



EXPULSE COMPLEXE, estimation bayésienne de sinusôides par déconvolution de la transformée de Fourier discrète du signal

Frédéric DUBLANCHET^{1,2}, Patrick DUVAUT¹,
Jérôme IDIER², Guy DEMOMENT²

¹ETIS, Groupe Signal, ENSEA 6, avenue du Ponceau 95014 Cergy-Pontoise Cédex.

²Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS–ESE–UPS)
Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cédex.

RÉSUMÉ

La principale limitation des techniques traditionnelles d'analyse spectrale haute résolution réside dans leur faible robustesse vis-à-vis d'une méconnaissance du nombre de sources. Une alternative consiste à reformuler le problème en termes de *détection* et d'*estimation conjointes* dans le domaine de Fourier. La transformée de Fourier discrète du signal peut s'interpréter comme un problème inverse mal-posé, régularisé dans un contexte bayésien : le spectre d'amplitudes à restaurer est modélisé par un processus composite Bernoulli-Gaussien complexe, dont la densité peut être asservie à une statistique de Fermi-Dirac.

ABSTRACT

The main drawback shared by the classical high resolution spectral analysis methods lies in a poor robustness with respect to the unavailable knowledge of the number of sources. To overcome this drawback, the whole problem is stated as a detection-estimation issue. Processing the Discrete Fourier Transform of the signal is regarded as an inverse problem whose ill-posedness leads to a regularization in a Bayesian framework. The spectrum to be restored is modeled as a compound Bernoulli-Gaussian complex process ; the Bernoulli process can be driven by Fermi-Dirac statistics.

1. INTRODUCTION

CES travaux font suite à ceux qui concernent la déconvolution d'un périodogramme [1]. Ne fournissant pas une représentation exhaustive des données (perte de l'information sur la phase, non-linéarité), le périodogramme engendre par sa manipulation diverses approximations. Ces travers ont motivé l'extension des principes de [1] à la transformée de Fourier discrète (TFD), qui permet l'écriture d'une vraisemblance naturellement optimale.

La méthode proposée pallie la principale limitation des techniques traditionnelles d'analyse spectrale haute résolution, qu'elles soient fondées sur une décomposition en valeurs singulières de la matrice de données (MUSIC, ESPRIT, Matrix Pencil, etc.) ou sur une argumentation au sens du maximum de vraisemblance (BRESLER), à savoir leur faible robustesse vis-à-vis de la détermination du nombre de raies (ou de *sources* en traitement spatial). D'après la théorie statistique de la décision [2], cette faiblesse émane de la difficile prise en charge d'un problème de détection. En effet, le paramètre dont la méconnaissance dégrade les performances des méthodes classiques est à valeurs discrètes [3]. Or les principes sous-tendant ces différents algorithmes visent surtout à atteindre une *estimation optimale* des caractéristiques des sources plus qu'une *détection optimale* de leur nombre qui discriminerait au mieux l'espace-signal de l'espace-bruit. Au moment où cette discrimination devient malgré tout indispensable, des critères *de choix et de tri* doivent être greffés [3], mais dont l'efficacité disparaît dès que le rapport signal sur bruit descend en-dessous de quelques décibels. Ce résultat n'est pas surprenant : la structure des algorithmes ne reflète que très partiellement une optimalité globale de détection-estimation conjointes. Prise en charge tard, et uniquement à l'intérieur des tâches incombant à

l'estimation, l'optimalité de la détection ne pourra suggérer aucune remise en question de la structure générale des procédures. C'est pourquoi nous reformulons l'analyse de raies pures noyées dans un bruit additif comme un problème inverse dans l'espace de Fourier : celui de la déconvolution de la transformée de Fourier discrète. Après *régularisation directement dans l'espace cible de l'analyse*, cette déconvolution s'énonce bien comme un problème de **détection et d'estimation conjointes** capable de gérer la détermination du nombre de sources.

