

DÉTECTION SÉQUENTIELLE DE SAUTS DANS LES PARAMÈTRES D'UN SIGNAL DE FRÉQUENCE POLYNOMIALE

C. Theys, A. Ferrari, G. Alengrin

I3S - URA CNRS 1376
 Université de Nice-Sophia Antipolis
 41, Bd Napoléon III - 06041 NICE cedex

Le sujet traité dans cette communication est celui de la détection et de l'estimation de variations brusques éventuelles dans les paramètres d'un signal bruité à fréquence polynomiale. Dans ce cas, un test de rapport de vraisemblance généralisé exact (GLR) ne peut être effectué, le système conduisant aux estimés par maximum de vraisemblance des paramètres étant non linéaire. Les solutions utilisées en général consistent à dériver un GLR sur le signal considéré stationnaire par morceaux ou de surveiller les paramètres estimés. Deux approches pour résoudre ce problème sont proposées: la première consiste à dériver un test de rapport de vraisemblance à partir de la phase instantanée du signal, la seconde est une alternative à la précédente et consiste à approximer le test du rapport de vraisemblance généralisé à partir du modèle exact. Une comparaison des performances suivant le rapport signal à bruit et l'ordre du polynôme est réalisée.

1. Position du problème

Le problème traité dans cette communication est celui de la détection et de l'estimation éventuelle de variations brusques dans un signal à fréquence polynomiale.

Le modèle du signal est:

$$y_n = A \exp(j(a_0 + a_1 n + \dots + a_p n^p)) + b_n, \quad (1)$$

$n = 0, \dots, N - 1$ et b_n est un bruit blanc Gaussien complexe, de moyenne nulle et de variance σ^2 . Le vecteur de paramètres choisi est $\theta = (a_0, a_1, \dots, a_p)^T$. L'occurrence d'un saut dans θ à un instant r inconnu peut s'exprimer sous la forme classique du test d'hypothèses:

$$H_0: \quad \theta = \theta_0 = (a_0^0, a_1^0, \dots, a_p^0) \quad n = 0 \dots k, \quad (2)$$

$$H_1: \quad \begin{cases} \theta = \theta_0 = (a_0^0, a_1^0, \dots, a_p^0) & n = 0 \dots r - 1, \\ \theta = \theta_1 = (a_0^1, a_1^1, \dots, a_p^1) & n = r \dots k, \end{cases} \quad (3)$$

k étant l'instant de calcul, allant de 0 à $N - 1$.

Le vecteur de paramètres avant rupture θ_0 est supposé connu, le vecteur de paramètres après rupture θ_1 et l'instant de rupture r sont inconnus et doivent être estimés. Si l'on choisit de s'orienter vers un test de rapport de vraisemblance généralisé entre les probabilités conditionnelles du signal sous chaque hypothèse, r et θ_1 doivent être estimés par maximum de vraisemblance (MV).

The problem is the detection and the estimation of abrupt changes in a noisy polynomial phase signal. In this case, an exact Generalized Likelihood Ratio (GLR) test cannot be achieved, the system leading to the Maximum Likelihood Estimates (MLE) of the parameters being non linear. The usual solutions are to derive a GLR assuming the signal piece-wise stationary or to supervise estimated parameters of the chirp. We propose two solutions taking into account both slow and fast nonstationarities of the signal. The first consists in a GLR derived from a signal phase model approximation. The second keeps the exact model and uses an approximation of the LR. A performance comparison is leaded following the signal to noise ratio and the polynomial order.

Le système aboutissant aux estimées par MV de r et θ_1 est non linéaire, c'est pourquoi nous proposons deux solutions pour contourner cette difficulté. La première est de dériver un test de rapport de vraisemblance à partir d'un modèle simplifié du signal, la seconde est une alternative à la précédente et consiste à approximer le test du rapport de vraisemblance généralisé à partir du modèle exact. Notre propos sera, en particulier, de comparer les performances des 2 algorithmes obtenus sur une large classe de signaux.

