



Prise en Compte de la Stationnarité dans les Algorithmes d'Analyse Spectrale et d'Identification Fondés sur la Mesure des Corrélations et Spectres d'Ordre Supérieur

Joël Le Roux, Delphine Rossille, Cécile Huet et Jean-Louis Peyre
 I3S Université de Nice CNRS bat. 4, 250 rue Albert Einstein
 06560 Valbonne Sophia Antipolis
 leroux@alto.unice.fr

RÉSUMÉ

ABSTRACT

Les méthodes d'analyse spectrale et d'identification fondées sur le calcul des statistiques d'ordre supérieur ne peuvent pas s'appliquer sans précaution à l'analyse de données obtenues en échantillonnant des signaux analogiques à temps continu. Dans cette communication nous présentons deux approches qui tiennent compte de cette difficulté, une première qui est une estimation de la phase dans le domaine spectral et une seconde qui est une modélisation MA dans le domaine temporel.

Methods for spectral analysis and model identification based on the computation of higher order spectral should not be applied without caution to data obtained in sampling stationary continuous time signals. In this communication we present two approaches that take this difficulty into account. The first is a phase estimation in the spectral domain and the second is a MA modelization in the time domain

1. INTRODUCTION

d'identification obtenues en étendant à l'ordre trois les techniques classiques à l'ordre deux ne peuvent pas s'appliquer. Il est nécessaire de développer des méthodes qui prennent en compte l'annulation du spectre d'ordre trois dans les deux triangles ABC et EFG. Dans la suite, nous envisageons deux méthodes; dans la première les calculs utilisent les données spectrales alors que dans la seconde les calculs utilisent les triples corrélations.

Le spectre d'ordre trois d'un signal stationnaire analogique à bande limitée et échantillonné (SABLE) est nul dans les triangles ABC et EFG de la figure 1, alors qu'il ne s'y annule pas lorsque la génération du signal est synchrone d'une horloge (génération de séquences échantillonnées, comme le filtrage numérique d'une suite iid, signaux transmis en communication, ...). Ce résultat est brièvement mentionné dans [2]. Une illustration de ce phénomène est présentée dans [5].

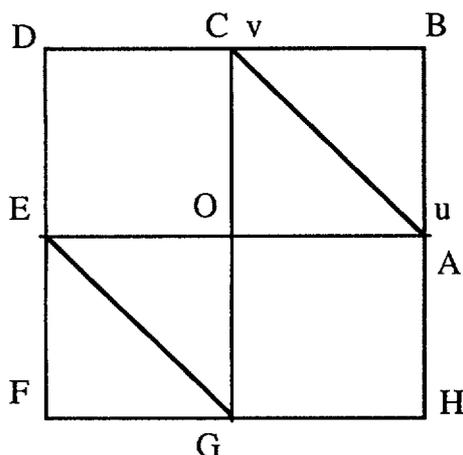


Fig. 1: Support du spectre d'ordre trois

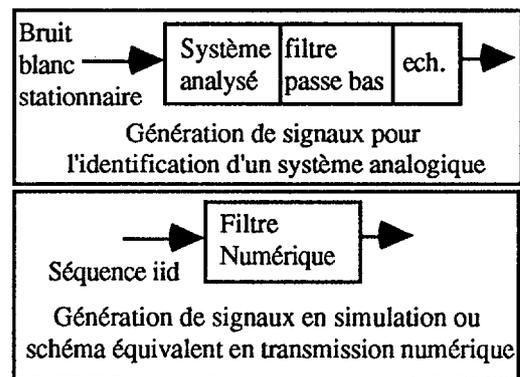


Fig. 2: différence entre les types de données utilisées en identification de systèmes dans le cas de signaux analogiques stationnaires et en simulation.

2. ALGORITHME DANS LE DOMAINE SPECTRAL

Etant donné un spectre d'ordre trois, $B(u,v)$, on cherche les valeurs $\varphi_F(u)$ de la phase de $F(u)$ vérifiant

$$B(u,v) = F(u)F(v)F(-u-v) \quad (1)$$

$$\varphi_B(u,v) = \varphi_F(u) + \varphi_F(v) - \varphi_F(u+v) \pmod{6\pi} \quad (2)$$

Par conséquent, si on cherche à analyser des signaux stationnaires, les méthodes de modélisation ou



Les valeurs de la phase $B(u,v)$, $\phi_B(u,v)$, sont connues. Les données bispectrales $B(u,v)$ utilisées sont mesurées pour des couples de fréquences à l'intérieur de l'hexagone de la figure 1.

