



ETUDE COMPARATIVE DES METHODES DU PROPAGATEUR ET SWEDE POUR LA POURSUITE DE SOURCES MOBILES

Javier Sanchez et Sylvie Marcos

Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS-ESE,
Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cédex, France

RÉSUMÉ

Dans ces dernières années, un intérêt considérable s'est porté sur les méthodes dites à haute résolution fondées sur la définition des sous-espaces. Cependant, leur principe repose sur une décomposition de la matrice de covariance en ses éléments propres, dont le coût peut s'avérer très lourd en pratique. Nous étudions dans cette communication des méthodes basées sur la définition des sous-espaces qui ne requièrent pas une telle décomposition et à leur implantation pour la poursuite de sources qui se déplacent lentement.

1 Introduction

Les méthodes qui utilisent la définition des sous-espaces pour l'estimation de la direction d'arrivée (DDA) de sources jouent un rôle prépondérant dans les techniques modernes d'analyse spectrale et spatiale. Citons par exemple MUSIC dont de nombreuses études ont montré ses bonnes performances en termes de résolution et de précision d'estimation. Cependant, cette méthode est fondée sur une décomposition de la matrice interspectrale des données (MIS) en ses éléments propres. Or, pour des antennes à grand nombre de capteurs la complexité de calcul devient rapidement contraignante. La méthode du Propagateur [1] et la méthode SWEDE [2] utilisent la définition des sous-espaces pour l'estimation des DDA mais, à la différence de MUSIC, ne requièrent aucune décomposition en éléments propres. Ces méthodes effectuent uniquement des opérations linéaires sur la MIS ce qui les rend intéressantes pour l'estimation des DDA en temps réel. Une version adaptative de la méthode du Propagateur a été proposée et analysée dans [3]. Elle repose sur un algorithme de gradient stochastique. L'estimation récursive de la MIS permet aussi de calculer, par l'intermédiaire de SWEDE, les DDA de sources dans un environnement qui varie lentement. Le but de cette communication est donc de comparer les algorithmes évoqués en termes de performances et de complexité. Pour cela, nous définissons dans la section 2 le modèle des observations. Nous présentons respectivement dans les sections 3 et 4 le principe du Propagateur et de SWEDE ainsi que leur mise en oeuvre pour la poursuite de sources mobiles. Enfin, les résultats comparatifs de ces algorithmes sont présentés dans la section 5.

ABSTRACT

Over recent years, subspace-based high-resolution methods have drawn considerable interest. However, these methods are based on the eigendecomposition of the covariance matrix which implies a high computational burden in practice. We focus this communication on subspace-based methods that do not need any eigendecomposition and their implementation for tracking slowly moving sources.

2 Modèle des observations

— Soit une antenne de m capteurs éclairée par n ondes incidentes ($m \gg n$) issues de sources émettrices ponctuelles situées à l'infini dans un plan contenant l'antenne. Soit θ_j , $j = 1, \dots, n$ la direction d'arrivée de la source j mesurée par rapport à la normale à l'antenne et $\mathbf{a}(\theta)$ la réponse de l'antenne à une onde incidente dans la direction θ d'amplitude unité. Le vecteur de dimension m des signaux reçus à la sortie des capteurs s'écrit

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (1)$$

où $\mathbf{s}(t)$ est le vecteur des signaux sources supposés à bande étroite, $\mathbf{b}(t)$ est un bruit additif et $\mathbf{A} = (\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_n))$ est la matrice de vecteurs sources de dimension $m \times n$.

Sous les hypothèses que les amplitudes complexes $\mathbf{s}_j(t)$ des sources et les composantes du bruit $\mathbf{b}(t)$ sont des variables aléatoires stationnaires, centrées et mutuellement décorréelées, la MIS de dimension $m \times m$ s'écrit

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_b \quad (2)$$

où $\mathbf{S} = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$ et \mathbf{R}_b sont les matrices de dimension $n \times n$ et $m \times m$ de covariance des sources et du bruit, respectivement (" H " représente l'opérateur de transposition hermitienne).