2. Rapport de vraisemblance généralisé à partir d'un modèle simplifié

Sous la condition d'un rapport signal à bruit, A^2/σ^2 , suffisamment grand, il a été prouvé [3] que le modèle (1) peut être approximé par:

$$y_n \approx A \exp(j(a_0 + a_1 n + \dots + a_p n^p + u_n)), \quad (4)$$

$n = 0, \dots, N - 1$ et u_n est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma^2/2A^2$. Si l'on appelle ψ_n la phase du signal (4), le rapport de vraisemblance $L_1(k, r)$ entre H_0 et H_1 peut être alors écrit à partir de ψ_n . Soit, à l'instant k :



$$L_1(k, r) = \sum_{n=r}^k \frac{2A^2}{\sigma^2} ((\psi_n - v_n^T \theta_0)^2 - (\psi_n - v_n^T \hat{\theta}_1)^2), \quad (5)$$

$k = 0 \dots N-1$, $r = 0 \dots k$, $v_n = (1, n, n^2, \dots, n^p)^T$. $\hat{\theta}_1$ est l'estimé par MV de θ_1 et est donné par le système suivant:

$$\begin{pmatrix} \Sigma_0 & \Sigma_1 & \dots & \Sigma_p \\ \Sigma_1 & \ddots & \dots & \Sigma_{p+1} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_p & \Sigma_{p+1} & \dots & \Sigma_{2p} \end{pmatrix} \hat{\theta}_1 = \begin{pmatrix} \Sigma_{0,\psi} \\ \Sigma_{1,\psi} \\ \vdots \\ \Sigma_{p,\psi} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\Sigma_j = \sum_{n=r}^k n^j, \quad \Sigma_{j,\psi} = \sum_{n=r}^k \psi_n n^j. \quad (7)$$

A l'instant k , la détection a lieu lorsque la maximisation par rapport à r donne un résultat supérieur à un seuil à fixer:

$$\max_{k-L \leq r \leq k} L_1(k, r) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda, \quad (8)$$

Si l'hypothèse H_1 est décidée, l'instant de rupture r et le vecteur de paramètres θ_1 estimés correspondants sont retenus. Il est important de noter que la maximisation par rapport à r se fait sur une fenêtre de longueur L finie et pas depuis le début du signal, ceci pour éviter des tableaux de valeurs de dimension croissante.

Cette solution nécessite l'extraction de la phase du signal et ceci soulève au moins 2 difficultés:

- Pour obtenir une estimation correcte de la phase du signal, il est nécessaire de tenir compte de sa périodicité et de son origine de manière à la développer dans le temps. La phase instantanée doit varier assez lentement pour être développée de manière correcte.
- Si la rupture dans la phase instantanée du signal est supérieure à une période (2π), elle sera considérée comme un saut du à la période de la phase.

Il est possible de contourner ces problèmes en travaillant directement sur la phase réduite (entre $-\pi$ et π) et en utilisant des estimées circulaires de moyennes, de variances de la phase, ..., [2]. On peut alors remplacer le rapport de vraisemblance «linéaire» (9) par un rapport de vraisemblance «circulaire»:

$$L_c(k, r) = \frac{2A^2}{\sigma^2} \left| \sum_{n=r}^k \exp(j(\psi_n - v_n^T \hat{\theta}_1)) \right| - \frac{2A^2}{\sigma^2} \left| \sum_{n=r}^k \exp(j(\psi_n - v_n^T \theta_0)) \right|,$$

On perd évidemment la linéarité du rapport de vraisemblance et on retrouve alors le problème de l'estimation par MV de θ_1 .

3. Rapport de vraisemblance approximé à partir du modèle exact

A partir du modèle exact (1), un rapport de vraisemblance approximé appelé «approche locale», [1], peut être dérivé sous l'hypothèse d'une relation entre le vecteur de paramètres avant et après rupture. Si l'on fait l'hypothèse d'une relation linéaire: $\theta^1 = \theta^0 + \lambda c$ où $c = (c_0, c_1, \dots, c_p)^T$ est le vecteur direction de changement, l'approximation au premier ordre du rapport de vraisemblance est:

$$L_2(k) = \Delta_1^{kT}(\theta) c, \\ \Delta_1^{kT}(\theta) = (\partial \log p_{\theta}(y) / \partial a_0, \partial \log p_{\theta}(y) / \partial a_1, \dots, \partial \log p_{\theta}(y) / \partial a_p),$$

$p_{\theta}(y)$ étant la loi de probabilité conditionnelle de $y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$.

