

**Modélisation de signaux et systèmes à temps discret  
via un procédé d'orthogonalisation et un algorithme de Gauss-Newton**

Derrien A., Calvez L.C., Vilbé P.

LEST, URA CNRS N° 1329, Université de Bretagne Occidentale, BP 809, 29285 Brest Cédex

**Résumé**

Nous présentons ici une méthode originale d'approximation de signaux à temps discret. La méthode est optimale au sens de la minimisation d'un critère d'erreur quadratique. Elle peut s'appliquer à la simplification de modèles par la réduction de l'ordre des fonctions de transfert et à la modélisation de signaux expérimentaux. L'usage d'un procédé original d'orthogonalisation permet d'éviter l'inversion de matrices et le calcul de certains produits scalaires.

**1. Présentation**

Soit  $f[n]$  la réponse temporelle d'un système linéaire supposé stable. Le signal  $f[n]$  est connu soit sous forme d'une suite d'échantillons, soit par l'intermédiaire de sa transformée en  $z$  rationnelle.

Nous recherchons une approximation  $\tilde{f}[n]$  de  $f[n]$ , dont la transformée en  $z$  se présentera sous la forme rationnelle :

$$\tilde{F}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_r z^r + \dots + b_1 z + b_0}{z^r + \dots + a_1 z + a_0}$$

où  $A(z)$  est un polynôme strictement stable.

Nous cherchons à minimiser le critère de l'erreur quadratique défini par :

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{f}[n] - f(n))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} e^2[n]$$

**Abstract**

A new method for modelling discrete time systems and signals is presented here. This method is optimal in the sense of minimizing the quadratic error function. It applies successfully to model order reduction and to experimental signals modelling. The use of an original orthogonalisation process avoids Gram matrices inversion and some scalar products computation.

où  $e[n]$  représente l'écart entre la réponse  $\tilde{f}[n]$  du modèle approché et la réponse  $f[n]$  du modèle original. Ce critère nous permettra également de contrôler numériquement la qualité de l'approximation élaborée.

Notons qu'en présence de bruit blanc gaussien, la minimisation de  $Q$  correspond à la meilleure stratégie au sens de la maximisation de la densité de probabilité conjointe des échantillons bruités observés.

L'approximation  $\tilde{f}[n]$  peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions de base :

$$\tilde{f}[n] = \sum_{k=0}^r b_k \psi_k[n]$$

avec  $\psi_k[n] \leftrightarrow \Psi_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_k[n] z^{-n} = \frac{z^k}{A(z)}$



Le critère  $Q$  s'écrit alors :

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \sum_{k=0}^r b_k \psi_k[n] \right) - f[n] \right]^2$$

$Q$  est donc fonction des paramètres  $b_k$  et  $a_k$ .

Les meilleurs coefficients  $b_k$  et  $a_k$  sont solutions des équations obtenues en annulant les dérivées partielles de  $Q$  par rapport à chacun de ces paramètres. Le système ainsi obtenu est linéaire par rapport aux paramètres  $b_k$  mais il est évidemment non linéaire par rapport aux  $a_k$ . L'élaboration d'un modèle approché optimal nécessite donc la mise en œuvre d'un processus itératif. Chaque itération est divisée en deux phases principales :

- Calcul des meilleurs coefficients  $b_k$  du numérateur  $B(z)$  pour un dénominateur  $A(z)$  fixé, en exploitant la linéarité de ce problème,
- Calcul de corrections à apporter aux coefficients  $a_k$  du dénominateur  $A(z)$  pour les faire progresser vers les paramètres optimaux.

## 2. Détermination du modèle approché optimal

### 2.1 Première phase : calcul du meilleur numérateur

Le problème posé ici étant linéaire, cette première phase se résout simplement. Il faut s'assurer que le critère  $Q$  soit le plus faible possible. Cette condition est vérifiée lorsque les dérivées  $\partial Q / \partial b_k$  sont nulles. Cela nous conduit à résoudre un système de la forme :

$$\Psi b = f_{\Psi}$$

où  $\Psi$  est une matrice de Gram  $(r+1) \times (r+1)$  d'élément  $\Psi_{k,j} = \langle \psi_k, \psi_j \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_k[n] \psi_j[n]$ ,  $f_{\Psi}$  le vecteur de composante  $f_{\psi_k} = \langle f, \psi_k \rangle$  et  $b = [b_0 \dots b_r]^T$ .