3 Poursuite de sources mobiles avec le Propagateur

Sous l'hypothèse que \mathbf{A} est de rang plein, le Propagateur est l'opérateur linéaire unique \mathbf{P} de dimension $n \times (m - n)$ qui satisfait

$$\mathbf{A}^H \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ -\mathbf{I}_{m-n} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^H \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3)$$

où \mathbf{I} est la matrice identité. Cette relation signifie que le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice \mathbf{Q} est orthogonal au sous-espace engendré par \mathbf{A} soit, $\text{esp}\{\mathbf{Q}\} \perp \text{esp}\{\mathbf{A}\}$. Il est donc possible d'estimer les DDA en minimisant la fonction

$$f(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{\Pi}_Q \mathbf{a}(\theta) \quad (4)$$

où $\mathbf{\Pi}_Q = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^\dagger$, est le projecteur sur le sous-espace bruit ("†" signifie la pseudo-inverse de Moore-Penrose). Une forme plus convenable de ce projecteur peut être obtenue en considérant

$$\mathbf{Q}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{P}^H \end{pmatrix} \quad (5)$$

Cette matrice de rang n satisfait $\mathbf{Q}_s^H \mathbf{Q} = \mathbf{0}$. Il s'ensuit que $\mathbf{\Pi}_Q = \mathbf{I} - \mathbf{Q}_s \mathbf{Q}_s^\dagger$ et la fonction (4) devient

$$f(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_{Q_s}) \mathbf{a}(\theta) \quad (6)$$

Pour le calcul de \mathbf{P} considérons la partition de la MIS

$$\mathbf{R} = (\mathbf{G}, \mathbf{H}) \quad (7)$$

où \mathbf{G} et \mathbf{H} sont respectivement des matrices de dimension $m \times n$ et $m \times (m - n)$. Sous l'hypothèse que les sources ne sont pas totalement corrélées, le Propagateur s'obtient par la solution des moindres carrés [1]

$$\hat{\mathbf{P}} = (\mathbf{G}^H \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^H \mathbf{H} \quad (8)$$

Remarquons que cette estimation de $\hat{\mathbf{P}}$ ne fait pas d'hypothèse sur le bruit. Au lieu d'appliquer directement (8), $\hat{\mathbf{P}}$ peut être estimé par un algorithme adaptatif-récurif qui repose sur des approximations stochastiques de techniques de gradient [3].

Considérons la partition suivante du vecteur des données

$$\mathbf{x}(t) = \begin{matrix} n \\ m - n \end{matrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Une estimée du Propagateur à l'instant t , $\hat{\mathbf{P}}(t)$, est donnée par la relation

$$\hat{\mathbf{P}}(t) = \hat{\mathbf{P}}(t - 1) + \mu \mathbf{x}_1(t) \mathbf{e}^H(t) \quad (10)$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}_2(t) - \hat{\mathbf{P}}^H(t - 1) \mathbf{x}_1(t) \quad (11)$$

et $0 < \mu$ est le pas d'incrément. Le choix du paramètre μ détermine les performances de cette technique d'estimation adaptative-récurif. En effet, il existe un compromis entre réduire les fluctuations dues au bruit (diminuer μ) et améliorer la capacité de poursuite (augmenter μ). L'analyse théorique de l'algorithme donne la valeur optimale réalisant ce compromis [3].

4 Poursuite de sources mobiles avec SWEDE

La méthode SWEDE considère une matrice \mathbf{W} de dimension $m \times (2m - 2n)$ telle que

$$\mathbf{A}^H \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (12)$$

La matrice \mathbf{W} qui satisfait cette relation est définie par:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_{21}^{-1} \mathbf{R}_{32}^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R}_{12}^{-1} \mathbf{R}_{31}^H \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ m - n \end{matrix} \quad (13)$$

Les éléments de cette matrice s'obtiennent à partir de la MIS partitionnée de la manière suivante

$$\mathbf{R} = \begin{matrix} n \\ n \\ m - 2n \end{matrix} \begin{pmatrix} * & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{13} \\ \mathbf{R}_{21} & * & \mathbf{R}_{23} \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & * \end{pmatrix} \quad (14)$$

Cette méthode repose sur les mêmes principes que la méthode du Propagateur, à savoir, la définition d'opérateurs linéaires à partir de la matrice \mathbf{A} , l'estimation de ces opérateurs suivant des algorithmes de moindres carrés, pas d'hypothèse sur le bruit, nécessité de connaître le nombre de sources, etc. La différence essentielle est qu'elle n'utilise pas les éléments diagonaux de la MIS (notés "*") qui sont en général plus perturbés par le bruit.