Dans l'algorithme proposé, à chaque étape du calcul la résolution spectrale est doublée. Cet algorithme a une propriété remarquable: il ne nécessite pas de déroulement de phase [8] bien qu'il comporte des divisions. Par ailleurs, le nombre d'étapes successives dans l'algorithmes étant égal au logarithme en base deux du nombre de données, il résiste mieux au bruit dans le domaine des hautes fréquences (cf [6]) que la récurrence classique de Lohmann, Weigelt et Wirnitzer [7] qui est fondé sur la relation de récurrence

$$\varphi_F(u + v_0) = \varphi_F(u) + \varphi_F(v_0) - \phi_B(u,v_0) + 2p(u,v_0) \pi, \quad (3)$$

Nous supposons ici aussi que les phases du spectre d'ordre trois vérifient

$$\phi_B(u,v) = \varphi_F(u) + \varphi_F(v) - \varphi_F(u+v) + 2p(u,v)\pi, \quad (4)$$

et prennent leurs valeurs dans le l'intervalle $[-\pi,\pi[$. Nous cherchons à reconstruire 2^N-1 valeurs de $\varphi_F(u)$ régulièrement espacées dans l'intervalle $]0,1[$ de u à partir de mesures de $\phi_B(u,v)$. A chaque étape de l'algorithme, la résolution est doublée: on commence par effectuer les calculs pour $u = 1/2$, puis pour $u = 1/4$ et $3/4$, ensuite pour $u = 1/8, 3/8, 5/8, 7/8$, etc., et finalement pour $u = 1/2^N, 3/2^N, \dots, (2^N-1)/2^N$ (voir figure 3).

2.1. Algorithme de reconstruction

$\widehat{\varphi}_F(1) = k_0(1)\pi$;
for $n = 1, \dots, N$:

$$\left| \begin{array}{l} \widehat{\varphi}_F(\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2} [\phi_B(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}) + \widehat{\varphi}_F(\frac{1}{2^{n-1}})] + k_n(1)\pi ; \end{array} \right. \quad (5)$$

for $m = 1, \dots, 2^{n-1}-1$:

$$\left| \begin{array}{l} \widehat{\varphi}_F(\frac{2m+1}{2^n}) = -\phi_B(\frac{m}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}) \\ \quad + \widehat{\varphi}_F(\frac{m}{2^{n-1}}) + \widehat{\varphi}_F(\frac{1}{2^n}) + 2k_n(2m+1)\pi ; \end{array} \right. \quad (6)$$

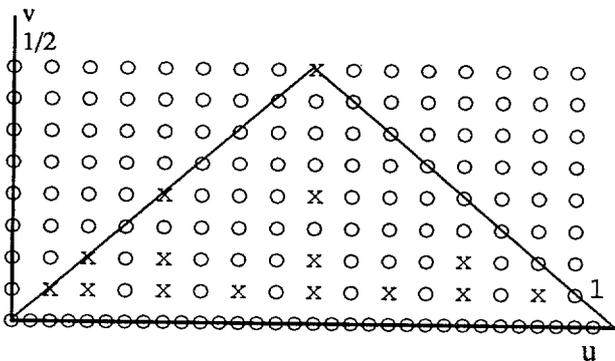


Fig. 3: Données bispectrales utilisées dans l'algorithme

Les $k_n(m)$ sont des entiers et les estimations des phases, $\widehat{\varphi}_F[(2m+1)/2^n]$, prennent leurs valeurs dans $[-\pi, \pi[$. Cet algorithme contient des divisions par deux, ce qui pourrait nécessiter un déroulement de phase [8]. Nous montrons dans le paragraphe suivant que la phase

reconstruite $\widehat{\varphi}_F(u)$ est identique à la phase initiale $\varphi_F(u)$ à une éventuelle composante linéaire près. Ce déphasage linéaire peut induire une translation du signal mais pas de modification de sa forme.

