



LA TRANSFORMATION DE LAGUERRE DISCRETE

Tanguy N. ; Calvez L.C. ; Vilbé P.

LEST, URA CNRS, Université de Bretagne Occidentale,
6, Avenue le Gorgeu, BP 809, 29285 BREST Cedex.

RÉSUMÉ

Les fonctions de Laguerre discrètes ont connu ces dernières années un net regain d'intérêt dans divers domaines du traitement du signal. Elles forment une base complète de fonctions orthogonales particulièrement adaptée à la représentation de signaux amortis.

Après un rappel de quelques propriétés des fonctions de Laguerre discrètes, nous définissons et nous présentons un éventail des propriétés de la transformation associée à ces fonctions. Nous terminons en présentant un exemple de déconvolution de signaux dans le domaine spectral de Laguerre.

1. Introduction

Les fonctions de Laguerre à temps discret, introduites il y a quelques décennies, ont connu ces dernières années un regain d'intérêt dans divers domaines tels que la modélisation de signaux, l'identification de systèmes, le contrôle de processus, ... Ces fonctions réelles à temps discret forment une base orthogonale complète particulièrement intéressante pour la représentation de signaux physiques. Elles dépendent de deux paramètres permettant de définir une large gamme de fonctions. Les allures caractéristiques de ces fonctions sont semblables à des transitoires oscillants amortis. Ceci confère à la base orthogonale des fonctions de Laguerre discrètes, une bonne adéquation pour la représentation de signaux et systèmes physiques fortement amortis. De plus, la représentation de signaux et de systèmes sur la base de ces fonctions orthogonales, pour laquelle nous avons proposé une méthode de choix du paramètre principal [1], possède un effet bénéfique de filtrage du bruit. Celui-ci conduit notamment à une robustesse des systèmes de contrôle basés sur cette représentation. Ces intérêts ont été particulièrement révélés

ABSTRACT

In recent years there have been renewed interest in the use of discrete Laguerre functions in approximation, modelling, filtering, identification and control. These functions constitute a complete set of orthogonal basis functions suited to the representation of transients.

In the following we present some properties of the discrete Laguerre transform. An application of this transform to signal deconvolution is considered.

dans des applications telles que l'annulation d'écho [2] et le contrôle adaptatif [3]. En complément à ces travaux applicatifs, nous présentons ici l'outil qu'est la transformation de Laguerre discrète que nous avons étudiée de manière systématique [4].

2. Les fonctions de Laguerre discrètes

Les fonctions de Laguerre discrètes sont des fonctions réelles déduites des polynômes de Laguerre discrets [5]. Elles sont définies par la relation suivante :

$$\varphi_n[k, a, b] = \sqrt{1-a^2} \left(\frac{b}{a}\right)^k \left(-\frac{1}{a}\right)^n \left\{ \Delta^n \binom{k}{n} a^{2k} \right\} \quad (1)$$

où Δ est l'opérateur différence :

$$\Delta f[k] \triangleq f[k+1] - f[k]$$

et

$$\binom{k}{n} \triangleq \frac{k!}{n!(k-n)!}$$

et le réel a ($0 < |a| < 1$) s'apparente à un facteur d'échelle tandis que le réel b ($b > 0$) représente un coefficient de pondération. Ces fonctions réelles, définies pour $n=0, 1, 2, \dots$ et



$k=0, 1, 2, \dots$, seront supposées identiquement nulles pour $k < 0$ ou $n < 0$. Par commodité nous noterons les fonctions $\varphi_n[k] \triangleq \varphi_n[k, a, b]$. La relation (1) peut se réécrire :

$$\varphi_n[k] = \sqrt{1-a^2} b^k a^k (-a)^n \sum_{j=0}^{\min(n,k)} \binom{n}{j} \binom{k}{j} \left(\frac{a^2-1}{a^2} \right)^j \quad (2)$$

Ces fonctions dépendent de deux variables discrètes n et k ; il est possible d'établir leurs transformées en z d'une part par rapport à l'indice k :

$$Z_k \{ \varphi_n[k] \} = \sqrt{1-a^2} \left(\frac{z}{z-ab} \right) \left(\frac{b-az}{z-ab} \right)^n \quad (3)$$

et d'autre part par rapport à l'indice n :

$$Z_n \{ \varphi_n[k] \} = \sqrt{1-a^2} \left(\frac{z}{z+a} \right) \left(b \frac{az+1}{z+a} \right)^k \quad (4)$$

où
$$Z_i \{ f[i] \} \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} f[i]$$

