



ETUDE D'ESTIMATEURS BISPECTRAUX POUR LES SIGNAUX À DEUX DIMENSIONS.

J.M. Le Caillec, R. Garello
Télécom Bretagne Dept ITI BP 832
29285 Brest Cedex, France

B. Chapron
IFREMER, BP 70, Plouzané, France

Résumé

Dans cet article nous présentons une étude de différents estimateurs bispectraux en vue de l'utilisation du bispectre pour la détection de non linéarités. Nous nous sommes plus spécialement intéressés au problème du pouvoir de résolution, de la quantification du couplage de phases et par conséquent de l'estimation de la bicohérence et de la robustesse vis-à-vis du bruit de ces différents estimateurs, mais nous nous sommes intéressés aussi aux problèmes de temps de calculs

1. INTRODUCTION

Cet article propose l'étude de divers estimateurs bispectraux pour les signaux à deux dimensions. La première partie de cet article constitue un rappel des définitions et propriétés des moments et spectres d'ordre supérieur, pour des signaux à deux dimensions, ainsi que de leur utilisation pour la détection de non linéarités. La deuxième partie présente les différents types d'estimateurs étudiés et enfin les résultats obtenus, notamment sur l'estimation de la bicohérence, sont exposés et commentés dans la troisième partie. L'étude des moments et spectres d'ordre supérieur a été motivée ces dernières années par leur aptitude à récupérer l'information de phase qui existe entre les différentes fréquentielles, comme cela est montré dans le premier paragraphe.

2. MOMENTS ET SPECTRES D'ORDRE SUPÉRIEUR DE SIGNAUX À DEUX DIMENSIONS.

De la même manière que pour le cas d'un signal à une dimension le moment d'ordre 3 peut se définir [1-3] de la façon suivante:

$$M_3^X(n_1, n_2, n_3, n_4) = E\{X(i, j) \cdot X(i+n_1, j+n_2) \cdot X(i+n_3, j+n_4)\}$$

Cette définition implique par conséquent les mêmes relations de symétrie que pour le cas de signaux à une seule dimension.

$$\begin{aligned} M_3^X(n_1, n_2, n_3, n_4) &= M_3^X(n_3, n_4, n_1, n_2) = \\ M_3^X(n_3 - n_1, n_4 - n_2, -n_1, -n_2) &= M_3^X(-n_1, -n_2, n_3 - n_1, n_4 - n_2) = \\ M_3^X(n_1 - n_3, n_2 - n_4, -n_3, -n_4) &= M_3^X(-n_3, -n_4, n_1 - n_3, n_2 - n_4) \end{aligned}$$

Le cumuland d'ordre 3 d'un signal $X(i, j)$ est égal au moment d'ordre 3 de ce signal moins le moment du signal gaussien ayant même variance et moyenne que le signal $X(i, j)$. Dans le cas d'un signal centré, nous parlons indifféremment de cumuland ou de moment d'ordre 3, car les deux quantités sont confondues.

Le bispectre peut être défini de deux manières équivalentes, soit comme la transformée de Fourier à quatre dimension du moment d'ordre 3:

$$B(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_3=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_4=-\infty}^{+\infty} M_3^X(n_1, n_2, n_3, n_4) \cdot e^{-i\left(\sum_{p=1}^4 \omega_p n_p\right)}$$

ou comme l'espérance mathématique du triple produit des coefficients de Fourier:

$$B(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = E\{\tilde{X}(\omega_1, \omega_2) \cdot \tilde{X}(\omega_3, \omega_4) \tilde{X}^*(\omega_1 + \omega_3, \omega_2 + \omega_4)\}$$

Avec $\tilde{X}(\omega_1, \omega_2) = \text{TFD}(X(i, j))$. Les symétries du bispectre, pour un signal réel peuvent alors s'écrire:

Abstract.