2.2. Evaluation de la détermination de la phase reconstruite

Théorème : Pour tout m entier dans $[0, 2^n[$, la phase reconstruite par la récurrence (5-6) vérifie

$$\widehat{\varphi}_F(\frac{m}{2^n}) = \varphi_F(\frac{m}{2^n}) + 2\pi\lambda_n \frac{m}{2^n} + 2q_n(m)\pi, \quad (7)$$

où λ_n et $q_n(m)$ sont des entiers et où λ_n est dans l'intervalle $[0, 2^n-1[$. Les 2^n valeurs possibles de λ_n correspondent aux 2^n décalages entiers possibles sur le signal échantillonné dans le domaine temporel.

Démonstration: Sans perte de généralité, on peut assigner la valeur 0 ou π à $\widehat{\varphi}_F(1)$; c'est d'ailleurs ce qui se produit nécessairement lorsque le signal analysé est échantillonné et que la fréquence 1 est la moitié de la fréquence d'échantillonnage.

Nous supposons que (7) est vérifiée à l'ordre $n-1$. Dans (5), remplaçons $\phi_B(1/2^n, 1/2^n)$ et $\widehat{\varphi}_F(1/2^{n-1})$ par leurs valeurs en (4) et en (7) respectivement :

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_F(\frac{1}{2^n}) &= \frac{1}{2} [\varphi_F(\frac{1}{2^n}) + \varphi_F(\frac{1}{2^n}) - \varphi_F(\frac{1}{2^{n-1}}) + 2p(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n})\pi \\ &\quad + \varphi_F(\frac{1}{2^{n-1}}) + 2\pi\lambda_{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + 2q_{n-1}(1)\pi] + k_n(1)\pi, \end{aligned} \quad (8)$$

ou

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_F(\frac{1}{2^n}) &= \frac{1}{2} [2\varphi_F(\frac{1}{2^n}) + 2p(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n})\pi \\ &\quad + 2\pi\lambda_{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + 2q_{n-1}(1)\pi] + k_n(1)\pi, \end{aligned} \quad (9)$$

soit

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_F(\frac{1}{2^n}) &= \varphi_F(\frac{1}{2^n}) + p(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n})\pi \\ &\quad + \pi\lambda_{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + q_{n-1}(1)\pi + k_n(1)\pi. \end{aligned} \quad (10)$$

L'éq. (7) est vérifiée pour $\widehat{\varphi}_F(1/2^n)$ si

$$\begin{aligned} 2\pi\lambda_n \frac{1}{2^n} + 2\pi q_n(1) &= \pi p(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}) \\ &\quad + \pi\lambda_{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + q_{n-1}(1)\pi + k_n(1)\pi, \end{aligned} \quad (11)$$

soit si

$$\begin{aligned} \lambda_n + q_n(1)2^n &= p(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n})2^{n-1} \\ &\quad + \lambda_{n-1} + q_{n-1}(1)2^{n-1} + k_n(1)2^{n-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Si $p(1/2^n, 1/2^n) + q_{n-1}(1) + k_n(1)$ est pair nous choisissons

$$p(1/2^n, 1/2^n) + q_{n-1}(1) + k_n(1) \quad (13)$$

et

$$\lambda_n = \lambda_{n-1}, \quad (14)$$

si bien que (7) est vérifiée pour $\widehat{\varphi}_F(1/2^n)$.

Si $p(1/2^n, 1/2^n) + q_{n-1}(1) + k_n(1)$ est impair, nous choisissons

$$q_n(1) = \frac{1}{2} [p(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}) + q_{n-1}(1) + k_n(1) - 1], \quad (15)$$

et

$$\lambda_n = 2^{n-1} + \lambda_{n-1}, \quad (16)$$

si bien que (7) est aussi vérifiée pour $\widehat{\varphi}_F(1/2^n)$.

Si (7) est vérifiée pour tous les m à l'ordre $(n-1)$, elle sera aussi vérifiée pour $\widehat{\varphi}_F(2m/2^n)$ dans les deux choix possibles de $q_n(1)$ et λ_n . Ce résultat se vérifie

immédiatement quand (14) est satisfaite. Quand on choisit (16) le résultat s'obtient en remplaçant λ_{n-1} par sa valeur ($\lambda_n - 2^{n-1}$).