De ces transformées en z , nous déduisons une relation simple pour le calcul récurrent des échantillons des fonctions de Laguerre :

$$\varphi_n[k] = -\alpha \varphi_{n-1}[k] + ab \varphi_n[k-1] + b \varphi_{n-1}[k-1] \quad (5)$$

valable pour $n > 0$ et $k > 0$. Ces fonctions vérifient d'autres relations de récurrence intéressantes comme par exemple :

$$k \varphi_n[k] = \frac{\alpha(n+1)}{1-a^2} \varphi_{n+1}[k] + \frac{(1+a^2)n+a^2}{1-a^2} \varphi_n[k] + \frac{na}{1-a^2} \varphi_{n-1}[k] \quad (6)$$

Ces fonctions sont orthonormales au sens discret, à savoir :

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_n[k, a, b] \varphi_m[k, a, b] = \delta_{n,m} \quad (7)$$

Elles forment une base orthogonale complète et possèdent diverses propriétés intéressantes telles que par exemple une propriété d'échange des indices n et k :

$$\varphi_n[k, a, b] = (-b)^{k-n} \varphi_k[n, a, b]$$

qui conduit à l'existence d'une seconde propriété d'orthogonalité, à savoir :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n[k, a, b] \varphi_n[j, a, b] = (-b)^{k+j} \delta_{k,j}$$

3. La transformation de Laguerre discrète

Nous appelons transformée de Laguerre discrète d'une fonction causale $f[k] \in \ell_b^2$, la fonction de la variable discrète $n \geq 0$, notée $f_n(a, b)$ et ainsi définie :

$$f_n(a, b) \triangleq L_{a,b} \{ f[k] \} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_n[k, a, b] f[k] \quad (8)$$

où : $f[k] \in \ell_b^2 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f^2[k] < \infty$

Nous appelons spectre discret de Laguerre de $f[k]$ l'ensemble $\{f_n(a, b)\}$. L'ensemble des fonctions de Laguerre discrètes de paramètres a et b donnés forme une base complète de fonctions réelles orthonormales ; toute fonction convenable $f[k]$ réelle discrète et causale peut alors s'exprimer sous la forme d'une somme pondérée :

$$f[k] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a, b) \varphi_n[k, a, b] \quad (9)$$

où l'ensemble $\{f_n(a, b)\}$ est donné par la relation (8).

Nous avons pu établir diverses propriétés et correspondances de cette transformation de Laguerre discrète en premier lieu à l'aide des propriétés des fonctions de base. Ainsi par exemple, la relation de récurrence (6) nous conduit à la propriété suivante :

$$L_{a,b} \{ kf[k] \} = \frac{(n+1)af_{n+1}(a, b) + \left((1+a^2)n+a^2 \right) f_n(a, b) + naf_{n-1}(a, b)}{1-a^2}$$

En second lieu, afin d'établir de nombreuses correspondances et propriétés de cette paire de transformations, nous avons établi une relation fondamentale entre la transformée de Laguerre discrète et la transformée en z . De (4) et (8) il résulte en effet :

$$Z_n \{ f_n(a, b) \} = \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} F \left(b \frac{z+a}{az+1} \right) \quad (10)$$

avec : $F(z) = Z_k \{ f[k] \} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f[k]$

Cette relation et les propriétés propres aux fonctions de Laguerre discrètes nous ont permis de développer un vocabulaire (images de fonctions) et une grammaire (propriétés de la transformation), telles que les propriétés de décalages temporels et spectraux, la convolution réelle, et diverses autres correspondances de fonctions usuelles [4].

Exemple 1 :

Considérons la fonction suivante :

$$f[k] = \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{d'où } Z_k \{ f[k] \} = e^{\frac{\lambda}{z}}$$

la relation (10) nous conduit à :

$$Z_n \{f_n(a,b)\} = \sqrt{1-a^2} \frac{z e^{\frac{\lambda a}{b}}}{z+a} \exp \left[\frac{\lambda(1-a^2)}{b(z+a)} \right]$$

