

DÉTECTION CYCLIQUE DANS UN BRUIT NON GAUSSIEN COLORÉ

P. Rostaing, E. Thierry, T. Pitarque

M. Le Dard

IS UNSA - URA CNRS 1376
41, Bd Napoléon III - 06041 NICE cedex
E-Mail : rostaing@alto.unice.fr

DCN St Tropez
BP168, 83996 St Tropez cedex

RÉSUMÉ

Ce papier traite de la détection de signaux "faibles" cyclostationnaires noyés dans un bruit non gaussien coloré. Le bruit d'observation est modélisé comme étant la sortie d'un filtre ARMA excité par une séquence i.i.d. non gaussienne. On propose une structure temporelle du détecteur *multi-cycle* en procédant à une opération de "blanchiment" des données et prenant en compte la densité de probabilité du bruit. Le calcul théorique de la déflection nous permet de choisir la "meilleure" fréquence cyclique utilisée dans le détecteur *single-cycle* (SC). La comparaison du détecteur SC au détecteur *radiomètre* (R) permet de conclure que le détecteur SC (avec la fréquence cyclique qui maximise sa déflection) possède des performances en terme de courbes COR nettement supérieures au détecteur R lorsque le bruit occupe la même bande que le signal et lorsque la puissance du bruit est inconnue.

1. Introduction

Dans beaucoup d'applications (communication, acoustique sous-marine, ...) le modèle cyclostationnaire est approprié pour des signaux issus de modulations (PAM, BPSK, MSK, ...) afin d'exploiter la corrélation spectrale de ces signaux.

Les travaux développés par Gardner [GS92], proposent une nouvelle structure de détecteurs adaptés au caractère cyclostationnaire des signaux à détecter, appelés *multi-cycle* (MC) et *single-cycle* (SC), le bruit d'observation étant blanc et gaussien. Ils montrent une supériorité du détecteur SC sur le *radiomètre* lorsque la puissance du bruit doit être estimée. Récemment, nous avons proposé un détecteur cyclique dans un modèle de bruit gaussien mais non blanc [RTPD95]. Le but de cette communication est d'étendre ces résultats pour des distributions de bruit non gaussiennes. On modélisera le bruit perturbateur comme étant la sortie d'un filtre connu a priori ayant pour entrée une séquence indépendante identiquement distribuée (i.i.d) de distribution non gaussienne connue excepté sa variance. On utilise la densité de probabilité gaussienne généralisée qui couvre un assez grand nombre de distributions. Cette étude montre une nette supériorité du détecteur *single-cycle* (qui exploite la corrélation spectrale du signal à détecter) sur le *radiomètre* (qui exploite la

ABSTRACT

This paper deals with detection of "weak" cyclostationary signals embedded in colored non gaussian noise. The noise is modelled as the output of an ARMA filter excited by a non gaussian i.i.d. sequence. We propose a temporal structure of the *multi-cycle* detector which includes a whitening transformation and takes into account the noise probability density function. We compute the theoretical deflection which gives a means to choose the best cyclic frequency used in the *single-cycle* detector (SC). We compare the SC detector to the *radiometer* detector (R). It is concluded that the SC detector (with the cyclic frequency which maximizes its deflection) outperforms the R detector when the noise and the signal bandwidth strongly overlap and for an unknown noise power. The performance advantages are quantified in terms of receiver operating characteristics for several generalized gaussian noise distributions.

densité spectrale de puissance du signal à détecter) lorsque le bruit occupe la même bande spectrale que le signal et lorsque la puissance du bruit est fluctuante.

2. Position du problème

La détection d'un signal cyclostationnaire \mathbf{s} dans un bruit additif peut se représenter par le test d'hypothèses suivant :

$$\begin{aligned} H_0 &: \mathbf{x} = \mathbf{z} \\ H_1 &: \mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{z} \end{aligned} \quad (1)$$

où \mathbf{x} représente le vecteur d'observation et \mathbf{z} représente le vecteur bruit de moyenne nulle, stationnaire, statistiquement indépendant avec \mathbf{s} . Sa matrice de covariance, R_z est telle que :

$$R_z^{-1} = C^t C / \sigma^2 \quad (2)$$

où C est une matrice triangulaire inférieure.