In this paper we present a study of different bispectral estimators in order to use it for nonlinearities detection. We were more specially interested by the power resolution problem, phase coupling quantification and so bicoherency estimation and also noise robustness of these different estimators, but also we were interested by time computation problems.

$$\begin{aligned} B(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) &= B^*(-\omega_1, -\omega_2, -\omega_3, -\omega_4) = \\ B(\omega_3, \omega_4, \omega_1, \omega_2) &= B(-\omega_1 - \omega_3, -\omega_2 - \omega_4, \omega_1, \omega_2) = \\ B(-\omega_1 - \omega_3, -\omega_2 - \omega_4, \omega_3, \omega_4) &= B(\omega_1, \omega_2, -\omega_1 - \omega_3, -\omega_2 - \omega_4) = \\ B(\omega_3, \omega_4, -\omega_1 - \omega_3, -\omega_2 - \omega_4) \end{aligned}$$

Comme cela a été dit en introduction, les moments d'ordre supérieur et plus spécialement le moment d'ordre 3 peuvent estimer la phase. Un exemple d'utilisation de ce moment d'ordre 3 est la détection de couplage quadratique de phase. En effet, si nous considérons le signal suivant.

$$\begin{aligned} X(i, j) &= A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot i + \omega_2 \cdot j + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega_3 \cdot i + \omega_4 \cdot j + \varphi_2) \\ &+ A_3 \cdot \cos((\omega_1 + \omega_3) \cdot i + (\omega_2 + \omega_4) \cdot j + \varphi_3) + N(i, j) \end{aligned}$$

Où $N(i, j)$ est un bruit gaussien, coloré ou non, et où φ_1 et φ_2 sont des phases aléatoires uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$. Deux cas sont alors à distinguer, soit il n'existe aucune relation entre les phases φ_1, φ_2 et φ_3, φ_3 étant aussi aléatoirement répartie sur $[0, 2\pi]$, dans ce cas le moment d'ordre 3 est nul (sur plusieurs réalisations de signal, c'est-à-dire ayant des phases différentes), ou il existe une relation entre les phases, par exemple si $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3$ les sinusoïdes sont dites en couplage quadratique de phase, alors le moment d'ordre 3 est non nul et vérifie:

$$\begin{aligned} M_3^X(n_1, n_2, n_3, n_4) &= \frac{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3}{4} [\\ \cos(\omega_3 \cdot n_1 - (\omega_1 + \omega_3) \cdot n_3 + \omega_4 \cdot n_2 - (\omega_2 + \omega_4) \cdot n_4) &+ \\ \cos(\omega_3 \cdot n_3 - (\omega_1 + \omega_3) \cdot n_1 + \omega_4 \cdot n_4 - (\omega_2 + \omega_4) \cdot n_2) &+ \\ \cos(\omega_1 \cdot n_1 - (\omega_1 + \omega_3) \cdot n_3 + \omega_2 \cdot n_2 - (\omega_2 + \omega_4) \cdot n_4) &+ \\ \cos(\omega_1 \cdot n_3 - (\omega_1 + \omega_3) \cdot n_1 + \omega_2 \cdot n_4 - (\omega_2 + \omega_4) \cdot n_2) &+ \\ \cos(\omega_1 \cdot n_1 + \omega_3 \cdot n_3 + \omega_2 \cdot n_2 + \omega_4 \cdot n_4) &+ \\ \cos(\omega_1 \cdot n_3 + \omega_3 \cdot n_1 + \omega_2 \cdot n_4 + \omega_4 \cdot n_2) &] \end{aligned}$$

Deux remarques s'imposent. La première est que la relation plus générale $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3 + C$ implique elle aussi un moment d'ordre 3 non nul et qu'il est préférable de parler de **cohérence de phase** plutôt que de couplage quadratique de phases comme nous le reverrons à la fin de ce paragraphe. De plus, il est nécessaire de travailler sur plusieurs réalisations du signal pour estimer la phase, alors que souvent une seule réalisation de signal est disponible. Nous reviendrons aussi sur ce problème dans le paragraphe suivant.

Le couplage de phase est primordial pour la détection de non linéarités. En effet si nous considérons le modèle non linéaire de la figure 1,

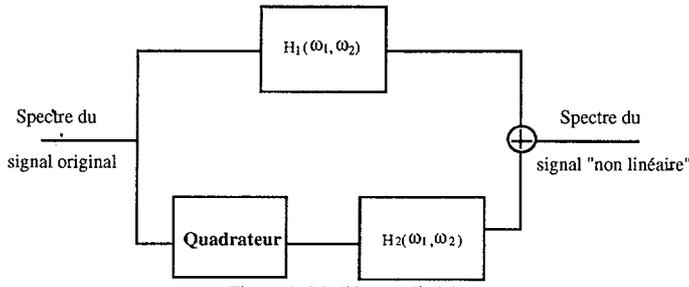


Figure 1: Modèle non linéaire.