Ce système d'équations pouvant être mal conditionné, sa résolution directe sera évitée par l'introduction d'un procédé d'orthogonalisation original décrit au paragraphe 3.

### 2.2 Deuxième phase : ajustement du dénominateur

Comme nous l'avons déjà signalé, ce deuxième problème est beaucoup plus délicat à résoudre car il fait intervenir un système d'équations non linéaires par rapport aux  $a_k$ . Nous utilisons ici une méthode de type Gauss-Newton.

Considérons de petites variations  $\Delta b_k$  et  $\Delta a_k$  des  $b_k$  et  $a_k$ . Ces variations provoquent une variation  $\Delta \tilde{f}[n]$  de  $\tilde{f}[n]$  qui au second ordre près peut s'écrire :

$$\Delta \tilde{f}[n] = \sum_{k=0}^{2r} \delta_k \psi_k[n]$$

$$\text{où } \delta = [\Delta b_0 \dots \Delta b_r \Delta a_0 \dots \Delta a_{r-1}]^T$$

$$\text{et } \psi_{k+r+1}[n] = \partial \tilde{f}[n] / \partial a_k - B(z) z^k / A^2(z)$$

A l'issue de la première phase relative au calcul des meilleurs  $b_k$ , nous avons une erreur  $e[n] = \tilde{f}[n] - f[n]$ . Après correction des  $a_k$  par les  $\Delta a_k$ , (et des  $b_k$  par les  $\Delta b_k$ ), nous obtenons une erreur :

$$e_{\Delta}[n] = (\tilde{f}[n] + \Delta \tilde{f}[n]) - f[n] = \Delta \tilde{f}[n] - (-e[n])$$

Les paramètres  $\delta_k$  minimisant  $Q_{\Delta} = \langle e_{\Delta}, e_{\Delta} \rangle$  peuvent être interprétés comme les coefficients de la meilleure représentation de  $(-e)$  sur la base de fonctions étendue  $\{\psi_k\}$ . Nous nous ramenons ainsi à un problème linéaire semblable à celui rencontré lors de la première phase relative au calcul du numérateur optimal. D'après la théorie des moindres carrés, les meilleures corrections  $\delta_k$  sont obtenues en résolvant le système :

$$\overline{\Psi} \delta = -e_{\Psi}$$

où  $\overline{\Psi}$  désigne une matrice de Gram  $(2r+1) \times (2r+1)$  d'élément  $\overline{\Psi}_{k,j} = \langle \psi_k, \psi_j \rangle$ , et  $e_{\Psi}$  le vecteur de composante  $e_{\psi_k} = \langle e, \psi_k \rangle$ .

La remarque du paragraphe 2.1 prend là toute son importance car le système d'équations à résoudre est maintenant de dimension deux fois plus grande que le précédent.

### 3. Procédé d'orthogonalisation

Supposons que nous connaissions une matrice  $C$ , dite d'orthogonalisation, telle que l'on ait  $\varphi = C\psi$  où  $\varphi$  est un vecteur de  $(r+1)$  fonctions orthogonales et  $\psi$  le vecteur des fonctions de base définies précédemment. L'inverse de la matrice  $\Psi$  est alors donnée par la formule explicite [1] :

$$\Psi^{-1} = C^T C_\sigma$$

où  $C_\sigma$  est une matrice se déduisant très simplement de  $C$ .

Le problème est maintenant de construire les matrices  $C$  et  $\bar{C}$ , orthogonalisant les fonctions de base étendues, avec précision.