Le vecteur \mathbf{z} est relié au vecteur \mathbf{n} (vecteur non gaussien i.i.d de moyenne nulle et de variance σ^2) par la relation linéaire suivante :

$$\mathbf{z} = C^{-1} \mathbf{n} \quad (3)$$

L'équation (3) entraîne la relation suivante sur les densités de probabilités de \mathbf{z} et \mathbf{n} :

$$P_z(\mathbf{x}) = \det(C) \cdot P_n(C\mathbf{x}) \quad (4)$$



où $\det(\cdot)$ est le déterminant. Le test d'hypothèses (1) devient alors :

$$\begin{aligned} H_0 &: \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{n} \\ H_1 &: \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{s}} + \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5)$$

avec $\tilde{\mathbf{x}} = C\mathbf{x}$ et $\tilde{\mathbf{s}} = C\mathbf{s}$. La matrice de covariance du signal est alors : $R_{\tilde{\mathbf{s}}} = CR_sC^t$.

La statistique du récepteur Localement Optimal (LO) correspond alors à une version préblanchie du récepteur obtenue dans le cas indépendant [Mar88]:

$$Z = \sum_{i,m=1}^N (l(\tilde{x}_i)l(\tilde{x}_m) - \delta_{i,m}l'(\tilde{x}_i))R_{\tilde{\mathbf{s}}}(i, m) \quad (6)$$

où la non linéarité $l(x)$ est définie par :

$$l(x) = P'_n(x)/P_n(x) \quad (7)$$

$\delta_{i,m}$ est le symbole de Kronecker et $R_{\tilde{\mathbf{s}}}(i, m)$ est le (i, m) ème élément de la matrice de covariance du signal après blanchiment qui est donné par :

$$R_{\tilde{\mathbf{s}}}(i, m) = E[\tilde{s}_i\tilde{s}_m] = \sum_{k,l=1}^N C_{i,k}C_{m,l}R_s(k, l) \quad (8)$$

3. Détecteurs cycliques

L'hypothèse de cyclostationnarité nous permet de décomposer l'autocorrélation $R_s(k, l)$ en série de Fourier :

$$R_s(k, l) = \sum_{\alpha} R_s^{\alpha}(k-l) \exp[j\pi\alpha(k+l)] \quad (9)$$

Les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$R_s^{\alpha}(r) \stackrel{def}{=} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{m=-L}^L R_s(r+m, m) \cdot \exp[-j2\pi\alpha(m+|r|/2)] \quad (10)$$

$R_s^{\alpha}(r)$ est appelée la fonction d'autocorrélation cyclique et la somme sur α se fait sur toutes les fréquences cycliques contenues dans le signal \mathbf{s} tel que $R_s^{\alpha}(r) \neq 0$

3.1. le détecteur multi-cycle

En faisant l'hypothèse (Hyp. A) que la durée d'observation est suffisamment grande ($N \rightarrow \infty$), la matrice C tend à devenir une matrice de filtrage :

$$C = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & \dots & 0 \\ C_1 & C_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ C_{N-1} & \dots & C_1 & C_0 \end{bmatrix}$$

De plus, en supposant que les coefficients de la réponse impulsionnelle C_k deviennent très petits pour des grandes valeurs de k (hypothèse valide pour des filtres stables) et en substituant (9) et (8) dans (6), on obtient la statistique du détecteur *multi-cycle* (MC) :

$$\begin{aligned} Z^{MC} &= \sum_{\alpha} Z^{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \left\{ \sum_{r=-N+1}^{N-1} R_l^{\alpha}(r)R_s^{\alpha}(r)^* - \right. \\ &\quad \left. N \sum_{r=-N+1}^{N-1} R_s^{\alpha}(r)^* R_c^{\alpha}(r) < l'(\tilde{x}_i) \exp(j2\pi\alpha i) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

où :