les sinusoïdes en sortie du quadratureur sont en couplage de phase avec les sinusoïdes d'entrée qui les ont générées. Les sinusoïdes à la sortie du filtre $H_1(\omega_1, \omega_2)$ sont donc en **cohérence de phase** avec les sinusoïdes en sortie du filtre $H_2(\omega_1, \omega_2)$, et par conséquent le spectre du signal résultant est composé du spectre original filtré, et du spectre en "couplage" lui aussi filtré. Le modèle de non linéarités, qui est un modèle de Voltera du second ordre, peut être vu comme une approximation au second d'ordre de n'importe quel modèle non linéaire [4]. Une approximation plus précise comporterait des termes parallèles pour les non linéarités cubiques, d'ordre 4, et supérieures. Il est cependant à noter que le bispectre ne détectant pas les non linéarités cubiques, il n'est pas nécessaire de compliquer outre mesure notre modèle non linéaire. Chaque composante fréquentielle du signal résultant de la figure 1 étant la somme d'une composante fréquentielle en couplage quadratique de phases et d'une autre sans couplage, il est intéressant de quantifier l'énergie provenant de chacune des deux parties. En effet si l'on considère le signal suivant.

$$X(i, j) = A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot i + \omega_2 \cdot j + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega_3 \cdot i + \omega_4 \cdot j + \varphi_2) + A_3 \cdot \cos((\omega_1 + \omega_3) \cdot i + (\omega_2 + \omega_4) \cdot j + \varphi_1 + \varphi_2) + B \cdot \cos((\omega_1 + \omega_3) \cdot i + (\omega_2 + \omega_4) \cdot j + \varphi_3) + N(i, j)$$

où φ_i sont des phases aléatoirement réparties sur $[0, 2\pi]$, la composante fréquentielle $((\omega_1 + \omega_3), (\omega_2 + \omega_4))$ est bien la somme d'une composante en couplage et d'une autre sans couplage. Pour obtenir le coefficient de chacune des deux parties, on définit la bicohérence de la façon suivante:

$$P(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \frac{B(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)}{\sqrt{S(\omega_1, \omega_2) \cdot S(\omega_3, \omega_4) \cdot S(\omega_1 + \omega_3, \omega_2 + \omega_4)}}$$

Dans le cas du signal ci-dessus on obtient alors:

$$P(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \frac{A_3}{\sqrt{(A_3)^2 + B^2}}$$

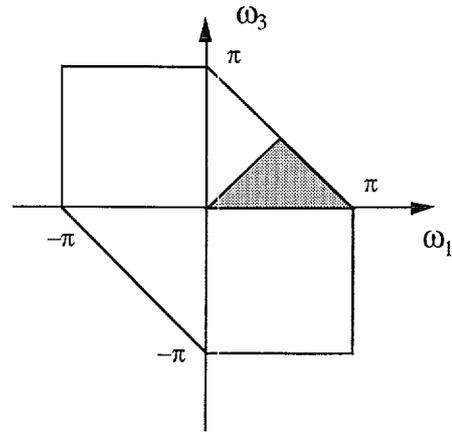
La bicohérence est en fait une mesure de la non linéarité, mais elle suppose que A_3 et B puissent être estimés de façon précise ce que nous reverrons dans le paragraphe présentant les résultats. De plus nous avons fait l'hypothèse implicite que le bruit est non coloré, car si cela n'affecte pas l'estimation bispectrale, l'estimation spectrale est faussée si le bruit est coloré. La détection et la quantification de non linéarités est donc assujettie à une bonne estimation du bispectre, c'est cette raison qui nous a conduit à étudier quatre estimateurs bispectraux.

3. ESTIMATEURS DU BISPECTRE D'UN SIGNAL À DEUX DIMENSIONS

De même que les estimateurs spectraux, les estimateurs bispectraux peuvent se diviser en deux classes à savoir les estimateurs conventionnels ou encore estimateurs de type Fourier et les estimateurs paramétriques qui passent par une estimation préalable des paramètres d'un filtre linéaire. Nous reviendrons cependant sur les limitations notamment théoriques de ce mode d'estimation dans la troisième partie de ce paragraphe, mais nous allons premièrement revenir sur le support de l'estimation. Dans la suite de ce paragraphe nous supposons que plusieurs réalisations du signal sont disponibles, point sur lequel nous reviendrons dans la conclusion de ce paragraphe.