Une simple inversion de cette transformée en z nous donne soit une expression analytique :

$$L_{a,b} \left\{ \frac{\lambda^k}{k!} \right\} = \sqrt{1-a^2} e^{\frac{\lambda a}{b}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-a)^{n-j} \frac{\left(\frac{\lambda}{b} (1-a^2) \right)^j}{j!}$$

soit une relation de récurrence :

$$f_n(a,b) = \frac{(1-a^2)\lambda - (2n-1)ab}{nb} f_{n-1}(a,b) - \frac{a^2(n-1)}{n} f_{n-2}(a,b)$$

Exemple 2 :

La relation (10) nous permet de déduire aisément la correspondance d'un produit de convolution réel de deux fonctions causales $f[k]$ et $g[k]$ respectivement de transformées de Laguerre discrètes $f_n(a,b)$ et $g_n(a,b)$:

$$L_{a,b} \left\{ f[k] * g[k] \right\} = f_n(a,b) * g_n(a,b) \quad (11)$$

en ayant posé :

$$\hat{g}_n(a,b) \hat{=} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} [g_n(a,b) + a g_{n-1}(a,b)]$$

et où le produit de convolution est défini par :

$$f[i] * g[i] \hat{=} \sum_{j=0}^i f[j] g[i-j]$$

Cette correspondance trouve notamment son intérêt dans la déconvolution de signaux à l'aide de la transformation de Laguerre discrète dont nous allons voir un exemple.

4. Application à la déconvolution

Le but est ici d'approcher un signal inconnu $x[k]$ (par exemple le signal d'entrée d'un filtre) connaissant un signal donné $g[k]$ (la réponse impulsionnelle du filtre) et $y[k]$ (le signal de sortie du filtre) qui est la convolution de $g[k]$ avec le signal inconnu $x[k]$. Cet exercice est difficile à résoudre dans le domaine temporel ou dans le domaine de la transformée de Fourier lorsque les signaux possèdent une composante de bruit. L'intérêt d'effectuer la déconvolution dans le domaine spectral de Laguerre est double : d'une part les relations mises en jeu sont simples, et d'autre part la représentation des signaux sur la base des fonctions de Laguerre possède un effet bénéfique face au bruit permettant d'obtenir des résultats de déconvolution acceptables. Dans le domaine spectral de

Laguerre la convolution de deux fonctions a une image donnée par la relation (11). Les coefficients du spectre du signal $x[k]$ à approcher peuvent donc être calculés successivement par la relation de récurrence suivante :

$$x_n(a,b) = \frac{y_n(a,b) - \sum_{j=0}^{n-1} x_j(a,b) \hat{g}_{n-j}(a,b)}{\hat{g}_0(a,b)}$$

où : $x_n(a,b) = L_{a,b} \{x[k]\}$, $y_n(a,b) = L_{a,b} \{y[k]\}$,
et $g_n(a,b) = L_{a,b} \{g[k]\}$

Exemple :

Nous allons ici reprendre l'exemple exposé dans l'article de L.T. Quick et L.P. Bolgiano [6] qui se proposaient d'effectuer une déconvolution sur la base de la transformation de Poisson. Le but que nous allons poursuivre ici aussi, est de retrouver, par déconvolution, le signal d'entrée $x(t)$ dont le graphe est donné figure 1.

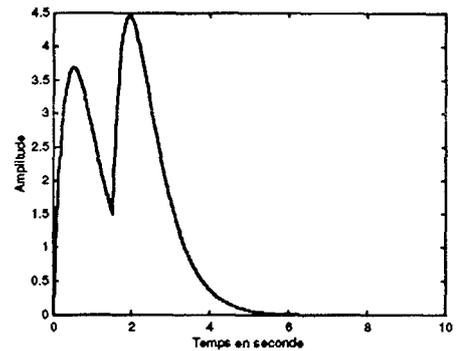


Figure 1 : Signal à identifier $x(t)$

$$x(t) = 20t \exp(-2t) U(t) + 20(t-1,5) \exp[-2(t-1,5)] U(t-1,5)$$

La déconvolution s'effectue à partir de la réponse impulsionnelle connue du filtre $g(t)=\exp(-t)U(t)$ et du signal de sortie $y(t)$ représenté figure 2. Ces signaux ont été échantillonnés entre 0 et 10s avec une période d'échantillonnage de 0,1s.