2. FORMULATION DU PROBLÈME DANS L'ESPACE DE FOURIER

Considérons N échantillons $Z[n]$ d'un signal complexe circulaire $Y[n]$ issu de la superposition de p raies noyées dans un bruit blanc gaussien complexe circulaire $B[n]$, centré, de variance connue σ_b^2 et indépendant de $Y[n]$:

$$Z[n] = Y[n] + B[n] = \sum_{i=1}^p A_i e^{(2j\pi\nu_i n + j\phi_i)} + B[n] \quad (1)$$

Les fréquences réduites ν_i sont supposées équiréparties dans l'intervalle $[0, 1[$ et le problème consiste à identifier la variable discrète p (détection) et les p triplets $\{\nu_i, A_i, \phi_i\}$ (estimation) définissant chaque source.

À la différence des techniques classiques qui retiennent la représentation temporelle ou une modélisation du signal, la méthode proposée travaille sur une représentation différente et duale des observations, générée par leur transformée de Fourier (TF)

$$z(\nu) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} Z[n] e^{-2j\pi\nu n}, \nu \in [0, 1[.$$



Posant $A_i^c = A_i e^{j\phi_i}$, un calcul simple mène à l'expression :

$$y(\nu) = \sum_{i=1}^p A_i^c h(\nu - \nu_i) \quad (2)$$

$$= \sum_{i=1}^p A_i^c \int_0^1 h(\nu - \nu') \delta(\nu' - \nu_i) d\nu' \quad (3)$$

dans laquelle $h(\cdot)$ désigne la fonction complexe :

$$h(\nu) = e^{-j\pi\nu(N-1)} \sqrt{N} \frac{\text{sinc}(\pi N\nu)}{\text{sinc}(\pi\nu)}. \quad (4)$$

L'écriture (3) de la TF des données non bruitées sous la forme d'un produit de convolution circulaire continu fait apparaître la distribution de Dirac $\delta(\cdot)$ qui traduit la nature impulsionnelle du spectre de raies. En pratique, la TFD des observations, qui n'est autre que $z(\nu)$ évaluée aux fréquences discrètes $\frac{n}{N}$, $n = 0, \dots, N-1$, échantillonne l'axe fréquentiel à la cadence $\frac{1}{N}$. Sous l'hypothèse de fréquences discrètes ν_i de la forme $\frac{k_i}{N}$, une expression analogue à (3) est alors obtenue sous la forme d'un produit de convolution circulaire discret :

$$y\left[\frac{n}{N}\right] = \sum_{k=0}^{N-1} h\left[\frac{n}{N} - \frac{k}{N}\right] s\left[\frac{k}{N}\right] = \sqrt{N} s\left[\frac{n}{N}\right]. \quad (5)$$

La k -ième composante $s\left[\frac{k}{N}\right]$ du vecteur complexe \mathbf{s} est non nulle et vaut A_i^c uniquement s'il existe $k_i \in [0, \dots, N-1]$ tel que $k = k_i$.

La résolution naturelle de Fourier est de l'ordre de l'inverse du nombre d'observations, soit $\frac{1}{N}$. La franchir suggère de discrétiser plus finement l'espace fréquentiel, dans des proportions dictées par la valeur d'un facteur α . Alors pour des fréquences discrètes ν_i de la forme $\frac{k_i}{\alpha N} = \frac{k_i}{N_F}$ où $k_i \in [0, \dots, N_F-1]$, la relation (5) se généralise à :

$$y\left[\frac{n}{N}\right] = \sum_{k=0}^{N_F-1} h\left[\frac{n}{N} - \frac{k}{N_F}\right] s\left[\frac{k}{N_F}\right] \quad (6)$$

et s'identifie, par extension, à un produit de convolution circulaire "généralisé". Son écriture matricielle $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s}$ exhibe une matrice \mathbf{H} ($N \times N_F$) de structure circulante-bloc, dont le terme générique se déduit explicitement du noyau de convolution h (4).

Afin d'alléger les notations, les quantités référencées par k et n évolueront désormais dans les ensembles respectifs $[0, \dots, N_F-1]$ et $[0, \dots, N-1]$. Le problème général de l'estimation du p -uplet $\{\nu_1, \dots, \nu_p\} \in [0, 1]^p$ à partir des seules N observations est non-linéaire. D'autre part, la probabilité qu'une raie coïncide avec un canal issu de l'échantillonnage fréquentiel au pas $\frac{1}{\alpha N}$ est nulle, $\forall \alpha$. Une alternative consiste alors à linéariser le problème autour d'un ensemble fini de canaux fréquentiels (CF) issus d'une discrétisation suffisamment fine de l'espace de Fourier, de façon à encadrer étroitement la solution continue. La prise en charge d'une raie entre deux de ces canaux est assurée par un développement limité au premier ordre du noyau de convolution h . En effet, toute raie cherchée peut s'écrire sous la forme $\nu_i = \frac{k_i}{N_F} - \delta\nu_i$ avec $|\delta\nu_i| < \frac{1}{2N_F}$ et $0 \leq k_i \leq N_F-1$ et, partant de (2), les considérations précédentes mènent sans difficulté à la relation de double convolution généralisée :