3.1. Support non redondant d'estimation.

Compte tenu de la définition du bispectre, le support de définition du bispectre est défini pour un signal discret en temps et en fréquence (et donc le signal ainsi que le bispectre sont périodisés) par la région comprise entre les hyperplans $|\omega_1| = \pi$, $|\omega_3| = \pi$, $|\omega_1 + \omega_3| = \pi$ d'une part et les hyperplans, $|\omega_2| = \pi$, $|\omega_4| = \pi$, $|\omega_2 + \omega_4| = \pi$. En tenant compte des symétries pour un signal réel, une région de non redondance peut être alors définie par $\omega_1 + \omega_3 = \pi$, $\omega_3 = 0$, $\omega_1 = \omega_3$, mais toujours avec $|\omega_2| = \pi$, $|\omega_4| = \pi$, $|\omega_2 + \omega_4| = \pi$ pour limites de l'autre couple de variables. Il est à noter que cette région n'est pas le strict support de non redondance, ce dernier a été étudié par Erdem et Tekalp [4] mais reste cependant d'une utilisation moins pratique que celui présenté ci-dessus. La région de définition, ainsi que notre support de non redondance sont présentés pour un couple de variables sur la figure 2.



□ Support de définition. ■ Support non redondant.

Figure 2: Support de définition du bispectre

Il est donc nécessaire pour un des couples de variables d'estimer le bispectre sur le support entier de définition donné ci-dessus, tandis qu'une estimation sur le support de non redondance est suffisante pour l'autre couple. Cela est dû au fait que les deux couples vérifient les mêmes relations de symétries simultanément. Dans la partie suivante nous allons aborder maintenant les estimateurs conventionnels.

3.2. Estimateurs conventionnels.

Les estimateurs conventionnels se divisent en deux méthodes principales dont il existe quelques variantes que nous ne détaillerons pas ici [1-2]. Ces deux méthodes sont l'application immédiate des deux définitions équivalentes données dans la première partie. La méthode directe (ou périodogramme d'ordre supérieur) consiste à estimer les coefficients de Fourier pour chaque réalisation et d'en déduire la moyenne. Pour réduire la variance, il peut être intéressant de procéder à un moyennage en fréquence. Pour cela, si nous supposons que le nombre d'échantillons du bispectre est N_0 (taille généralement fixée pour les signaux à deux dimensions par des limitations mémoire), et si l'on se donne une fenêtre (qui peut dépendre de la réalisation du signal) de taille impaire $M_n = 2 \cdot J_n + 1$, la taille du signal doit être ajustée (soit par restriction ou en ajoutant des zéros aux bords du signal) de telle façon que la taille du signal soit égale à $L = N_0 \cdot M_n$ les coefficients de Fourier sont alors estimés par:

$$F^{(n)}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{L^2} \sum_{k=0}^L \sum_{l=0}^L X(k, l) \cdot e^{-j \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot (k \cdot \lambda_1 + l \cdot \lambda_2)}{L} \right)}$$

Alors le bispectre pour la réalisation (n) est estimé par moyennage sur la fenêtre par:

$$\hat{B}^{(n)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \sum_{k_1=-J_n}^{+J_n} \sum_{k_2=-J_n}^{+J_n} \sum_{k_3=-J_n}^{+J_n} \sum_{k_4=-J_n}^{+J_n} F(\omega_1 \cdot M_n + k_1, \omega_2 \cdot M_n + k_2) \cdot F(\omega_3 \cdot M_n + k_3, \omega_4 \cdot M_n + k_4)$$

$$.F^*((\omega_1 + \omega_3).M_n + k_1 + k_3, (\omega_2 + \omega_4).M_n + k_2 + k_4)$$

Enfin le bispectre est estimé par la moyenne des bispectre obtenus pour chaque réalisation.

$$\hat{B}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \sum_n \hat{B}^{(n)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$$