On introduit maintenant la matrice \mathbf{V} telle que

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} \mathbf{D} \quad (15)$$

où \mathbf{D} est une matrice de dimension $2(m - 2n) \times p$ ($1 \leq p \leq m - n$). Le choix de la matrice \mathbf{D} donne lieu à des versions différentes de SWEDE. Nous retiendrons celle pour laquelle $p = m - n$ et \mathbf{V} devient

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_{21}^{-1} \mathbf{R}_{32}^H \mathbf{R}_{31} (\mathbf{R}_{31}^H \mathbf{R}_{31})^{-1} \mathbf{R}_{12} & -\mathbf{R}_{21}^{-1} \mathbf{R}_{32}^H \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-2n} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Il est facile de vérifier que

$$\mathbf{A}^H \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (17)$$

Cette relation signifie que $\text{esp}\{\mathbf{V}\} \perp \text{esp}\{\mathbf{A}\}$, ce qui permet d'obtenir une estimée de $\{\theta_j\}$ en minimisant la fonction

$$f(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{\Pi}_V \mathbf{a}(\theta) \quad (18)$$

où $\mathbf{\Pi}_V = \mathbf{V} \mathbf{V}^\dagger$ est le projecteur sur le sous-espace bruit qui peut aussi s'écrire sous une forme moins complexe. Considérons

$$\mathbf{V}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{21}^H \\ \mathbf{R}_{12}^H (\mathbf{R}_{31}^H \mathbf{R}_{31})^{-1} \mathbf{R}_{31}^H \mathbf{R}_{32} \\ \mathbf{R}_{32} \end{pmatrix} \quad (19)$$

qui est une matrice de dimension $m \times n$ de rang plein et qui satisfait $\mathbf{V}_s^H \mathbf{V} = \mathbf{0}$. Ceci implique $\mathbf{\Pi}_V = \mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_{V_s}$. La fonction (18) prend la forme

$$f(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_{V_s}) \mathbf{a}(\theta) \quad (20)$$

La matrice \mathbf{V}_s (et par conséquent le projecteur $\mathbf{\Pi}_{V_s}$) s'obtient d'après (19) à partir d'une estimée de la MIS,

Propagateur, calcul de:	nb. de multiplications
$\mathbf{e}(t)$	$n(m-n)$
$\hat{\mathbf{P}}(t)$	$n(m-n)$
$\mathbf{a}^H(\theta)(\mathbf{I} - \Pi_{Q_s})\mathbf{a}(\theta)$	$n(m-n) + n^2(m-n)$
SWEDE, calcul de:	nb. de multiplications
$\hat{\mathbf{R}}(t)$	$2n(m-2n)$
\mathbf{V}_s	$2n^2m$
$\mathbf{a}^H(\theta)(\mathbf{I} - \Pi_{V_s})\mathbf{a}(\theta)$	$nm + n^2m$

Table 1: Poursuite avec le Propagateur et SWEDE: complexité de mise en oeuvre.

$\hat{\mathbf{R}}$. Or, dans un environnement qui change en fonction du temps, il convient de mettre cette matrice sous une forme dépendant du temps, $\hat{\mathbf{R}}(t)$. Un estimateur possible utilisé très couramment est de la forme

$$\hat{\mathbf{R}}(t) = (1 - \beta)\hat{\mathbf{R}}(t-1) + \beta\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t) \quad (21)$$

Le rôle du facteur d'oubli $0 < \beta < 1$ est d'éviter que les observations trop anciennes viennent fausser l'estimation à l'instant présent t et d'assurer ainsi la poursuite d'un environnement qui varie lentement. La mise à jour de $\hat{\mathbf{R}}(t)$ dans (21) permet donc d'estimer $\{\theta_j\}$ à chaque fois qu'une nouvelle observation est disponible, pourvu que la vitesse à laquelle sont recueillies les données soit supérieure à la vitesse de déplacement des sources.