$$y[n] \simeq \sum_{k=0}^{N_F-1} h[n-k]s[k] + \frac{dh}{d\nu}[n-k]r[k] \quad (7)$$

dans laquelle les seules composantes non nulles $s[k_i]$ et $r[k_i]$ sont liées aux dérivés fréquentielles $\delta\nu_i$ par

$$r[k_i] = \delta\nu_i s[k_i]. \quad (8)$$

L'erreur liée à l'approximation numérique est majorée en module par $\epsilon = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\alpha^2}$. La version bruitée de l'équation (7) revêt la forme matricielle linéaire

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (9)$$

avec les quantités partitionnées $\mathbf{A} = \left[\mathbf{H} \mid \frac{d\mathbf{H}}{d\nu}\right]$ et $\mathbf{x}^t = [s^t | r^t]^t$.

Les matrices \mathbf{H} et $\frac{d\mathbf{H}}{d\nu}$ sont de même taille ($N \times N_F$). Le bruit \mathbf{b} , TFD de B , est blanc gaussien complexe circulaire $\mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$ et indépendant de \mathbf{x} .

La méthode EXPULSE COMPLEXE inverse le mélange convolutif (9) en régularisant les données dans l'espace fréquentiel.

3. DEUX NIVEAUX DE RÉGULARISATION

L'estimation de \mathbf{x} à partir de \mathbf{z} constitue un problème mal-posé. Les seules N observations ne suffisent pas à déterminer une unique solution de taille N_F ($N_F > N$), problème aggravé par un ordre α important. La régularisation indispensable du problème consiste ici à ajouter une information *a priori* sur la nature de la solution, dont la structure impulsionnelle peut avantageusement être décrite par un processus composite Bernoulli-gaussien complexe.

3.1. Régularisation BG

La modélisation BG qui a originellement été introduite et continue d'être exploitée dans les problèmes d'échographie de milieux stratifiés [4] [5] [6], est utilisée ici dans un tout autre contexte [1]. Les fréquences discrètes où la séquence de Bernoulli prend la valeur 1 sont des raies potentielles de l'espace-signal, à une dérive fréquentielle près ; le processus gaussien représente, quant à lui, l'amplitude complexe des raies. S'inscrivant dans un cadre bayésien, la régularisation proposée exige la spécification des distributions de probabilité de toutes les quantités mises en jeu dans (9).

En vertu des hypothèses sous-jacentes à (7), les vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{s} sont pilotés par une même séquence de Bernoulli \mathbf{q} , de paramètre $\lambda \in [0, 1]$, définie par

$$\forall k = 0, \dots, N_F - 1 : \begin{cases} \Pr(\mathbf{q}[k] = 1) = \lambda \\ \Pr(\mathbf{q}[k] = 0) = 1 - \lambda. \end{cases} \quad (10)$$

La variable conditionnée ($s[k] | \mathbf{q}[k] = q$) est gaussienne complexe circulaire, centrée, de variance $q\sigma^2$. D'après les mêmes hypothèses, les p dérivés fréquentielles $\delta\nu_i$ sont considérées comme une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, indépendantes des $s[k]$ et uniformément distribuées dans l'intervalle centré $I = \left[-\frac{1}{2N_F}, \frac{1}{2N_F}\right]$. Alors conditionnellement aux réalisations positives de la séquence \mathbf{q} , $\mathbf{r}[k]$ et $s[k]$ liées par (8) sont décorrélées et la densité de probabilité de $(\mathbf{r}[k] | \mathbf{q}[k] = q)$ s'exprime par la fonction "intégrale exponentielle" [8] :

$$\begin{cases} p_{\mathbf{r}[k] | \mathbf{q}[k]=1}(s) = \frac{N_F}{\pi\sigma^2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-\frac{4N_F^2 |s|^2}{\sigma^2} t} dt \\ p_{\mathbf{r}[k] | \mathbf{q}[k]=0}(s) = \delta(s) \end{cases} \quad (11)$$

