

Décomposition d'un processus stationnaire soumis à un changement d'horloge périodique bruité

Alban Duverdiér et Bernard Lacaze

ENSEEIH7/GAPSE, 2 rue Camichel, 31071 Toulouse, France
email : duverdie@len7.enseeiht.fr

RÉSUMÉ

Les processus stationnaires soumis à un changement d'horloge interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes. Le but de cet article consiste à étudier le cas où le jitter est une fonction périodique bruitée.

Dans un premier temps, nous démontrerons qu'un processus stationnaire soumis à ce jitter est cyclostationnaire. Puis, le processus observé sera décomposé orthogonalement par rapport à l'espace de Hilbert engendré par le processus initial. Cette écriture permettra de présenter la reconstruction linéaire optimale du processus initial et celle qui pourra être utilisée pratiquement.

I. INTRODUCTION

Certains types de signaux peuvent être modélisés par un processus stationnaire soumis à un changement d'horloge périodique [1]. Au cours de cet article, nous étudions le cas où un bruit stationnaire s'additionne au jitter.

Nous allons tout d'abord étudier le signal soumis au jitter et démontrer qu'il possède des propriétés cyclostationnaires grâce à une décomposition en série harmonique [2]. Ainsi, nous pourrions obtenir de façon simple ses paramètres stochastiques.

Puis, nous présenterons une méthode de reconstruction linéaire du processus de départ.

II. DEFINITIONS

Soit $Z = \{Z(t), t \in R\}$ un processus aléatoire

ABSTRACT

Stationary processes subjected to a clock change are useful in the modelisation of numerous physical phenomena. The objective of this paper is to study the case where the jitter is a noisy periodic function.

First, we will demonstrate that a stationary process subjected to this jitter is cyclostationary. Then, the observed process will be decomposed by means of an orthogonal projection onto the Hilbert space engendered by the initial process. This result permits the presentation of the optimal linear reconstruction of the initial process and the reconstruction that we will use.

stationnaire au sens large, de moyenne nulle et continu en moyenne quadratique (m.q.). Il admet une représentation spectrale au sens de Cramer-Loève $\Theta_z(\omega)$ [3] telle que

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\Theta_z(\omega)$$

On note $S_z(\omega)$ son spectre de puissance défini par

$$R_z(\tau) = E[Z(t)Z^*(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} dS_z(\omega)$$

Soit $B = \{B(t), t \in R\}$ un processus aléatoire réel, de moyenne nulle, continu (m.q.) et indépendant de Z . On suppose que les deux fonctions caractéristiques

$$\psi(\omega) = E[e^{-i\omega B(t)}]$$

$$\varphi_\tau(\omega) = E[e^{-i\omega(B(t)-B(t-\tau))}]$$

sont indépendantes de t .



Soit $f(t)$ une fonction réelle de la variable réelle et $g(t)$ une fonction complexe de la variable réelle. Ces deux fonctions sont supposées périodiques de période $T = 2\pi/\omega_0$. On les suppose suffisamment régulières pour que le développement en série de Fourier de $e^{-i\omega f(t)}g(t)$ converge. Alors

$$e^{-i\omega f(t)}g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k(\omega) e^{ik\omega_0 t}$$

avec

$$\gamma_k(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\omega f(u) - ik\omega_0 u} g(u) du$$

III. CHANGEMENT D'HORLOGE PERIODIQUE BRUTE

Sous les hypothèses du paragraphe II, on étudie le processus $X(t)$, changement d'horloge périodique bruité, défini par

$$X(t) = Z[t - f(t) - B(t)]g(t)$$

En utilisant la représentation de Cramer-Loève de $Z(t)$, on obtient

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-f(t)-B(t))} g(t) d\Theta_Z(\omega)$$

D'où, la décomposition en série de Fourier de la partie périodique de cette expression permet de d'écrire $X(t)$ grâce à la représentation en série harmonique suivante

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\omega_0 t} A_k(t)$$

où chaque $A_k(t)$ est le processus stationnaire et de moyenne nulle donné par

$$A_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-B(t))} \gamma_k(\omega) d\Theta_Z(\omega)$$

$X(t)$ est donc cyclostationnaire [2].