#### Construction des matrices $C$ et $\bar{C}$

Nous avons développé une technique basée sur le tableau d'Aström-Raible du dénominateur  $A(z)$ , équivalent au tableau de Routh en continu, très utile pour tester la stabilité des systèmes discrets [2]. Chaque ligne de ce tableau est constituée des coefficients des polynômes  $A_k(z) = \sum_{i=0}^k a_i^k z^{k-i}$  définis par récurrence pour  $k=r, \dots, 1$  par  $A_{k-1}(z) = [A_k(z) - \alpha_k A_k^*(z)]/z$  où  $A_k^*(z) = z^k A_k(1/z)$  et  $\alpha_k = a_k^k / a_0^k$  avec  $A_r(z) = A(z)$ .

Soit  $a_0^r > 0$ ,  $A(z)$  est stable si et seulement si  $a_0^k > 0$ , ou de manière équivalente  $|\alpha_{k+1}| < 1$ , pour  $k=0, \dots, r-1$ . De plus, si  $A(z)$  est stable alors tous les  $A_k(z)$  sont stables.

Nous avons démontré que les fonctions  $\varphi_i^m[n]$  ayant pour transformées  $A_i(z)/A_m(z)$ ,  $0 \leq i \leq m \leq r$ , forment une famille de fonctions orthogonales. Considérons le cas  $\varphi_i[n] = \varphi_i^r[n]$ . Une matrice d'orthogonalisation  $C$ , d'éléments  $c_{i,j} = a_{i-1}^{j-1}$  est alors obtenue directement à partir du tableau d'Aström-Raible de  $A(z)$ .

Nous avons démontré que les fonctions orthogonales extraites du tableau d'Aström-Raible peuvent être étendues pour former d'autres familles de fonctions orthogonales [3].

Etant donnés deux polynômes stables  $A(z)$  et  $D(z)$ , de degré respectif  $r$  et  $r'$ , soient  $A_k(z)$  et  $D_k(z)$  les polynômes engendrés par l'algorithme d'Aström-Raible. Nous avons démontré que les fonctions  $\varphi_i[n]$  ayant pour transformées  $A_i(z)/A(z)$  pour  $i=0, \dots, r$  et  $A^*(z)D_{i-r-1}(z)/A(z)D(z)$  pour  $i=r+1, \dots, r+r'$ , forment une famille orthogonale. En considérant le cas  $D(z)=A(z)$ , nous avons déterminé la matrice d'orthogonalisation étendue  $\bar{C}$ , en effectuant des calculs polynômiaux inspirés de l'algorithme d'Euclide.

### 4. Exemples d'application

#### 4.1 Réduction de l'ordre d'un système

Soit la fonction de transfert d'ordre 8 considérée dans Liaw [4] :

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

avec

$$N(z) = 0.1625z^7 + 0.125z^6 - 0.0025z^5 + 0.00525z^4 - 0.022625z^3 - 0.000875z^2 + 0.003z - 0.0004125$$

$$D(z) = z^8 - 0.63075z^7 - 0.4185z^6 + 0.07875z^5 - 0.057z^4 + 0.1935z^3 + 0.09825z^2 - 0.0165z + 0.0225$$

Une réduction à l'ordre 2 est proposée dans [4]. Les résultats sont les suivants :

$$\tilde{F}_{2ref}(z) = \frac{0.15024z - 0.07017}{z^2 - 1.7594z + 0.8337} \quad J_{2ref} = 0.0123$$

$J_{2ref}$  correspond au critère d'erreur quadratique  $Q$  normalisé par rapport à l'énergie du système original.

A notre tour, nous avons réduit cette fonction à l'ordre 2 en appliquant notre méthode d'approximation optimale. La fonction de transfert obtenue ainsi que l'erreur quadratique relative sont les suivants :

$$\tilde{F}_2(z) = \frac{0.1668z - 0.0870}{z^2 - 1.7567z + 0.8308} \quad J_2 = 0.00013$$

Nous remarquons que nous aboutissons à un critère d'erreur pratiquement 100 fois plus faible que celui obtenu par Liaw. Notons aussi qu'en partant d'une solution suboptimale, seules 3 itérations ont suffi pour parvenir à la solution optimale.