Cette forme analytique, lourde à manipuler, et l'approximation de la relation (7) sont autant d'arguments en faveur

d'une limitation, à ce stade, de la description statistique de $(\mathbf{r}[k]|q[k] = q)$ à ses moments d'ordre 1 et 2, lesquels se confondent respectivement avec 0 et $q \frac{\sigma^2}{12N_F^2}$. En substituant ainsi à la loi de r la gaussienne de même moyenne et même variance, le processus BG complexe utilisé s'exprime comme un processus composite blanc de paramètres (λ, σ^2) , constitué de variables indépendantes. La densité λ s'interprète comme la probabilité moyenne d'occurrence d'une raie dans un intervalle I centré sur l'une quelconque des N_F fréquences discrètes. Elle est allouée au centre (*i.e.* le canal fréquentiel) de l'intervalle susceptible d'accueillir au plus une raie.

En toute rigueur, la donnée du jeu d'hyperparamètres (λ, σ^2) suffit à énoncer clairement le problème dans un cadre bayésien. Jusqu'ici, la compacité λ est supposée constante sur l'étendue de la bande fréquentielle $[0, 1]$. Nous proposons de la faire varier d'un canal à l'autre en conférant au processus de Bernoulli une nature non-uniforme.

3.2. Régularisation stochastique

Les $\alpha - 1$ canaux fréquentiels introduits entre deux canaux naturels (CN) distants de $\frac{1}{N}$ sont "dégénérés" au sens où, sans hypothèse supplémentaire, ils n'améliorent pas la résolution naturelle de la TFD. Lever cette dégénérescence, donc améliorer la résolution de l'analyse, suppose de conjecturer la forme du spectre estimé sur l'ensemble des canaux. Cette levée est traditionnellement obtenue par "prolongement temporel" du signal en dehors de l'horizon des N points observés, prolongement en général issu d'une modélisation du processus originel. La levée proposée ici intervient directement dans l'espace de Fourier : elle consiste à ajouter de l'information sur les canaux dégénérés, compatible bien entendu avec celle déjà disponible et inhérente aux canaux naturels de l'analyse harmonique. Pour ce faire, un parallèle est fait avec la mécanique quantique et la physique statistique. Entre deux CN adjacents, les réalisations potentielles du processus de Bernoulli sont considérées comme des *fermions* à distribuer sur $\alpha - 1$ canaux dégénérés. Les règles de cette distribution (plusieurs réalisations possibles entre deux CN et au plus une par CF) justifient le choix de fermions. La résolution [7] de ce problème combinatoire requiert la maximisation de l'entropie statistique du système en milieu ouvert (en cohérence avec l'absence d'hypothèse sur le nombre de particules à répartir) sous une seule contrainte d'ordre énergétique liée au périodogramme π . La méthode des multiplicateurs de Lagrange conduit alors à une statistique de Fermi-Dirac de paramètres (ρ, θ) qui munit chaque CF d'une probabilité d'occupation *a priori* selon

$$\lambda[k] = \frac{1}{1 + e^{-\frac{\pi[k] - \theta}{\rho}}}. \quad (12)$$

À (ρ, θ) fixé, la régularisation stochastique permet en outre de définir un ensemble de γ CF ($\gamma \leq N_F$) plus probables que d'autres par comparaison de λ à un seuil minimal. L'exploration de cette partition \mathcal{P} plutôt que la totalité des CF réduit la complexité calculatoire de la méthode.