- $R_l^{\alpha}(r)$ est le corrélogramme cyclique du vecteur $C^t l(\tilde{\mathbf{x}})$ défini par :

$$R_l^{\alpha}(r) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-|r|} [C^t l(\tilde{\mathbf{x}})]_k [C^t l(\tilde{\mathbf{x}})]_{k+|r|} \cdot \exp(-j2\pi\alpha(k+|r|/2))$$

- $R_c^{\alpha}(r)$ est la fonction d'autocorrélation cyclique de la réponse impulsionnelle du filtre blanchissant :

$$R_c^{\alpha}(r) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-|r|-1} C_k C_{k+|r|} \cdot \exp(-j2\pi\alpha(k+|r|/2))$$

- $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne temporelle sur N échantillons.

3.2. Le détecteur single-cycle

Le détecteur MC ne peut être implémenté sans la connaissance de la phase du signal à détecter [GS92], on peut alors utiliser une structure sous optimale facile à implémenter, appelée *single-cycle*, qui utilise une seule fréquence cyclique du détecteur MC (11) et qui prend le module de la statistique :

$$Z^{SC} = |Z^{\alpha}| \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \gamma \quad (\alpha \neq 0) \quad (12)$$

3.3. le détecteur radiomètre

Si l'on suppose que le signal à détecter est stationnaire, l'autocorrélation ne dépend plus que du décalage $r = (i-m)$, en remplaçant $R_s(i, m)$ par $R_s(i-m)$ dans le test LO (6), on obtient la statistique du *radiomètre*. Ce résultat se retrouve dans l'équation (11) du *multi-cycle* en prenant la fréquence cyclique $\alpha = 0$:

$$Z^R = Z^0 \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \gamma \quad (13)$$

4. Déflexion

Afin d'obtenir les performances théoriques des détecteurs décrits précédemment, on calcule la déflexion qui est particulièrement adaptée à l'hypothèse de signal "faible" et qui correspond au rapport *signal-sur-bruit* à la sortie du détecteur. Le carré de la déflexion est défini par :

$$D(Z) = \frac{|E(Z|H_1) - E(Z|H_0)|^2}{\text{VAR}(Z|H_0)} \quad (14)$$

Sous les conditions de régularité et de symétrie autour de l'origine de la densité de probabilité $P_n(x)$ du bruit, la déflexion du test (6) s'écrit [Mar88]:

$$\begin{aligned} D(Z) &= \frac{1}{2} \sum_{i,m=1}^N R_{\tilde{\mathbf{s}}}^2(i, m) E^2[l^2(x)] + \\ &\quad \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N R_{\tilde{\mathbf{s}}}^2(i, i) \left\{ E \left[\left(\frac{P_n''(x)}{P_n'(x)} \right)^2 \right] - 2E^2[l^2(x)] \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

Le calcul de la déflexion du détecteur (MC) (11) s'effectue en décomposant en série de Fourier l'autocorrélation $R_{\tilde{\mathbf{s}}}(i, m)$ sous les hypothèses suivantes :

- la durée d'observation N est très supérieure à la plus grande période de cyclostationnarité du signal $\tilde{\mathbf{s}}$ ($N \gg 1/\alpha_{\min}$) ;

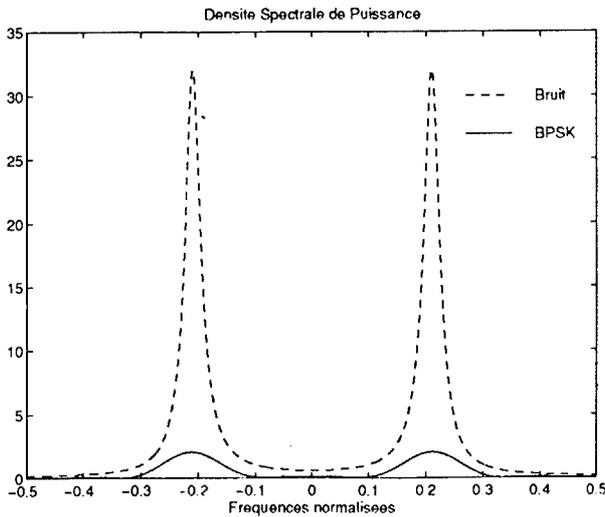


FIG. 1 - Densité Spectrale de Puissance, bruit et signal, $RSB = -8\text{db}$

- la durée d'observation N est très supérieure au plus grand décalage r de la fonction d'autocorrélation cyclique ($R_s^\alpha(r)$), ($N \gg |r_{\max}|$);
- hyp. A de §3.1.