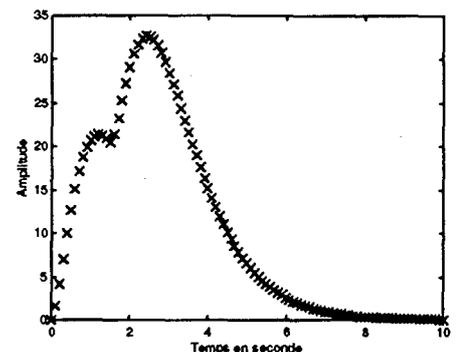


Figure 2 : Signal de sortie



Dans le domaine spectral de Laguerre discret, pour les valeurs de paramètres $\alpha=0,7$ et $b=1$, seuls les 20 premiers coefficients du spectre des signaux échantillonnés $g(t)$ et $y(t)$, ont été conservés. La déconvolution, dans le domaine spectral de Laguerre discret, nous permet alors d'obtenir les 20 premiers termes du spectre du signal approché. Nous pouvons alors comparer le signal identifié et le signal de référence $x(t)$ (Figure 3). Nous avons effectué les mêmes calculs mais cette fois avec le signal de sortie $y(t)$ bruité. Lorsque le bruit est uniformément distribué sur l'intervalle $[-1, 1]$, nous obtenons le résultat représenté figure 4.

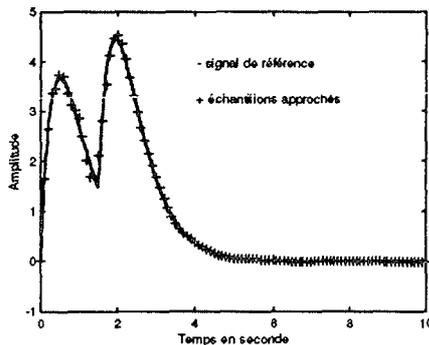


Figure 3 : Déconvolution. Signaux non bruités

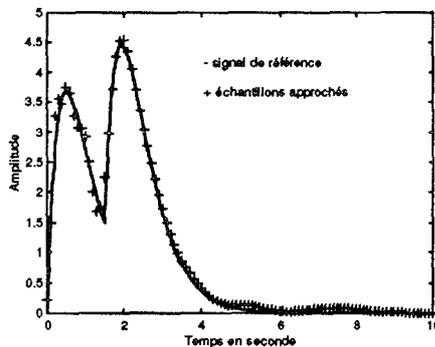


Figure 4 : Déconvolution. Bruit entre -1 et 1

Ces résultats montrent bien, qu'en présence de bruit il est néanmoins possible d'obtenir des résultats de déconvolution satisfaisants, lorsque la représentation des signaux s'effectue sur la base des fonctions de Laguerre discrètes.

5. Conclusion

La transformation de Laguerre discrète est un outil intéressant pour le développement de nouvelles applications de cette base de fonctions de Laguerre discrètes. Nous en avons donné la définition et présenté quelques unes de ses propriétés.

Par ailleurs, le choix du paramètre principal des fonctions de base est important (notamment en approximation de signaux un bon choix de ce paramètre peut conduire à une réduction significative de l'erreur quadratique d'approximation). Nous avons par ailleurs mis au point une méthode de détermination du paramètre principal relativement générale [1].

En outre, il serait aussi possible de développer une transformation de Laguerre discrète bidimensionnelle. Celle-ci trouverait son intérêt dans des domaines tels que le traitement et la compression d'images.

Références

- [1] Tanguy N. ; Vilbé P. ; Calvez L.C. "Optimum choice of free parameter in orthonormal approximations". A paraître dans IEEE Trans. on Automatic Control (Sept. 1995 ?).
- [2] Davidson G.W. ; Falconer D.D. "Reduced complexity echo cancellation using orthonormal functions". IEEE Trans. on Circuits and Systems. Vol. 38, n°1, 1991, pp 20-28.
- [3] Dumont G.A. ; Elnaggar A. ; Elshafei A. "Adaptive predictive control of systems with time-varying time delay". Int. Journ. of Adaptive Control and Signal Processing. Vol. 7, n°5, 1993, pp 91-101.
- [4] Tanguy N. "La transformation de Laguerre discrète". Thèse, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 1994.
- [5] Gottlieb M.J. "Concerning some polynomials orthogonal on a finite or enumerable set of points". American Journal of Math. Vol 60, 1938, pp 453-458.
- [6] Quick L.T. ; Bolgiano L.P. "Deconvolution by Poisson transformation" IEEE International conference on acoustics, speech and signal processing. Philadelphia 1976, pp 350-353.