En utilisant l'indépendance entre le signal et le bruit et après calcul, on montre que:

$$L_2(k) = l_0(a_0)c_0 + l_1(a_1)c_1 + \dots + l_p(a_p)c_p, \quad (9)$$

avec:

$$l_j(a_j) = -\frac{2A}{\sigma^2} \sum_{n=0}^k n^j \Im(y_n^* \cdot \exp(j(a_0 + a_1 n + \dots + a_p n^p))). \quad (10)$$

La détection a lieu lorsque $L_2(k)$ dépasse un seuil à fixer:

$$L_2(k) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda. \quad (11)$$

Une écriture asymptotique du détecteur après rupture permet d'estimer le saut sur le résultat du détecteur dans le cas d'un saut sur la phase initiale ou sur la fréquence. En effet, sous l'hypothèse d'un fort rapport signal à bruit, on peut facilement démontrer que pour $k \leq r-1$, $L_2(k) \approx 0$ et pour $k \geq r$:

$$l_j(a_j) = -\frac{2A}{\sigma^2} \sum_{n=r}^k n^j \sin(n^j (a_j^0 - a_j^1)). \quad (12)$$

Dans le cas d'un saut sur la phase initiale, le résultat du détecteur est directement proportionnel au sinus du saut de phase. Dans le cas d'un saut de fréquence, le résultat est une somme de sinusoides de fréquence égale au saut de fréquence modulée en amplitude. On peut donc estimer le saut sur le résultat par moindres carrés par exemple.

4. Résultats expérimentaux

Afin d'illustrer le comportement des algorithmes, nous proposons d'observer les résultats obtenus sur un signal bruité dont les caractéristiques sont:

$$\theta_0 = (0.0314, 0.6912, 0.001, 0.0001),$$

$$\theta_1 = (0.0314, 0.6912, 0.001, 0.00001), \quad r = 33, \quad N = 60.$$

Le rapport signal à bruit est de 10dB. Le résultat de la maximisation de $L_1(k, r)$ par rapport à r et $L_2(k)$ fonctions de k sont donnés sur la fig. (1).

Les 2 détecteurs augmentent rapidement à partir de l'échantillon 33. $L_1(k, \hat{r})$ n'est pas nul avant la rupture, ceci est dû à 2 causes principales: l'approximation Gaussienne de la phase

développée du signal et la maximisation sur r qui s'effectue sur une fenêtre de longueur M limitée et non pas depuis le début du signal. $L_2(k)$ présente une forme sinusoïdale qui se justifie par l'expression (12) ($c_3 = -1$):

$$L_2(k) = l_3(a_3)c_3 = \frac{2A}{\sigma^2} \sum_{n=r}^k n^3 \sin(n^3(a_3^0 - a_3^1)). \quad (13)$$

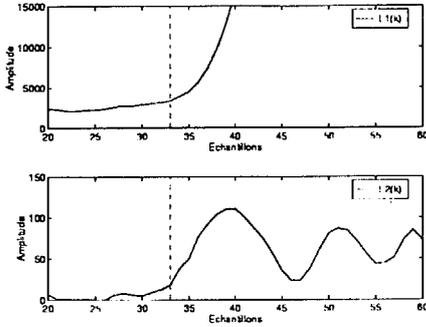


FIG. 1 - Résultats des détecteurs. $\max_{k-M+1 \leq r \leq k} L_1(k, r)$. $L_2(k)$.

5. Étude des performances

En détection classique, l'étude théorique des performances consiste à déterminer la probabilité de détection, Pd , et la probabilité de fausse alarme, Pfa , relatives au détecteur, le problème étant le choix du seuil λ qui fixe la probabilité de fausse alarme quelque soit le rapport signal à bruit.

Les expressions analytiques de Pfa et de Pd fonction de λ nécessitent la connaissance de la distribution du détecteur sous chaque hypothèse.

En détection séquentielle de ruptures, l'estimation des performances devient un problème très délicat car l'hypothèse H_1 est composite: on ne connaît pas a priori le vecteur de paramètres après rupture, d'autre part le résultat de l'approche locale a des propriétés statistiques uniquement asymptotiques.