On obtient alors :

$$D^{MC} = \sum_{\alpha} D^{\alpha}$$

$$D^{\alpha} = \frac{1}{2} N E^2[l^2(x)] \int_{-1/2}^{1/2} |S_s^\alpha(f)|^2 df$$

$$+ \frac{1}{4} N \left\{ E\left[\left(\frac{P_n''(x)}{P_n(x)}\right)^2\right] - 2E^2[l^2(x)] \right\} \left(\int_{-1/2}^{1/2} S_s^0(f) df \right)^2 \quad (16)$$

où $S_s^\alpha(f)$ est le spectre cyclique du signal \tilde{x} , défini comme la transformée de Fourier discrète de la fonction d'autocorrélation cyclique $R_s^\alpha(r)$.

On exprime $S_s^\alpha(f)$ en fonction du spectre du signal à détecter $S_s^0(f)$ par la relation entrée-sortie à travers un filtre linéaire invariant dans le temps :

$$S_s^\alpha(f) = C^*(f - \alpha/2) C(f + \alpha/2) S_s^0(f) \quad (17)$$

où $C(f)$ est la TFD de la réponse impulsionnelle du filtre blanchissant.

4.1. La distribution gaussienne généralisée

On désire utiliser le résultat de la déflexion dans le cas d'une distribution de bruit gaussienne généralisée (GG). La densité de probabilité GG est gouvernée par deux paramètres (c et σ^2) :

$$P_n(x) = [2\Gamma(1/c)]^{-1} \eta(c) c \exp[-(\eta(c)|x|)^c]$$

$$\text{avec } \eta(c) = \left[\frac{\Gamma(3/c)}{\sigma^2 \Gamma(1/c)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

où $\Gamma()$ est la fonction gamma, c est le paramètre de forme ($c = 1$, loi de Laplace, $c = 2$ loi gaussienne, $c > 8$ loi quasi uniforme) et σ^2 la variance.

Pour la distribution GG, on peut calculer analytiquement la non linéarité $l(x)$ qui intervient dans les statistiques

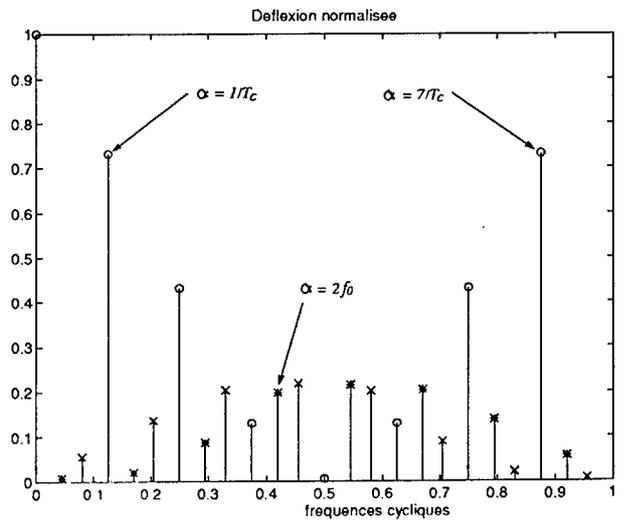


FIG. 2 - Déflexion normalisée vs fréquences cycliques du BPSK ((o) : $\alpha = k/T_c$, (*) : $\alpha = 2f_0 + k/T_c$, (x) : $\alpha = -2f_0 + k/T_c$ $k \in Z$), $c = 2.4$

des détecteurs et dans le calcul de la déflexion :

$$l(x) = c\eta^c(c) \text{sgn}(x) |x|^{c-1} \quad (19)$$

Les contributions statistiques de la déflexion de la statistique du MC (16) pour une distribution GG s'écrivent alors :

$$E^2[l^2(x)] = c^4 \eta^4(c) \left(\frac{\Gamma(2-1/c)}{\Gamma(1/c)} \right)^2$$

$$E\left[\left(\frac{P_n''(x)}{P_n(x)}\right)^2\right] = \frac{c^2(c-1)(3c-4)\eta^4(c)\Gamma(2-3/c)}{\Gamma(1/c)} \quad (20)$$