Le tableau 1 résume les calculs à effectuer pour l'implantation des deux algorithmes de poursuite proposés. Les DDA sont enfin estimées par la minimisation de la fonction $f(\theta)$ respective. Dans certaines applications, il n'est pas nécessaire d'estimer $\{\theta_j\}$ à chaque réalisation du vecteur $\mathbf{x}(t)$. Les échantillons sont donc accumulés et ce n'est qu'après k observations ($k > 1$) qu'on estime la nouvelle position des sources, ce qui est bien une estimation par blocs. Dans le cas de l'algorithme adaptatif du Propagateur, seuls $\mathbf{e}(t)$ et $\hat{\mathbf{P}}(t)$ doivent être mis à jour lorsqu'une nouvelle observation arrive ce qui demande un coût de calcul de $2kn(m-n)$ multiplications entre 2 recherches de DDA. Suivant cette même technique de poursuite, seul la matrice $\hat{\mathbf{R}}(t)$ est mise à jour à chaque instant t et la méthode SWEDE n'intervient que lorsque l'on souhaite avoir une estimation de la nouvelle position des sources après avoir reçu k réalisations du vecteur $\mathbf{x}(t)$. Le coût prédominant est dans ce cas de $2kn(m-2n)$ multiplications.

5 Simulations

Nous présentons ci-après des résultats de simulation qui illustrent les performances des algorithmes étudiés. Dans nos simulations, nous considérons une antenne rectiligne uniforme de 40 capteurs espacés de $\lambda/2$, où λ est la longueur d'onde des signaux sources. Nous générons les observations $\mathbf{x}(t)$ ($t = 1, 2, \dots$) et calculons les DDA à chaque instant t . Pour l'estimation des $\{\theta_j\}$, on utilise l'algorithme de Newton approximé [2]:

$$\hat{\theta}_j(t) = \hat{\theta}_j(t-1) - \frac{\text{Ré}[\mathbf{d}(\theta)^H \Pi \mathbf{a}(\theta)]}{\mathbf{d}(\theta)^H \Pi \mathbf{d}(\theta)} \Big|_{\theta=\theta_j(t-1)} \quad (22)$$