4. DÉTECTION-ESTIMATION BAYÉSIENNES

La restauration d'un processus BG est une opération de *détection-estimation* conjointes qui peut s'organiser en

deux tâches séquentielles : la première est dédiée à la détection de la séquence de Bernoulli \mathbf{q} par optimisation d'un critère de vraisemblance approprié, la seconde concerne l'estimation de \mathbf{x} à l'aide des formules classiques en environnement linéaire et gaussien. Différentes stratégies sont proposées en déconvolution BG et les meilleurs résultats semblent subordonnés au choix d'une détection fondée sur une vraisemblance marginale *a posteriori* pour \mathbf{q} , associée à une estimation de \mathbf{x} par *maximum a posteriori* (MAP) :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}} = \arg \max_{\mathbf{q}} p(\mathbf{q}|\mathbf{z}) = \arg \max_{\mathbf{q}} p(\mathbf{z}|\mathbf{q}) \Pr(\mathbf{q}) \\ \hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}|\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{z}) = \arg \max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{z}|\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{x}) p(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{q}}) \end{cases}$$

La détection équivaut à maximiser le critère

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_D(\mathbf{q}) &= -\ln |\mathbf{B}(\mathbf{q})| - \mathbf{z}^\dagger \mathbf{B}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{z} \\ &+ \sum_{k \in Q_1} \ln \lambda[k] + \sum_{k \in Q_0} \ln(1 - \lambda[k]) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{où ; } \begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \mathbb{E} \{ \mathbf{z} \mathbf{z}^\dagger \} = \mathbf{A} \mathbf{R}(\mathbf{q}) \mathbf{A}^\dagger + \sigma_b^2 \mathbf{I} \\ \mathbf{R}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sigma^2 \text{diag} \{ \mathbf{q} \} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\sigma^2}{12N_F^2} \text{diag} \{ \mathbf{q} \} \end{bmatrix} \\ Q_q = \{ k/q[k] = q, q = 0 \text{ ou } 1 \} \end{cases} \quad (14)$$

La maximisation exacte de $\mathcal{C}_D(\mathbf{q})$ sur \mathcal{P} qui requiert son évaluation pour les 2^γ configurations possibles de \mathbf{q} est prohibitive. Aussi nous inspirons-nous des algorithmes utilisés en sismique [4] [5] fondés sur la technique SMLR de maximisation sous-optimale, initialement introduite par KORMYLO et MENDEL [6]. Celle-ci repose sur le procédé itératif suivant : partant d'une séquence initiale \mathbf{q}_0 , le critère est calculé sur un voisinage de \mathbf{q}_0 dont tous les éléments \mathbf{q}_k diffèrent de \mathbf{q}_0 uniquement au site k . Le faible coût calculatoire de cette exploration lié à une relation simple entre $\mathcal{C}_D(\mathbf{q}_k)$ et $\mathcal{C}_D(\mathbf{q}_0)$ justifie une telle approche :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_D(\mathbf{q}_k) &= \mathcal{C}_D(\mathbf{q}_0) + \mathbf{u}_0^\dagger \mathbf{V}_k \Theta_k^{-1} \mathbf{V}_k^t \mathbf{u}_0 \\ &- \ln \left(\frac{\sigma^4}{12N_F^2} |\Theta_k| \right) - \epsilon_k \ln \left(\frac{1}{\lambda[k]} - 1 \right) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \epsilon_k = \mathbf{q}_k[k] - \mathbf{q}_0[k] = \pm 1 \\ \Theta_k = \epsilon_k \mathbf{\Pi}^{-1} + \mathbf{V}_k^t \mathbf{D}_0 \mathbf{V}_k \\ \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{12N_F^2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} = \mathbf{A}^\dagger (\mathbf{B}(\mathbf{q}))^{-1} \mathbf{A} \\ \mathbf{u} = \mathbf{A}^\dagger (\mathbf{B}(\mathbf{q}))^{-1} \mathbf{z} \\ \mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{v}_k \end{bmatrix}; \mathbf{v}_k[l] = \delta[k - l]. \end{cases} \quad (16)$$

La séquence qui maximise le critère est alors retenue comme séquence initiale de l'itération suivante moyennant les relations de mise à jour des quantités auxiliaires :

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{D}_0 - \mathbf{D}_0 \mathbf{V}_k \Theta_k^{-1} \mathbf{V}_k^t \mathbf{D}_0 \quad (17)$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0 - \mathbf{D}_0 \mathbf{V}_k \Theta_k^{-1} \mathbf{V}_k^t \mathbf{u}_0. \quad (18)$$