Les relations de Wiener-Lee [4] permettent alors de calculer l'autocorrélation de $X(t)$ ainsi que son intercorrélacion avec $Z(t)$. On en déduit la projection de $X(t)$, $G(t)$, sur l'espace de Hilbert engendré linéairement par $Z(t)$, définie par

$$\begin{cases} G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,s)Z(s)ds \\ E[(G(t) - X(t))X^*(s)] = 0 \end{cases}$$

où $h(t,s)$ est le filtre qui engendre $G(t)$ à partir de $Z(t)$. $G(t)$ est alors le processus tel que

$$G(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 l t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \gamma_l(\omega) \psi(\omega) d\Theta_Z(\omega)$$

$X(t)$ peut donc s'écrire

$$X(t) = G(t) + V(t)$$

où $V(t)$ est cyclostationnaire et orthogonal à $G(t)$.

Remarque :

Le filtre $h(t,s)$ a pour réponse fréquentielle $H_l(\omega)$, définie par

$$H_l(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,s) e^{-i\omega(t-s)} ds$$

Ce filtre est linéaire périodique au cours du temps et est tel que

$$H_l(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 l t} \gamma_l(\omega) \psi(\omega) = e^{-i\omega f(t)} g(t) \psi(\omega)$$

IV. RECONSTRUCTION DU SIGNAL INITIAL

$X(t)$ se décompose en une somme de deux processus orthogonaux dont l'un $G(t)$ est la projection de $X(t)$ sur l'espace de Hilbert engendré par $Z(t)$. $G(t)$ correspond donc à l'information linéaire sur $Z(t)$ contenue dans $X(t)$. Ainsi, pour reconstruire linéairement de façon optimale le processus initial $Z(t)$, il s'agit de trouver le filtre inverse au filtre linéaire périodique qui engendre $G(t)$, $H_l(\omega)$. Soit $k(t,u)$ la réponse impulsionnelle de ce filtre inverse et $K_l(\omega)$ sa réponse fréquentielle. On a

$$\forall t \in R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(t,u) h(u,s) Z(s) ds du = Z(t)$$

D'où

$$\forall t \in R \int_{D_Z} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} k(t,u) e^{-i\omega(t-u)} H_u(\omega) du - 1 \right] d\Theta_Z(\omega) = 0$$

où D_Z est le support du spectre de $Z(t)$.

Ce qui admet pour solution

$$\forall(t, \omega) \in R \times D_Z \int_{-\infty}^{+\infty} k(t,u) e^{-i\omega(t-u)} H_u(\omega) du = 1$$

On en déduit que $k(t,u)$ correspond alors à un filtre linéaire périodique de réponse fréquentielle telle que

$$\forall(t, \omega) \in R \times D_Z \sum_{l=-\infty}^{+\infty} K_l(\omega + l\omega_0) \gamma_l(\omega) \psi(\omega) e^{il\omega_0 t} = 1$$

Pratiquement, on prend comme hypothèse que le spectre de $Z(t)$ est négligeable en dehors de



l'intervalle $[-\omega_0/2; \omega_0/2]$ ou encore que $D_z \subset [-\omega_0/2; \omega_0/2]$.

Une solution du système ci-dessus est alors

$$\exists ! m, \forall (t, \omega) \in R \times D_z \begin{cases} \gamma_m(\omega) \psi(\omega) e^{im\omega_0 t} K_l(\omega + m\omega_0) = 1 \\ \forall l \neq m \quad K_l(\omega + l\omega_0) = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, $K_l(\omega)$ correspond au filtre linéaire invariant $[\gamma_m(\omega) \psi(\omega)]^{-1}$ appliqué au signal $X(t)$ filtré autour de $m\omega_0$ et démodulé ou encore à la m -ième composante de la représentation en série continue de $X(t)$ définie précédemment.

Application :

Ainsi, on obtient le représentant de $X(t)$ pour $m = 0$ en filtrant la partie stationnaire du spectre de $X(t)$ par un passe-bas de largeur ω_0 autour de 0. Il peut être alors filtré par $[\gamma_0(\omega) \psi(\omega)]^{-1}$.

V. EXEMPLE

Soit un signal continu stationnaire, $A(t)$, soumis à un changement d'horloge sinusoïdal d'amplitude α en présence d'un bruit blanc, $B(t)$, uniformément réparti dans $[-\lambda, \lambda]$

$$X(t) = A(t - \alpha \sin(\omega_0 t)) - B(t)$$

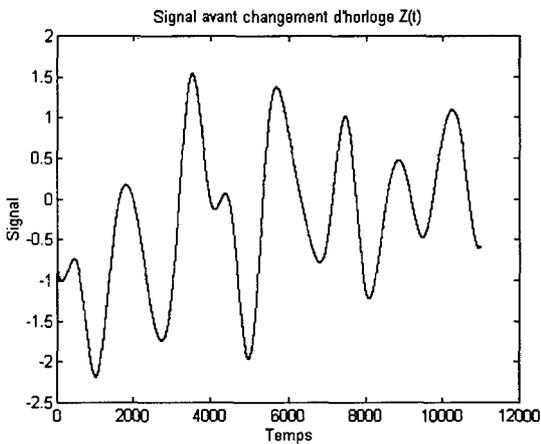
$\gamma_0(\omega)$ correspond à la fonction de Bessel d'ordre 0

$$\gamma_0(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\omega \alpha \sin(\omega_0 u)} du = J_0(\alpha \omega)$$