5. Application: détection d'un signal BPSK

On compare les performances du détecteur *single-cycle* (SC) au *radiomètre* (R) ($\alpha = 0$ dans la statistique (11)). Le signal à détecter est un signal BPSK (Binary Phase Shift Keying) avec :

fréquence de la porteuse	$f_0 = .21$
période de blocage	$T_c = 8$
nombre de points	$N = 512$ (64 intervalles)

On suppose que le bruit d'observation correspond à la sortie d'un filtre AR(2) (pôles : $0.9 \exp(\pm j2\pi(0.21))$) ayant pour entrée une séquence i.i.d de distribution gaussienne généralisée. On choisira trois formes de distributions gouvernées par le paramètre c ($c = 1.6$, $c = 2$ (gaussienne), $c = 2.8$). Les pôles du filtre sont choisis de façon à ce que la DSP du bruit et du signal occupent la même bande (fig.1).

Les détecteurs cycliques sont particulièrement adaptés lorsque le niveau de bruit change et n'est pas a priori connu [GS92]. Ici, on s'intéresse au cas où la puissance du bruit est inconnue, on doit alors l'estimer à partir des observations. Sur un grand nombre d'échantillons et pour un faible rapport S/B, l'estimation de σ^2 est donnée par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i^2 \quad (21)$$



Pour pouvoir implémenter le détecteur *single-cycle* (12), il reste à choisir la fréquence cyclique qui soit la plus adaptée pour détecter un BPSK dans notre modèle de bruit.

Pour cela, on calcule la déflexion normalisée (22) de la statistique Z^α (12) pour chacune des fréquences cycliques contenue dans le BPSK ($\alpha = k/T_c, \alpha = 2f_0 + k/T_c, \alpha = -2f_0 + k/T_c, k \in Z$) et on choisit celle qui rend maximale la déflexion.

$$d^\alpha = D^\alpha / D^0 \quad (22)$$

Sur la figure 2, on trace d^α pour $c = 2.8$, on note que les fréquences cycliques $\alpha = 1/T_c$ ou $\alpha = 7/T_c$ sont celles qui maximisent la déflexion, on choisira $\alpha = 1/T_c$ pour le calcul de la statistique (12). On obtient les mêmes conclusions pour $c = 2$ et $c = 1.6$.

Afin de comparer en terme de courbes COR les différents détecteurs, on génère 3000 réalisations de "bruit seul" et 3000 réalisations de "signal + bruit". Pour faire fluctuer le niveau de variance du bruit, le paramètre σ^2 sera tiré aléatoirement suivant une loi normale de moyenne μ et de variance $0.1\mu^2$ sur chaque réalisation de bruit. Le paramètre μ sera ajusté par avoir un rapport *signal-sur-bruit* moyen calculé dans la bande du signal de $-8dB$.

Sur la figure 3 on compare, en terme de courbes COR ($N = 512, c = 1.6, 2.0, 2.8, RSB = -8dB$), trois détecteurs :

1. le détecteur SC avec la fréquence cyclique ($\alpha = 1/T_c$) qui correspond à celle qui maximise la déflexion ;
2. le détecteur SC avec la fréquence cyclique ($\alpha = 2f_0$) qui est la meilleure fréquence cyclique du BPSK dans un modèle de bruit blanc [GS92] [IPT92] ;
3. le détecteur R qui est le détecteur optimal lorsque le signal à détecter est stationnaire [Kas88].

