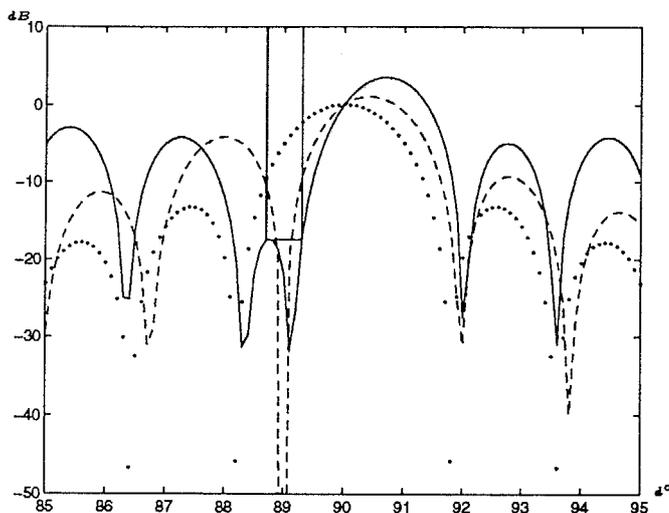


FIG. 6 - Minimisation avec contraintes fortes sur les lobes secondaires (-5dB) et principal (3dB).

4 Conclusion

Cet article a montré comment les techniques d'optimisation convexe permettent de résoudre de nombreux problèmes de synthèse de diagrammes de réseaux d'antennes. Les applications présentées ici étaient focalisées sur la réjection d'interférence en comparant optimisation convexe et techniques d'adaptivité classique. Les simulations montrent ainsi la difficulté à éliminer de manière réaliste une interférence dans le lobe principal.

Il n'en demeure pas moins que le champ d'application de ces techniques est très vaste puisqu'il peut-être étendu à tous les problèmes de synthèse où objectifs et contraintes sont convexes.

A Méthode de points intérieurs

L'algorithme utilisé pour la résolution du problème 1 à partir de la fonction introduite dans l'équation 2 peut être décrit de la manière suivante:

```

 $x_1 \leftarrow$  point initial faisable;
 $l_1 \leftarrow$  borne inférieure initiale;
 $k \leftarrow 0$ ;
répéter {
   $k + 1 \leftarrow k$ ;
  minimiser  $\phi(x_k)$  par:
   $y_1 \leftarrow x_k; i \leftarrow 0$ ;
  répéter {
     $i + 1 \leftarrow i$ ;
    calculer  $v_i$  direction de Newton de  $\phi(y_i)$ 
    puis  $y_{i+1} \leftarrow y_i + \alpha_i v_i$  suivant:
     $\alpha_i = \operatorname{argmin}_{\alpha} \phi(y_i + \alpha v_i)$ ;
  } jusque convergence;
   $x_{k+1} \leftarrow y_{i+1}$ ;
  calcul d'une borne inférieure  $l_{k+1}$ ;
} jusqu'à  $e^T x_{k+1} - l_{k+1} < \text{tol}$ ;
```

Ajoutons simplement que le calcul des α_i correspond à un processus interne de minimisation dont on montre qu'il est très peu coûteux en temps de calcul. De plus le calcul des bornes inférieures successives l_k se fait en utilisant les conditions d'optimalité de la minimisation de la fonction de potentiel ϕ (nullité de son gradient).

Bibliographie

- [1] O. M. Bucci, D. D'Elia, G. Mazzarella, and G. Panatiello. Antenna pattern synthesis: A new general approach. *Proceedings of the IEEE*, 82(3):358-371, March 1994.
- [2] H. Lebet. *Synthèse de diagramme de réseaux d'antennes par optimisation convexe*. Thèse de Doctorat, Université de Rennes I, 1994.
- [3] C. Lemaréchal and J. B. Hiriart-Urruty. *Convex Analysis and Minimization Algorithms*. Springer-Verlag, 1993.
- [4] Yu. E. Nesterov and A. S. Nemirovsky. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*. SIAM, 1994.
- [5] L. Vandenberghe and S. Boyd. Semidefinite programming. Submitted to *SIAM Review*, July 1994.
- [6] H. Lebet. Antenna array pattern synthesis through convex optimization. *SPIE conference on Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures and Implementations VI*, vol.2563, July 1995.