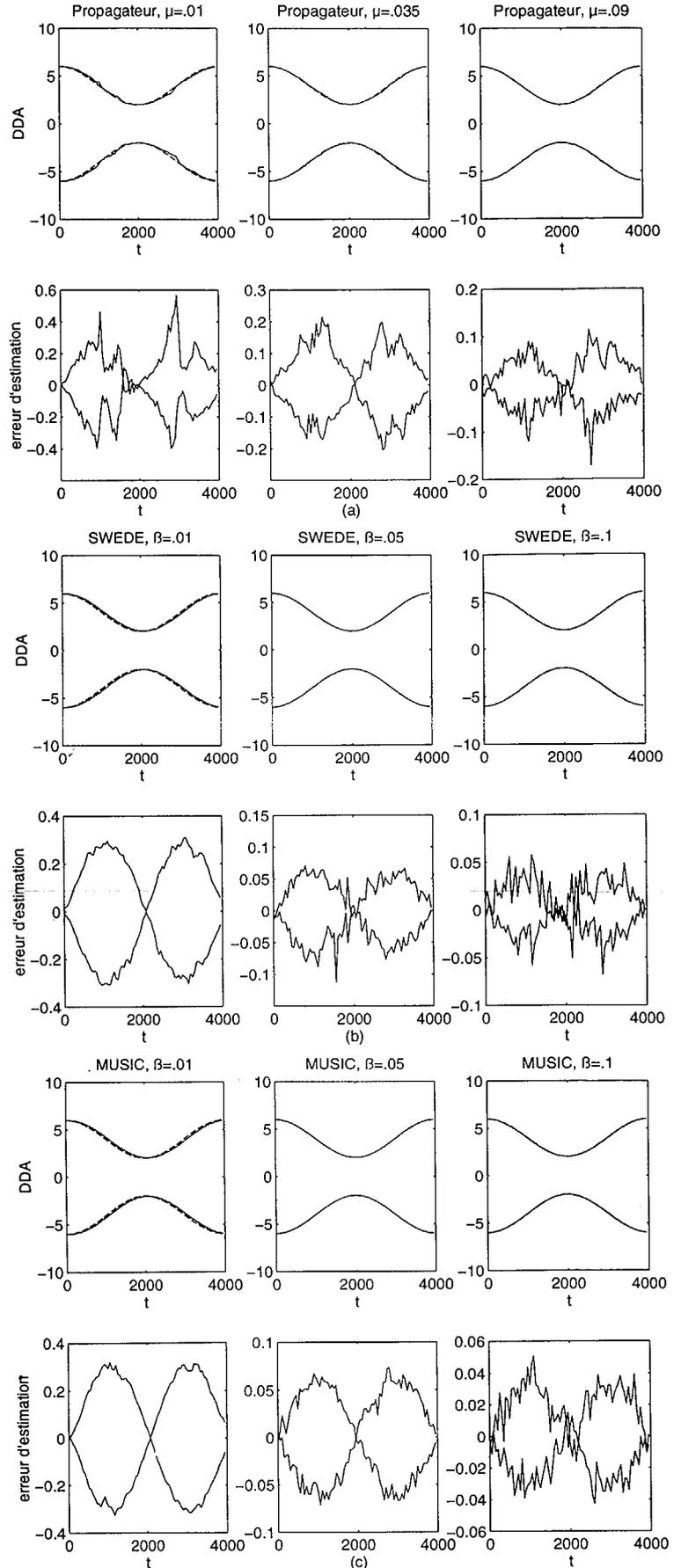


Figure 1: Performances d'estimation et erreur associée des algorithmes: (a) Propagateur, (b) SWEDE et (c) MUSIC, pour différentes valeurs de μ et de β .

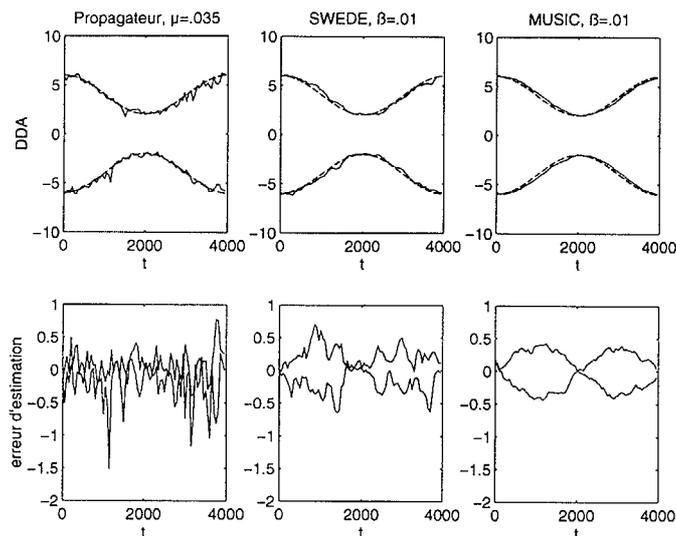


Figure 2: Performances des algorithmes à faible rapport signal sur bruit: SNR=-10 dB.