La méthode indirecte (corrélogramme d'ordre supérieur), passe quant à elle par une estimation préalable, sur une fenêtre de taille L, du moment d'ordre 3 à partir de toutes les données disponibles de la réalisation du signal puis par une transformée de Fourier à quatre dimensions de ce moment. Du fait de la linéarité de la transformée de Fourier, il est avantageux dans ce cas de moyenner le moment d'ordre 3 et non pas le bispectre (en ne faisant ainsi qu'une seule fois la TF). Cependant afin de préserver les symétries du bispectre induites par les sommes infinies, il est nécessaire que le support S(L) du moment d'ordre 3, soit compris entre les hyperplans définis par: $|n_1|=L$, $|n_2|=L$, $|n_3|=L$, $|n_4|=L$, $|n_1 - n_3|=L$, $|n_2 - n_4|=L$, de cette façon tous les symétriques (par les symétries du moment d'ordre 3) d'un des points du support sont aussi inclus dans ce support. Cependant la région de non redondance est délimitée par les hyperplans $n_1=L$, $n_3=0$, $n_1=n_3$, $|n_2|=L$, $|n_4|=L$, $|n_2 - n_4|=L$, comme on peut le voir sur la figure 3.

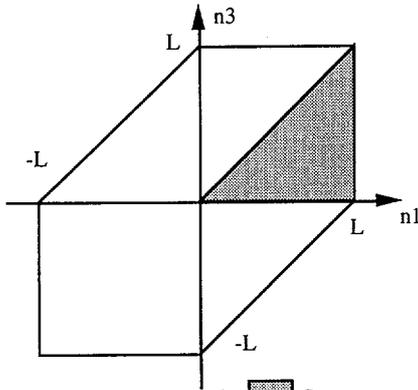


Figure 3: Support de définition du moment d'ordre 3 S(L)

Le bispectre est donc estimé par Transformé de Fourier de la moyenne des estimées du moment d'ordre 3 sur les diverses réalisations, moyenne pondérée par une fenêtre de lissage 4D. Cette fenêtre de lissage est obtenue en multipliant une fenêtre de lissage 2D (Parzen, Optimal ...[1-2]) utilisée pour l'estimation du bispectre de signaux à 1 dimension avec elle même.

Ces deux méthodes sont générales et ne présupposent pas d'hypothèses spéciales, mais sont assez coûteuses en calculs. Les méthodes paramétriques quant à elles, bien que généralement rapides, imposent certaines conditions sur le bispectre.

3.3. Estimateurs paramétriques.

L'idée de ce mode d'estimation est que le signal puisse s'exprimer comme la sortie d'un filtre ayant en entrée un bruit blanc non symétrique car alors le bispectre de ce signal est égal à:

$$B(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \gamma_3 H(\omega_1, \omega_2).H(\omega_3, \omega_4).H^*(\omega_1 + \omega_3, \omega_2 + \omega_4)$$

Où γ_3 est le moment d'ordre 3 du bruit non symétrique. Si ce mode d'estimation est performant pour le spectre, des réserves inhérentes à l'estimation bispectrale doivent cependant être émises. En effet s'il est toujours possible d'exprimer le spectre comme le produit d'une fonction de transfert et de son conjugué, il est presque toujours impossible d'exprimer le bispectre comme le triple produit d'une fonction de transfert [5]. Cependant, certaines propriétés topologiques des bispectres "factorisables" (c'est-à-dire pouvant s'exprimer comme le triple produit d'une fonction de transfert) dans l'ensemble des fonctions bispectrales restent à établir, notamment des propriétés de densité topologique qui permettraient de savoir si n'importe quel bispectre peut être approché par le triple produit d'une fonction de transfert. Nous avons pour notre part étendu au cas des signaux à deux

dimensions deux estimateurs bispectraux. Le premier présenté dans le cas 1D par Raghuvver et Nikias [6] est une extension des équations de Yule-Walker aux ordres supérieurs, tandis que le second utilise ce type d'équation mais appliquées à des modèles ARMA causaux et la formule de Giannakis fortifiée [7]. Soit la fonction de transfert d'un modèle ARMA causal à deux dimensions:

$$\sum_{i=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} a_{i,j}.X(k-i, l-j) = \sum_{i=0}^{q_1} \sum_{j=0}^{q_2} b_{i,j}.W(k-i, l-j)$$

Où $W(k,l)$ est un bruit blanc à l'ordre 3, c'est-à-dire $M_3^w(n_1, n_2, n_3, n_4) = \gamma_3 \delta(n_1, n_2, n_3, n_4)$. Dans le cas du modèle AR, $b_{i,j} = \delta(i, j)$, et les paramètres vérifient les équations suivantes:

$$\sum_{i=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} a_{i,j}.M_3^x(i-n_1, j-n_2, i-n_3, j-n_4) = \gamma_3 \delta(n_1, n_2, n_3, n_4) \quad n_i \geq 0$$