Nous donnons figure 1 les courbes correspondant aux réponses indicielles des différents modèles.

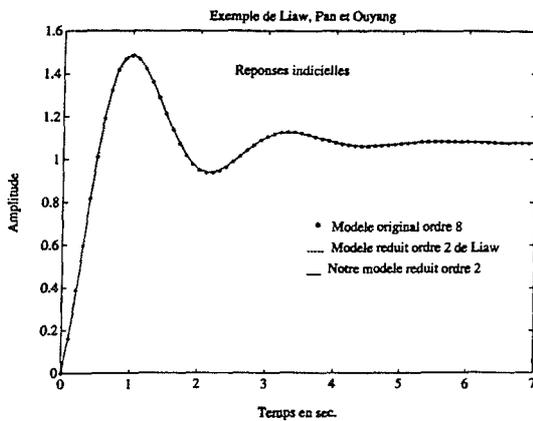


figure 1

#### 4.2 Modélisation d'un signal

Considérons l'exemple extrait de la thèse de Rothwell [5] relative à l'identification de cibles radar. Le problème consiste à extraire les fréquences naturelles de l'onde réfléchiée par un cylindre fin. On démontre qu'à partir d'un certain temps l'onde réfléchiée est caractéristique de la cible uniquement. Nous avons modélisé l'onde réfléchiée par un cylindre fin par un ordre 5. Les courbes représentant les réponses sont données figure 2.

Nous constatons que le modèle que nous avons élaboré est satisfaisant. Nous pensons qu'il contient de précieuses informations sur les caractéristiques propres de la cible.

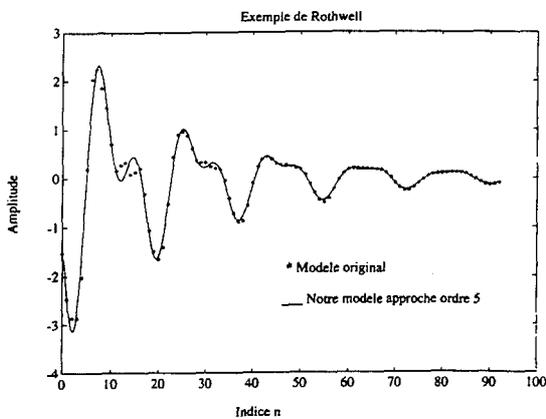


figure 2

## 5. Conclusion

La méthode proposée possède de grands avantages par rapport aux méthodes antérieures. A chaque pas, les ajustements optimaux sont donnés par des relations explicites. Elle ne nécessite pas la connaissance, et donc la détermination, des pôles de l'approximation. Le traitement est unique que ces pôles soient réels ou complexes, simples ou multiples. De plus tous les calculs sont effectués en arithmétique réelle uniquement. Enfin des contraintes linéaires de type égalité peuvent être prises en compte dans les deux phases du processus itératif, permettant ainsi de conserver des caractéristiques essentielles du signal ou du système à modéliser.

## Références

- [1] Calvez L. C., Vibé P., Glouannec P. : "Orthonormal and nonorthonormal least squares approximation of a function subject to linear equality constraints", *IEEE Trans., CAS-32*, (8), pp. 851-853
- [2] Calvez L. C., Vilbé P., Derrien A., Bréhonnet P. : "Generating orthogonal sequences via a Routh-type stability array", *Electron. Lett.*, 1992, 28, (14), pp. 1306-1308
- [3] Derrien A., Nouët C., Vilbé P., Calvez L. C. : "Orthonormal sets for efficient model-order reduction via a Gauss-Newton method", *Electron. Lett.*, 1994, 30, (7), pp. 544-546
- [4] Liaw C. M., Pan C. T., Ouyang M. : "Model reduction of discrete systems using the power decomposition method and the system identification method", *IEEE Proc.*, Vol 133, Part D, N° 1, 1986, pp. 30-34
- [5] Rothwell E. J. : "Radar target discrimination using the extinction-pulse technique", Ph. D., Michigan State University, 1985