Comme (6) ne contient pas de divisions, si $\hat{\varphi}_F(1/2^n)$ et $\hat{\varphi}_F(m/2^{n-1})$ vérifient (7), (7) sera aussi vérifiée pour $\hat{\varphi}_F[(2m+1)/2^n]$ pour tout m

En résumé, si l'estimation de la phase à l'ordre $(n-1)$, $\hat{\varphi}_F(m/2^{n-1})$ diffère de la vraie valeur de la phase d'un terme linéaire, alors il est toujours possible d'ajouter un terme à $\hat{\varphi}_F(1/2^n)$ de telle sorte que l'estimation à l'ordre n , $\hat{\varphi}_F(m/2^n)$ diffère aussi de la vraie valeur de la phase d'un terme linéaire.

3. ALGORITHME FONDÉ SUR LA TRIPLE CORRÉLATION

Les méthodes d'identification HOS de modèles MA sont conçues pour analyser des séquences d'échantillons iid filtrées: elles ne peuvent pas être utilisées pour traiter des signaux SABLE. Nous avons donc cherché à modifier une méthode existante en vue de traiter ce type de problème. La plupart des méthodes ne peuvent convenir car elles sont fondées sur des identités utilisant le fait que le modèle est d'ordre fini (on se reportera aux références [3,4,9,11] pour des présentations de ces méthodes). Or le support de la triple corrélation d'un signal SABLE n'est pas fini. Par exemple l'algorithme proposé par Giannakis [4] est fondé sur la formule de Shiryayev [10]

$$C_{3x}(\tau_1, \tau_2) = \gamma_{3,\omega} \sum_{i=0}^q b(i)b(i+\tau_1)b(i+\tau_2), \quad (17)$$

où $C_{3x}(\tau_1, \tau_2)$ est la corrélation d'ordre trois du signal de sortie mesuré $x(t)$, $\gamma_{3,\omega}$, le moment d'ordre 3 de l'entrée $\omega(t)$, et $b(0), \dots, b(q)$ les coefficients inconnus du filtre FIR d'ordre q qu'il faut estimer. La variance de $\omega(t)$ sera notée $\gamma_{2,\omega}$ et la corrélation d'ordre 2 de $x(t)$, $C_{2x}(\tau)$. Cet algorithme nécessite absolument la connaissance de q .

Si on choisit $\tau_2 = q$ et $\tau_1 = 0$ dans (17) on obtient simplement une solution du problème, mais ce choix de τ_1 et τ_2 ne permet pas d'écrire une extension directe aux signaux SABLE.

Une méthode qui se prête bien à une extension est celle proposée par Alshebeili, Venetsanopoulos et Cetin (AVEC) [1]. C'est sans doute une des seules à ne pas être fondée sur des calculs d'indice faisant intervenir explicitement l'ordre du modèle. On peut lui appliquer le filtrage annulant le spectre d'ordre trois dans les triangles ABC et EFG.

La valeur théorique de la corrélation d'ordre 3 du signal SABLE, $C_{3x}(\tau_1, \tau_2)$ s'obtient en appliquant une convolution bidimensionnelle à $C_{3x}(\tau_1, \tau_2)$, corrélation d'ordre 3 du signal obtenu en filtrant une séquence iid par le filtre numérique dont la réponse impulsionnelle est $b(0), \dots, b(q)$ [5].

L'opérateur de convolution bidimensionnel est celui à une réponse en fréquence constante dans l'hexagone et nulle dans les deux triangles. Sa réponse impulsionnelle est

$$\begin{aligned} \text{pour } m=n=0: h(0,0) &= 3/4; \\ \text{pour } m \neq 0: h(m,0) &= h(0,m) = h(m,m) = [1 - (-1)^m] / [2\pi^2 m^2]; \\ \text{pour } mn(m-n) \neq 0: h(m,n) &= 1 / [2\pi^2 nm(m-n)] \\ &\times [n(-1)^n - m(-1)^m + (m-n)(-1)^{m-n}]. \end{aligned} \quad (18)$$

On a ainsi ,

$$C_{3x}(m, n) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} C_{3x}(\tau_1, \tau_2)h(m-\tau_1, n-\tau_2) . \quad (19)$$

La présence implicite de cette convolution 2D dans les données analysées interdit de ne prendre en compte qu'un nombre fini d'échantillons de la corrélation d'ordre 3 du signal SABLE. On ne peut donc pas appliquer ce genre d'algorithme au type de signaux que nous devons traiter.