Nous nous sommes donc orientés vers une étude expérimentale des performances, le seuil a été fixé de la manière suivante:

$$\lambda = \frac{1}{L} T \sum_{l=q+1}^{q+L} d_{k-l}, \quad (14)$$

Où T détermine Pfa et $\frac{1}{L} \sum_{l=q+1}^{q+L} d_{k-l}$ est une estimation de la moyenne de d_k sur une fenêtre de longueur L , d_k étant le résultat de chaque détecteur, (8), (11) et q le nombre d'échantillons de garde.

Il est important de noter que les courbes Pfa fonction de T sont superposées, quelque soit le rapport signal à bruit, pour les classes de signaux envisagées.

Dans le cas de la détection séquentielle, les performances s'expriment en terme de retard à la détection, $Pd(r)$. Nous nous intéressons en particulier à 2 probabilités: la probabilité que le retard à la détection soit minimal et égal à 1 échantillon, Pd_1 , et la probabilité que le retard à la détection soit supérieur à 1 et inférieur à 10, Pd_2 .

Les performances sont estimées pour 2 classes de signaux C_1 et C_2 dont les caractéristiques sont données dans les tableaux (1) et (2):

	$k \leq r$	$k \geq r$
a_0	0.0314	0.0314
a_1	0.6912	0.6912
a_2	0.001	$a_2 \sim \mathcal{U}(.001, .01)$
a_3	0	0
rsb(dB)	0,5,10,15,20	0,5,10,15,20

TAB. 1 - C_1

	$k \leq r$	$k \geq r$
a_0	0.0314	0.0314
a_1	0.6912	0.6912
a_2	0.001	0.001
a_3	0.0002	$a_3 \sim \mathcal{U}(.0001, .0002)$
rsb(dB)	0,5,10,15,20	0,5,10,15,20

TAB. 2 - C_2

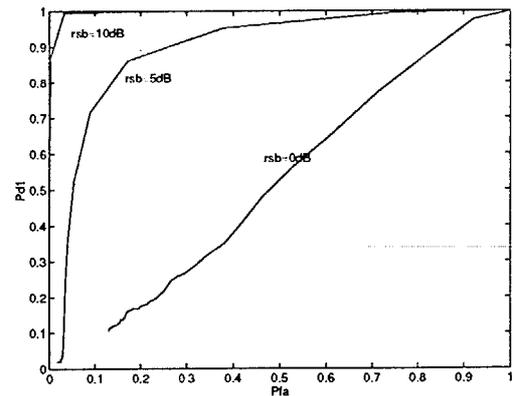


FIG. 2 - Détecteur 1, Pd_1 fonction de Pfa pour C_1

Au regard des résultats, on peut faire les remarques communes aux 2 détecteurs suivantes:

- Le nombre de réalisations de bruit utilisées est de 500, les probabilités très faibles de fausse alarme sont donc mal estimées, voire pas estimées.
- Les courbes de Pd_2 fonction de Pfa présentent un maximum (figs. 3, 5). En dessous de la valeur de Pfa correspondante, Pfa est trop faible pour qu'il y est détection. retardée ou pas; au dessus de cette valeur, il n'y a pas de retard à la détection, le maximum se décalant vers les valeurs faibles de Pfa lorsque le rsb augmente.

Le retard à la détection est plus faible pour le détecteur 1 que pour le détecteur 2 (figs. 2, 4, 6, 7). Les performances ne semblent pas être très dépendantes de l'ordre du polynôme même si il est difficile de comparer l'ampleur des sauts dans chaque classe.