L'estimation MAP de \mathbf{x} qui repose sur la linéarité de (9) et la normalité de $(\mathbf{x}|\mathbf{q})$ se déduit des calculs précédents :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}) \mathbf{A}^\dagger \mathbf{B}(\hat{\mathbf{q}})^{-1} \mathbf{z}. \quad (19)$$

Or par définition $\hat{\mathbf{x}} \triangleq [\hat{\mathbf{s}}^t \hat{\mathbf{r}}^t]^t$ et les $\hat{p} \triangleq \sum_k \hat{q}[k]$ composantes non nulles de chacune de ses partitions $\hat{\mathbf{s}}$ et $\hat{\mathbf{r}}$,

sélectionnées par $\widehat{Q}_1 = \{\widehat{k}_i, i = 1, \dots, \widehat{p}\}$, permettent d'estimer les \widehat{p} dérivés fréquentielles au sens des moindres carrés selon :

$$\widehat{\delta\nu}_i = \frac{\text{Re}(\widehat{r}_i) \text{Re}(\widehat{s}_i) + \text{Im}(\widehat{r}_i) \text{Im}(\widehat{s}_i)}{|\widehat{s}_i|^2}. \quad (20)$$

En posant $\widehat{h}_i[n] = h(\frac{n}{N} - \widehat{\nu}_i)$, $n = 0, \dots, N-1$, alors il vient $\forall i = 1, \dots, \widehat{p}$:

$$\begin{cases} \widehat{\nu}_i = \frac{\widehat{k}_i}{N_F} - \widehat{\delta\nu}_i \\ \widehat{A}_i^c = \widehat{h}_i^\dagger \left(\widehat{h}_i \widehat{h}_i^\dagger + \frac{\sigma_b^2}{\sigma^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{z} \end{cases} \quad (21)$$

La procédure SMLR est initialisée sur une séquence nulle. Une forme synthétique sera trouvée dans [4] [5]; la densité du processus de Bernoulli y est supposée constante. À λ constante, la forme sigmoïdale du seuil de probabilité au-delà duquel toute raie positionnée au site k augmente la valeur du critère C_D se rapproche de (12); elle justifie *a posteriori* la démarche inhérente à la régularisation stochastique. En effet, (15) et (16) mènent à $1/\{1 + \exp(\epsilon_k w_{0,k})\}$ où $w_{0,k} = \mathbf{u}_0^\dagger \mathbf{V}_k \Theta_k^{-1} \mathbf{V}_k^\dagger \mathbf{u}_0 - \ln\left(\frac{\sigma^4}{12N_F^2} |\Theta_k|\right)$. Cependant, à la différence de (12) qui fige le seuil de détection, celui-ci s'adapte aux itérations du SMLR.

La régularisation proposée associée à la parfaite connaissance de l'opérateur de convolution complexe \mathbf{A} explique une très bonne acuité de l'analyse et sa grande robustesse. La figure 1 exhibe un gain en terme de performances d'estimation comparativement à la méthode ESPRIT et un décrochement plus bas en rapport signal sur bruit. Notre méthode permet de surcroît une bonne estimation de la dimension de l'espace-signal (Fig.2).

5. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons montré l'intérêt d'une approche bayésienne conjuguée à une modélisation impulsionnelle. Après une discrétisation très fine de l'espace de Fourier et l'introduction dans ce même espace des informations a priori indispensables à l'atteinte d'une haute résolution, la méthode tire un bon parti d'une modélisation Bernoulli-Gaussienne (BG) du spectre de raies à restaurer. Les statistiques du problème autorisent l'écriture explicite et l'optimisation analytique de vraisemblances de détection-estimation *a posteriori*, inspirées des algorithmes utilisés en sismique [4] [5]. L'inconvénient propre au modèle de Bernoulli qui positionne toute raie cherchée sur un ensemble fini de fréquences discrètes est levé, de façon satisfaisante, par une vraisemblance "prolongée", obtenue par développement limité entre deux fréquences discrètes. L'optimalité globale est scindée en deux tâches complémentaires et séquentielles de détection et d'estimation. La détection des raies est prise en charge par la compacité du processus de Bernoulli qui peut, par analogie à un problème de mécanique quantique, être asservie à une statistique de Fermi-Dirac. Enfin sur un plan pratique et à la différence des méthodes traditionnelles, l'algorithme respecte strictement la *structure* des dispositifs classiques opérationnels d'analyse spectrale (appareils de mesure) et spatiale (Radar-Sonar) fondées sur la transformée de Fourier discrète en se mettant en œuvre en aval de cette dernière. Il peut donc être considéré comme un module supplémentaire à "insérer", afin d'améliorer la résolution

lorsque le nombre d'échantillons temporels, en analyse spectrale, et le nombre de capteurs, en traitement d'antenne, se sont révélés a posteriori *insuffisants*.