Au contraire, l'algorithme AVEC [1] est fondé sur une identité globale entre la corrélation d'ordre trois, les coefficients du système linéaire et la corrélation d'ordre deux sans prendre en compte fondamentalement l'ordre du modèle. Ceci permet de l'étendre aux signaux SABLE. L'équation fondamentale de AVEC est la suivante:

$$\sum_{i=0}^q b(i)C_{3x}(m-i, n-i) = \frac{\gamma_{3\omega}}{\gamma_{2\omega}} \sum_{i=\min(q, q+m-n)}^{\max(0, m-n)} b(i)b(n-m+i)C_{2x}(m-i), \quad (20)$$

pour tous les m et n . Dans cette équation les $b(i)$ sont les échantillons du filtre numérique RIF inconnu, $C_{3x}(m, n)$ la corrélation d'ordre trois du signal synchronisé par l'horloge d'émission (et donc non stationnaire, comme une séquence iid filtrée passe-bas) et $C_{2x}(m)$ sa corrélation d'ordre deux.

La première étape d'AVEC résout un système surdimensionné d'équations du type (20) sous la contrainte $b(0) = 1$, où les inconnues sont les $b(i)$ pour $i = 1, \dots, q$ et les produits de la forme $b(i)b(j)$. La compatibilité entre les estimation $\beta(i,j)$ des produits $b(i)b(j)$ et les valeurs $b(i)$ est forcée en réduisant le rang de la matrice composée des éléments $\beta(i,j)$. Cette réduction de rang est fondée sur une décomposition en valeurs singulières.

3.2. Extension de l'algorithme AVEC au x signaux SABLE

Dans le cas des signaux SABLE, la triple corrélation mesurée est théoriquement obtenue en filtrant $C_{3x}(m, n)$ par le filtre $h(m,n)$ dont la transformée de Fourier a un support hexagonal. Pour que (20) reste vérifiée il est nécessaire d'appliquer la convolution bidimensionnelle par $h(m,n)$ à son second membre. Par conséquent nous cherchons les valeurs de $b(i)$ vérifiant

$$\sum_{i=0}^q b(i)C_{3x}(m-i, n-i) = \frac{\gamma_{3\omega}}{\gamma_{2\omega}} \sum_{i=0}^q \sum_{\tau_1=q-i}^{q-i} b(i)b(\tau_2-\tau_1+i)C_{2x}(\tau_1-i)h(m-\tau_1, n-\tau_2) \quad (21)$$

ou encore en modifiant l'ordre des sommations pour exprimer les coefficients de $b(i)b(j)$

$$\sum_{i=0}^q b(i)C_{3x}(m-i, n-i) = \frac{\gamma_{3\omega}}{\gamma_{2\omega}} \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^q b(i)b(j) \sum_{k=q-j}^{q+j} C_{2x}(k-j)h(m+j-i, n-k) \quad (22)$$



où $\gamma_{2\omega}$ et $\gamma_{3\omega}$ sont les moments du troisième ordre du signal SABLE. Ainsi les équations à résoudre dans (4) seront remplacées par des équations déduites de (22). La seconde étape de l'algorithme AVEC n'est pas modifiée. Une simulation dans laquelle nous générons l'équivalent du filtrage et de l'échantillonnage d'un bruit blanc stationnaire au troisième ordre suivant la méthode décrite dans [5] permet de vérifier la validité de cette approche: on voit que les algorithmes d'identification classiques comme AVEC ne permettent pas de traiter les signaux SABLE alors que la modification que nous proposons donne des résultats corrects. Notons que la modification peut s'appliquer au traitement des signaux iid filtrés numériquement.