Des résultats obtenus sur les courbes COR, on remarque que :

- dans notre modèle de bruit, le détecteur *single-cycle* pour $\alpha = 1/T_c$ est nettement supérieur au détecteur *single-cycle* pour $\alpha = 2f_0$ et au détecteur *radiomètre* pour $c = 1.6, 2.0, 2.8$;
- les performances du détecteur en terme de courbes COR confirment les résultats théoriques de la déflexion sur le choix de la fréquence cyclique $\alpha = 1/T_c$;
- lorsque le caractère du bruit est plus impulsif ($c = 1.6$), le détecteur *radiomètre* a ses performances qui chutent nettement par rapport aux détecteurs *single-cycle*.

6. Conclusion

Il est établi que $\alpha = 2f_0$ est la "meilleure" fréquence cyclique du détecteur *single-cycle* pour la détection d'un signal BPSK car il présente la plus forte corrélation spectrale pour $\alpha = 2f_0$. Ceci n'est vérifié que lorsque le bruit perturbateur est blanc [GS92], [IPT92]. Dans notre étude, on modélise le bruit comme étant la sortie d'un filtre ARMA ayant pour entrée une séquence i.i.d de distribution GG. Les détecteurs *multi-cycle*, *single-cycle* et *radiomètre* sont

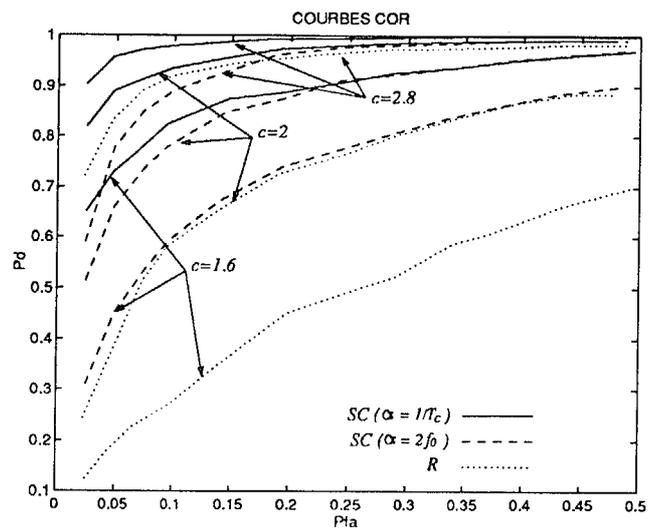


FIG. 3 - Courbes COR, $RSB = -8dB, N = 512, c = 1.6, 2.0, 2.8$

obtenus en prenant en compte cette modélisation du bruit. Dans notre exemple, le bruit est fortement corrélé et occupe la même bande spectrale que le signal, on obtient $\alpha = 1/T_c$ et non $\alpha = 2f_0$ comme étant la fréquence cyclique qui donne les meilleures performances. Ce résultat était annoncé par le calcul théorique de la déflexion normalisée.

On note aussi que le détecteur *single-cycle* présente des performances nettement supérieures au détecteur *radiomètre* lorsque la puissance du bruit est inconnue et nécessite d'être estimée à partir de chaque réalisation.

Les simulations ont montré que le détecteur SC avec ($\alpha = 1/T_c$) restait supérieur aux autres détecteurs pour plusieurs modèles de distribution du bruit (c'est à dire pour d'autres valeurs de c) toutes choses par ailleurs étant identiques.

7. Références

- [GS92] W.A. Gardner and C.M. Spooner. Signal Interception: Performance Advantages of Cyclic Feature Detectors. *IEEE Trans. on Communications*, 40(1):149-159, January 1992.
- [IPT92] L. Izzo, L. Paura, and M. Tanda. Signal Interception In Non-Gaussian Noise. *IEEE Trans. on Communications*, 40(6):1030-1037, June 1992.
- [Kas88] S. A. Kassam. *Signal Detection In Non-Gaussian Noise*, chapter 4, page 123. NY:Springer-Verlag, 1988.
- [Mar88] A.M. Maras. Locally Optimum in Moving Average Non-Gaussian Noise. *IEEE Trans. on Communications*, 36(8):907-912, August 1988.
- [RTPD95] P. Rostaing, E. Thierry, T. Pitarque, and M. Le Dard. Cyclic Detection in Nonwhite Gaussian Noise. In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 1212-1218, 1995.