Somme toute, il s'avère à l'usage qu'une discrétisation trop fine de l'espace fréquentiel favorise le dédoublement des raies. Cette pathologie, de nature algorithmique, et l'approximation liée au développement limité nous invitent à aborder le problème dans un continuum fréquentiel, en adoptant un modèle Poisson-gaussien pour traduire l'*a priori* impulsionnel sur la solution.

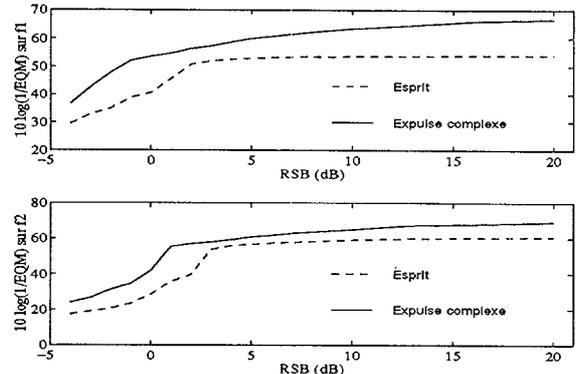


Fig.1 : comparaison des critères $10 \log_{10}(1/EQM)$ où EQM représente l'erreur quadratique moyenne d'estimation des deux fréquences (f_1, f_2) d'un signal, de puissances respectives (1;0,5). $N = 64$; f_1 et f_2 sont séparées de $1/128$ et situées entre deux canaux fréquentiels. Pour ESPRIT, le nombre de sources est figé à 2.

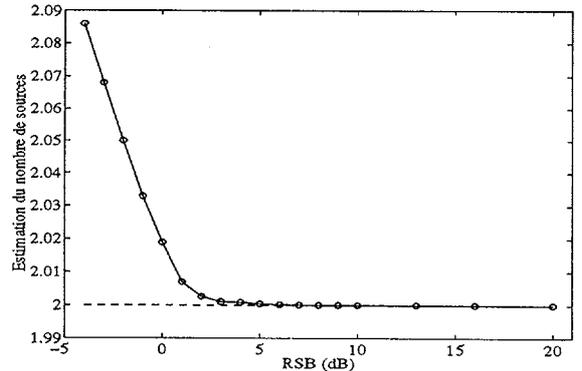


Fig.2 : estimation moyenne de la dimension de l'espace-signal par EXPULSE COMPLEXE; les résultats obtenus correspondent aux simulations de la fig.1.

6. RÉFÉRENCES

- [1] P. Duvaut et F. Dublanche, "EXPULSE, une nouvelle méthode d'analyse de raies fondée sur une approche inverse", *Traitement du Signal*, à paraître.
- [2] H.L. Van Trees, "Detection, Estimation and Modulation Theory", Wiley, Part 1, New York, (1968).
- [3] M. Akaike, "A new look at Statistical Model Identification", *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-19, p. 716-723 (December 1974).
- [4] Y. Goussard, G. Demoment et J. Idier, "A new algorithm for iterative deconvolution of sparse spike trains", *Proc. of ICASSP*, p. 1547-1550. (1990).
- [5] F. Champagnat, "Déconvolution impulsionnelle et extensions pour la caractérisation des milieux inhomogènes en échographie", *Thèse de doctorat*, Univ. Paris-Sud (1993).
- [6] J. Kormylo et J.M. Mendel, "Maximum-likelihood detection and estimation of Bernoulli-Gaussian processes", *IEEE Trans IT*, IT-28, p. 482-488 (1982).
- [7] P. Duvaut, "Traitement du Signal", *Hermès*, Chap.10 (1994).
- [8] M. Abramowitz et I. A. Stegun, "Handbook of mathematical functions", *Dover Publications*, New York p. 228 (1972).