Le choix des équations reste primordial pour que la matrice soit de rang plein, c'est-à-dire $(p_1+1).(p_2+1)-1$, $a_{0,0}$ étant supposé égal à 1. Dans un premier temps, il est cherché une solution par pseudo-inverse, c'est-à-dire une solution par moindres carrés, sur l'ensemble d'équations défini par $n_1=n_3$, $n_2=n_4$, si une des valeurs propres dans l'algorithme de Cholewski est en deçà d'un seuil préalablement fixé, d'autres équations (avec cette fois-ci $n_1 \neq n_3$ ou $n_2 \neq n_4$) sont alors ajoutées et le processus d'inversion est réitéré. γ_3 est déduit grâce à l'équation $n_1=n_2=n_3=n_4=0$ et la fonction de transfert et par conséquent le bispectre sont calculés à partir des coefficients estimés. De plus, il est préférable d'estimer le moment d'ordre 3 sur un support commun de données pour tous les moments d'une même équation.

$$\hat{M}_3^x(i-n_1, j-n_2, i-n_3, j-n_4) = \sum_{k=\min 1}^{\max 1} \sum_{l=\min 2}^{\max 2} X^{(n)}(k,l).X^{(n)}(k+i-n_1, l+j-n_2).X^{(n)}(k+i-n_3, l+j-n_4)$$

Avec $\max 1 = N - p_1 + \inf(p_1, n_1, n_3)$, $\min 1 = p_1 - \sup(p_1, n_1, n_3)$, $\max 2 = N - p_2 + \inf(p_2, n_2, n_4)$, $\min 2 = p_2 - \sup(p_2, n_2, n_4)$. Ce qui implique que l'estimation d'un même moment peut différer d'une équation à l'autre. Enfin, c'est le **moment d'ordre 3** qu'il faut moyenner, et non pas le bispectre, car en fait les modèles AR ne sont pas sensibles à la phase.

Le modèle ARMA vérifient des équations similaires aux équations précédentes [7] à savoir

$$\sum_{n_1=-p_1}^{p_1} \sum_{n_2=-p_2}^{p_2} \sum_{n_3=-p_1}^{p_1} \sum_{n_4=-p_1}^{p_2} \alpha(n_1, n_2, n_3, n_4).$$

$$M_3^x(i-n_1, j-n_2, k-n_3, l-n_4) = \beta(i, j, k, l)$$

Avec $\alpha(n_1, n_2, n_3, n_4) = \sum_{i=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} a_{i,j}.a_{i+n_1, j+n_2}.a_{i+n_3, j+n_4}$ et

$$\beta(n_1, n_2, n_3, n_4) = \sum_{i=0}^{q_1} \sum_{j=0}^{q_2} b_{i,j}.b_{i+n_1, j+n_2}.b_{i+n_3, j+n_4}$$

Malheureusement, ce système est difficile à inverser et nous avons trouvé des cas où l'inversion n'est pas possible. Nous avons donc repris les mêmes équations que pour le modèle AR, mais avec $(n_1, n_3) \notin S(q_1)$ et $(n_2, n_4) \notin S(q_2)$ (S(L) a été défini pour la méthode indirecte). Les coefficients de la partie à moyenne ajustée étant calculés à partir de $\beta(i, j, k, l)$ par la formule de Giannakis étendue au cas 2D [7].

$$b(i, j) = \frac{2}{q_1.(q_1+1)} \frac{\beta(q_1, q_2, i, j)}{(2.q_2+1)^2 - q_2.(q_2+1)} \sum_{n_1=0}^{q_1} \sum_{n_2=-q_1}^{q_2} \sum_{n_3=0}^{q_1} \sum_{n_4=\sup(-q_1, -q_1+n_4)}^{\inf(q_1, q_1+n_4)} \frac{\beta(q_1, q_2, n_1+k_1, n_2+k_2). \beta(q_1, q_2, k_1+n_3, k_2+n_4)}{\beta^{1/3}(n_1, n_2, n_3, n_4)}$$

$$\left[\sum_{k_1=0}^{q_1} \frac{\inf(q_1, q_1-n_1, q_1-n_4)}{\sum_{k_2=0}^{q_2} \beta(q_1, q_2, k_1, k_2)}. \beta(q_1, q_2, n_1+k_1, n_2+k_2). \beta(q_1, q_2, k_1+n_3, k_2+n_4) \right]^{1/3}$$

Dans le cas où une seule réalisation de signal est disponible, il est toujours possible de segmenter le signal en sous signaux et d'obtenir donc, sous certaines conditions que nous ne détaillerons pas ici, des réalisations indépendantes. C'est avec ces quatre

estimateurs que nous avons estimé le bispectre dans le cas d'un signal présentant du couplage de phase.