où $\mathbf{d}_j = \frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta}|_{\theta=\theta_j}$ et $\mathbf{\Pi}$ est le projecteur de la méthode correspondante. Nous avons obtenu des estimations des DDA acceptables avec quatre itérations de l'algorithme de Newton. En plus, la minimisation de $f(\theta)$ par cette technique s'avère être moins complexe que la minimisation classique par recherche des extrema d'un pseudo-spectre. La position initiale des sources a été estimée après avoir accumulé 50 observations et en recherchant les extrema d'un pseudo-spectre. Les courbes que l'on montre par la suite ont été moyennées sur un ensemble de 50 échantillons. Les performances des algorithmes étudiés sont comparées avec un algorithme qui, à partir de (21), adapte de manière récursive la décomposition en éléments propres de la MIS. Cet algorithme est proposé dans [4] sous le nom de "algorithme F2" dont la complexité est de l'ordre de n^2m multiplications. Dans notre première simulation, deux sources non-corrélées et de même puissance se déplacent dans l'environnement suivant $\theta_1 = 4 + 2 \cos(\pi t/2000)$ et $\theta_2 = -4 - 2 \cos(\pi t/2000)$ dans un intervalle de temps $0 < t \leq 4000$. Le rapport signal à bruit est le même pour tous les capteurs et égal à 10 dB. Nous avons testé les performances des algorithmes pour différentes valeurs de μ et β . La figure 1 montre les résultats de nos simulations ainsi que l'erreur d'estimation, $\hat{\theta}_j - \theta_j$, associée. La deuxième simulation (figure 2) compare les performances des deux algorithmes pour SNR=-10 dB. Enfin, dans notre dernière simulation, nous avons testé les performances des algorithmes pour suivre la trajectoire de deux sources qui se croisent (figure 3). Dans ce dernier cas, l'estimation des DDA a été effectuée à chaque fois après avoir accumulé 100 observations.

6 Conclusions

Nous avons étudié dans cette communication deux algorithmes qui exploitent les propriétés des méthodes Propagateur et SWEDE pour la poursuite de sources qui se déplacent lentement. L'algorithme adaptatif du Propagateur possède de bonnes performances en termes de résolution et précision d'estimation, en plus d'une grande

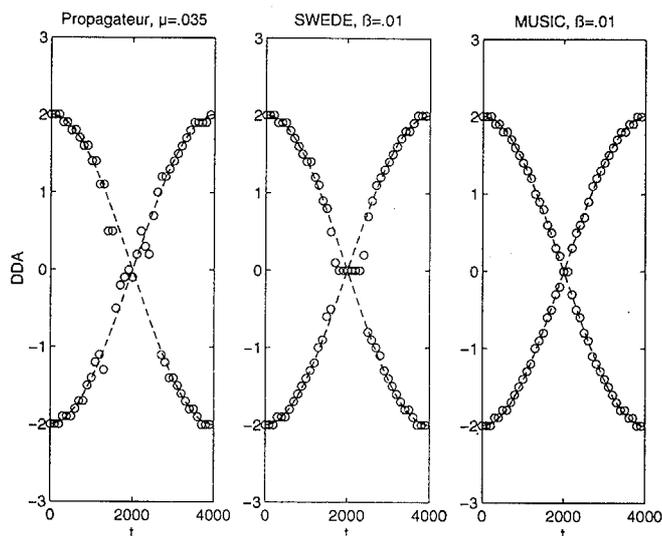


Figure 3: Performances des algorithmes lors du croisement des sources.

simplicité de mise en oeuvre. Cependant, les hypothèses stochastiques sur lesquelles repose son principe font que ces qualités sont pénalisées lorsque le rapport signal à bruit est faible et lorsque les sources sont très proches. L'estimation récursive de la MIS n'introduit pas d'hypothèses additionnelles dans le principe d'estimation de SWEDE ce qui donne pour résultat un algorithme de poursuite peu complexe et de grande robustesse. Enfin, ces algorithmes sont plus appropriés pour l'estimation par blocs de complexité en $O(knm)$ qui contraste avec $O(kn^2m)$ multiplications nécessaires pour l'implantation des techniques récursives de décomposition en éléments propres de la MIS tout en gardant des performances globalement similaires.

7 Références

- [1] S. Marcos, A. Marsal et M. Benidir, "The Propagator method for source bearing estimation" *Signal Processing*, Vol. 42, no. 2, pp. 121-138, Mar. 1995.
- [2] A. Eriksson, P. Stoica et T. Soderstrom, "On-line subspace algorithms for tracking moving sources" *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, no. 9, pp. 2319-2330, Sept. 1994.
- [3] S. Marcos et M. Benidir, "An adaptive subspace algorithm for direction finding and tracking", *Advanced Signal Processing Algorithms*, F.T. Luk, Ed., SPIE, San Diego, Jul. 1995.
- [4] P. Comon et G.H. Golub, "Tracking a few extreme singular values and vectors in signal processing", *Proc. IEEE*, Vol. 78, no. 8, pp. 1327-1343, Aug. 1990.