Filtre à identifier
$1 + 0.100 z^{-1} - 1.870 z^{-2} + 3.020 z^{-3} - 1.435 z^{-4} + 0.490 z^{-5}$
Application d'AVEC à un signal synchrone
$1 + 0.064 z^{-1} - 0.85 z^{-2} + 2.98 z^{-3} - 1.425 z^{-4} + 0.47 z^{-5}$
Application de notre extension à un signal synch.
$1 + 0.16 z^{-1} - 2.00 z^{-2} + 3.13 z^{-3} - 1.48 z^{-4} + 0.49 z^{-5}$
Application d'AVEC à un signal SABLE
$1 + 110. z^{-1} - 212. z^{-2} + 246. z^{-3} - 100. z^{-4} + 14.8 z^{-5}$
Appl. de l'extension à un signal SABLE
$1 + 0.03 z^{-1} - 1.93 z^{-2} + 3.24 z^{-3} - 1.69 z^{-4} + 0.55 z^{-5}$

Table I: résultat de simulations comparant les différents algorithmes

CONCLUSION

Dans cette communication, nous avons essayé de montrer les conséquences importantes de la prise en compte de la stationnarité du signal avant échantillonnage lorsqu'on effectue une modélisation ou une analyse spectrale à l'ordre trois et nous avons proposé deux approches, l'une dans le domaine spectral, l'autre dans le domaine temporel qui permettent de tenir compte ces contraintes liées à la stationnarité. Au delà de ces modifications d'algorithmes, il est nécessaire dans les applications des techniques fondées sur l'analyse des spectres d'ordre supérieur, de tenir compte de la différence importante entre les caractéristiques des deux types de signaux: d'un côté ceux obtenus en filtrant numériquement un signal iid, qu'on analyse en simulation et de l'autre les signaux stationnaires à temps continu

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] S. A. Alshebeili, A.N. Venetsanopoulos and A. E. Cetin, "Cumulant based identification approaches for nonminimum phase FIR systems", IEEE trans on SP, vol. SP 41, n° 4, April 1993, pp 1576-1588.

[2] D. R. Brillinger and M. Rosenblatt, "Computation and interpretation of kth-order spectra, in Spectral analysis of time series, B. Harris, ed., Wiley, New York, 1967, pp 189-232.

[3] G. Favier, D. Delembé and J. L. Peyre, "ARMA identification using high order statistics based linear methods: an unified presentation", EUSIPCO, Edinburgh (UK), 12-16 Sept. 1994.

[4] G. B. Giannakis and J. M. Mendel, "Identification of nonminimum phase systems using higher order statistics", IEEE trans. on ASSP, vol. 37, n° 3, march 1989, pp 360-377.

[5] J. LeRoux, C. Coroyer and D. Rossille, "Illustration of the effects of sampling on higher-order spectra", Signal Processing, n° 36, 1994, pp 375-390.

[6] J. Le Roux, D. Rossille and C. Huet, "A Multiresolution Extension of Lohmann-Weigelt-Wirmitzer Recursion for Computing a Fourier Transform Phase from a Third Order Spectrum Phase", report I3S, University of Nice, submitted to JOSA.

[6]. A. W. Lohmann, G. P. Weigelt and B. Wirmitzer, "Speckle masking in astronomy - triple correlation theory and applications", Appl. Opt. 22, pp 4028-4037 (1983).

[7]. J. C. Marron, P. P. Sanchez and R. C. Sullivan, "Unwrapping algorithm for least-squares phase recovery from the modulo 2π bispectrum phase", J. Opt. Soc. Am., Vol. 7, n° 1, January, pp 14-20, (1990).

[8] J. M. Mendel, "Tutorial on higher order statistics, (spectra) in signal processing and system theory: theoretical results and some applications", Proceedings of the IEEE, vol 79, n° 3, 1991, pp 277-305.

[10] A. N. Shiryaev, "Some problems in spectral theory of higher-order moments, I", Th. Prob. App., Vol. 5, 1960, pp 265-284.

[11] J. K. Tugnait, "New results on FIR system identification using higher-order statistics", IEEE trans. on Signal Processing, vol. SP 39, n° 10, Oct. 1991, pp 1307-1317.