4. RÉSULTATS ET COMMENTAIRES.

Les résultats suivant ont été estimés sur une grille de $[64]^4$ échantillons de fréquence et ont été obtenus sur un signal présentant ou non un couplage de phase aux fréquences $\omega_1 = \pi/2$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$, $\omega_4 = \pi/4$. Les résultats présentés en annexe A sont le plan du bispectre défini par $\omega_3 = \omega_2 = 0$ (le bispectre du signal présentant du couplage de phase est à gauche!) pour les quatre estimateurs. Il n'y a pas de moyennage en fréquence pour la méthode directe, ni d'utilisation de fenêtre de lissage pour la méthode indirecte. La taille de la fenêtre d'estimation du moment d'ordre 3 est de $[63]^4$ et les ordres des modèles linéaires sont égaux à 2. Comme on peut le constater, tous les estimateurs font une bonne détection du couplage de phase, même en présence de bruit (SNR=0, mais les résultats ne sont pas présentés ici). Si les pics sont très rapprochés, tous les estimateurs réussissent aussi à faire une bonne détection. Il est à noter cependant que la méthode indirecte nécessite un grand nombre d'échantillons du moment d'ordre 3 pour avoir un bon pouvoir de résolution et par conséquent est très coûteuse en temps de calcul. Pour leur part les méthodes paramétriques sont très sensibles mais sont de très mauvais quantificateurs du couplage de phase, c'est pour cette raison que leurs utilisations pour la quantification du couplage de phase se révèle impossible. A cause de leur sensibilité, une erreur sur l'ordre entraîne rapidement l'apparition de pics parasites impliquant une fausse détection de couplage de phase, possibilité de fausse détection toujours présente même sans erreur d'ordre si le seuil de rejet pour l'inversion est trop bas, comme cela peut se voir pour le modèle ARMA. Il est à noter que dans le cas du signal étudié, l'utilisation de fenêtre de lissage pour la méthode indirecte n'améliore pas les résultats. Cependant en absence de couplage de phase, le bispectre n'est pas nul car il est estimé sur un nombre fini de réalisations (4 dans notre cas). C'est pour cette raison qu'il est important de comparer quantitativement le bispectre avec le spectre et donc il est important de faire une bonne quantification du couplage de phase. C'est pour cette raison que nous n'avons gardé que les deux méthodes conventionnelles pour la quantification de la bicohérence et nous les avons testées en présence de différents niveaux de bruit sur un signal présentant à la fois du couplage de phase et du non couplage de phases aux fréquences mentionnées plus haut. (les coefficients sont égaux à $A_1=1$, $A_2=1$, $A_3=2$, $B=1$, le taux de bicohérence est à $2/\sqrt{1^2+2^2}=0.894$). Le tableau ci-dessous donne le résultat pour différents niveaux de bruit.

	Sans bruit	SNR=10db	SNR=0db
Méthode directe	0.928	0.868	0.904
Méthode indirecte	0.870	0.847	0.747

Taux de bicohérence

Comme on peut le voir les méthodes conventionnelles sont de bons estimateurs de la bicohérence, ce qui est logique car les cumulants (et donc le moment dans notre cas) sont insensibles au bruit gaussien, même si la méthode indirecte peut faire une mauvaise estimation en cas de fort bruit.