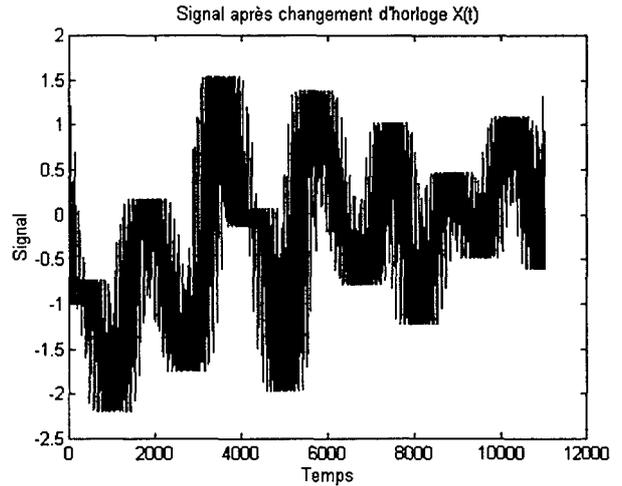
$\psi(\omega)$ est la fonction caractéristique du bruit

$$\psi(\omega) = \sin c(\lambda \omega)$$

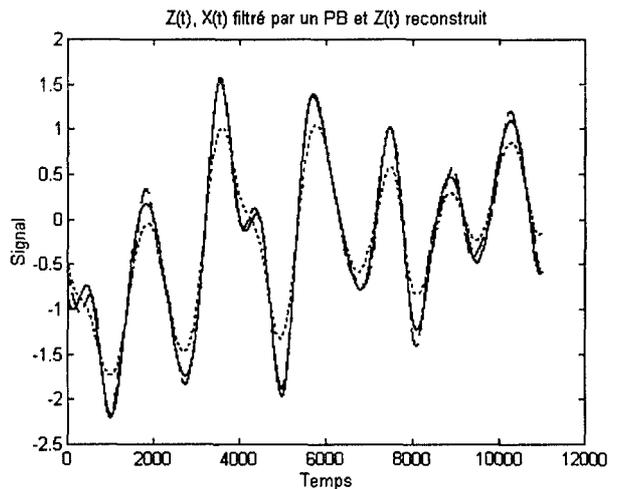
Le signal étudié sur 11000 instants a l'aspect suivant



Pour $\alpha = 150$, $\omega_0 = 2\pi/100$ et $\lambda = 300$ le signal après changement d'horloge devient



La reconstruction du signal $Z(t)$ est effectuée grâce au filtre inverse optimal calculé précédemment. Sur la figure suivante, on compare le signal initial (---), le signal après changement d'horloge filtré autour de 0 (- - -) et le signal reconstruit par le filtre inverse (- - - -)



Comme on peut le constater le rôle du filtre inverse est primordial, car il permet d'estimer le signal de départ en diminuant la variance de l'erreur.

VI. CONCLUSION

Nous avons tout d'abord étudié de façon générale un processus stationnaire soumis à un changement d'horloge bruité. Il s'agit d'un processus cyclostationnaire comme le démontre sa décomposition en série continue. Cela facilite le calcul de ses paramètres stochastiques, ainsi que sa projection sur l'espace engendré par le processus initial. Nous présentons alors la méthode optimale pour reconstruire le processus de départ et nous



l'appliquons dans le cas où le spectre de ce processus est borné.

REFERENCES

- [1] B. Lacaze, "Spectral modifications due to particular clock changes", *Proceeding of 7th IEEE Workshop on Statistical Signal & Array rocesses (SSAP'94)*, pp. 297-300, Quebec, June 26-29, 1994.
- [2] W.A. Gardner and L.E. Franks, "Characterization of cyclostationary random signal processes", *IEEE Transaction Information Theory*, Vol. IT-21, pp.4-14, 1975.
- [3] H. Cramer and M.R. Leadbetter *Stationary and Related Stochastic Processes*, New York : Wiley, 1967.
- [4] I.I. Gikhman and A.V. Skorokhod, *Introduction to the Theory of Random Processes*, Saunders, 1965.