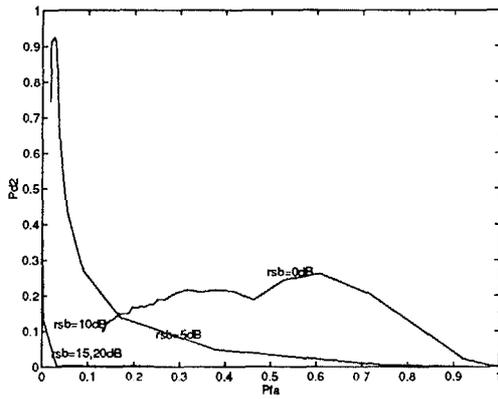


FIG. 3 - Détecteur 1, Pd_2 fonction de Pfa pour C_1

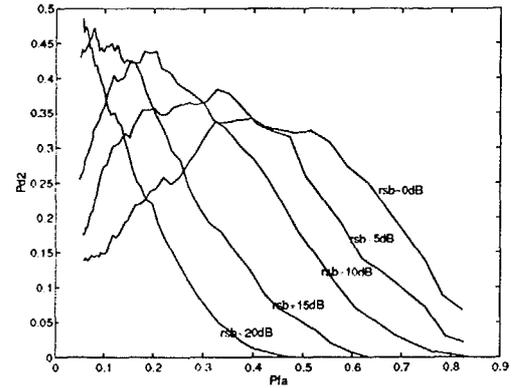


FIG. 5 - Détecteur 2, Pd_2 fonction de Pfa pour C_1

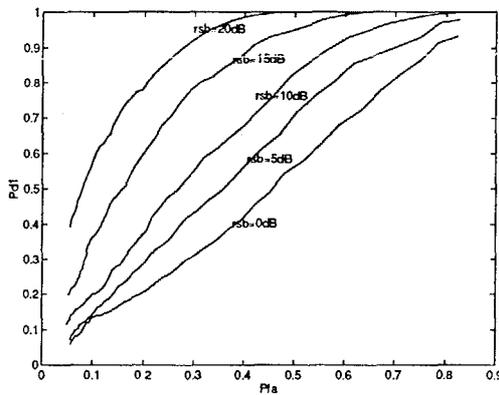


FIG. 4 - Détecteur 2, Pd_1 fonction de Pfa pour C_1

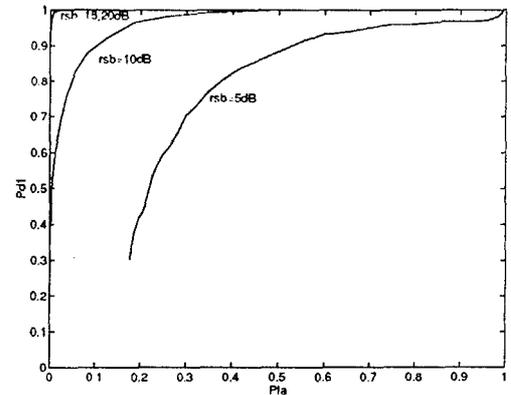


FIG. 6 - Détecteur 1, Pd_1 fonction de Pfa pour C_2

6. Conclusion

Deux solutions issues du rapport de vraisemblance ont été proposées pour détecter et estimer un saut dans un ou plusieurs paramètres d'un signal bruité de fréquence polynomiale. Ce problème est particulièrement délicat et rarement investigué car il s'agit de détecter des ruptures dans un signal qui est déjà, par structure, non stationnaire lent. Une étude complète des algorithmes nécessite d'étudier les performances sur d'autres types de ruptures (saut combiné sur plusieurs paramètres par exemple), on peut cependant noter les bonnes performances obtenues sur les classes de signaux considérées.

7. Références

- [1] R. B Davies. Asymptotic Inference in Stationary Gaussian Time-Series. *Advanced Applied Probability*, (5):469-497, 1973.
- [2] B.C. Lovell, P.J. Kootsookos, and R.C. Williamson. The Circular Nature of Discrete-Time Frequency Estimates. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 3369-3372, 1991.
- [3] S.A. Tretter. Estimating the Frequency of a Noisy Sinusoid by Linear Regression. *IEEE Transactions on Information Theory*, 31(6):832-835, November 1985.

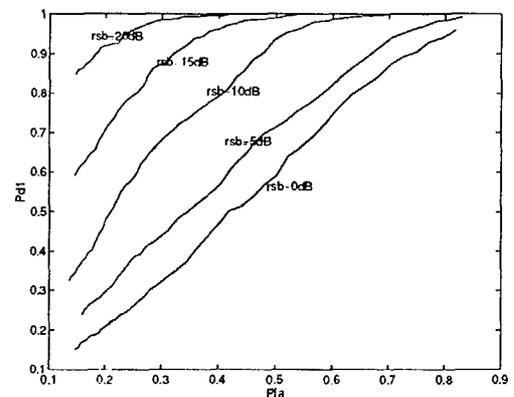


FIG. 7 - Détecteur 2, Pd_1 fonction de Pfa pour C_2