5. CONCLUSION.

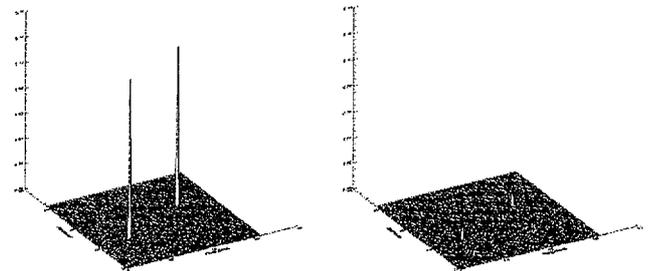
Dans cet article nous avons étudié certaines propriétés des estimateurs bispectraux appliqués aux signaux 2D. Cette étude permet de dégager les points suivant. Les méthodes paramétriques sont très sensibles au couplage de phase, et des erreurs d'ordre peuvent entraîner de fausses détections de couplage de phase. De plus ces méthodes sont de très mauvais quantificateurs, ce qui empêche leur utilisation pour une estimation du taux de non linéarité d'un signal. Les méthodes conventionnelles fournissent, en général, une bonne estimation des taux de non linéarités, mais sont plus coûteuse en temps de calculs, notamment la méthode indirecte. Il est cependant nécessaire de poursuivre cette étude notamment du point de vue du calcul de la variance et du biais de ces différents estimateurs. L'application de la théorie des spectres d'ordre supérieur dans le cas de signaux réels, si elle est

théoriquement attractive s'avère plus délicate sur le plan pratique notamment dans le cas de signaux à deux dimensions [3].

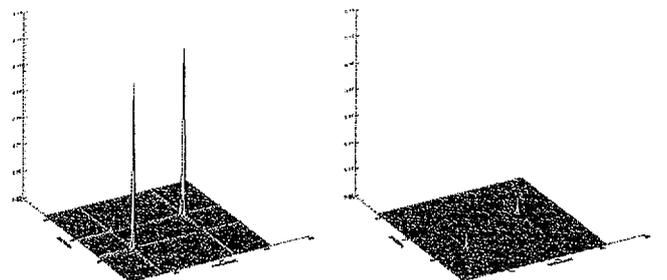
Références:

- [1] Nikias C.L., J.M. Mendel, "Signal Processing With Higher Order Spectra" I.E.E.E. Signal Magazine, July 1993.
- [2] Nikias C.L., A.P. Petropulu, **Higher-Order Spectra Analysis, A nonlinear signal processing framework**, Prentice Hall.
- [3] Le Caillec J.M., Garello R., Chapron B. "Detection of Nonlinearity in Sea Surface Imaging Process Using Bispectrum Method Estimation" ICASSP 95 vol 3 pp 1585-1588, May 8-12 1995 Detroit.
- [4] Erdem A.T., Tekalp A.M., "New theoretical Results on the bstatistics of 2D signal" Higher Ordre Statistics J.L. Lacoume (Editor) Elsevier Publisher.
- [5] Erdem A.T., Tekalp A.M., "On the measure of the set of Factorizable Polynomial Bispectra", IEEE Transactions on Acoustics, speech and signal processing Vol 38 N°9, September 1990
- [6] Raghuvver M.R., Nikias C.L. "Bispectrum Estimation, A Parametric Approach" IEEE Transactions on Acoustics, speech and signal processing Vol ASSP 33 N°4, October 1985.
- [7] Giannakis G.B, Swami A.. "On estimating Noncausal Nonminimum Phase ARMA Models of Non Gaussian Processes " IEEE Transactions on Acoustics, speech and signal processing Vol ASSP 38 N°3, March 1988.
- [8] Bendat J., **Nonlinear System Analysis and Identification from Random Data**, Prentice Hall

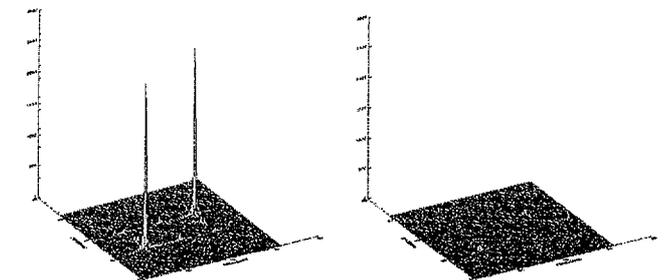
ANNEXE A



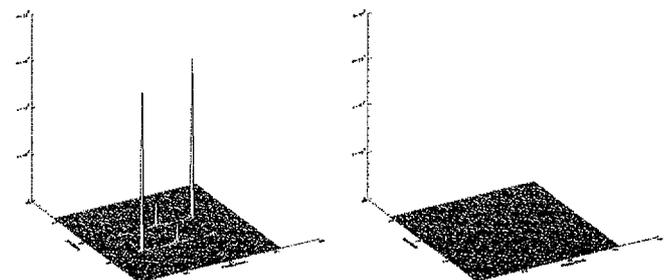
Méthode directe.



Méthode indirecte.



Modèle AR.



Modèle ARMA.