

Approximation de l'autocorrélation des incréments du (fbm) de Mandelbrot par modélisation de Barnes et Allan.

Olivier MAGRE and Michel GUGLIELMI

Laboratoire d'Automatique de Nantes, U.R.A. C.N.R.S. 823/ Ecole Centrale de Nantes/Université de Nantes
1 rue de la Noë, 44072 NANTES CEDEX, FRANCE Tel:(33) 40 37 16 00/Fax:(33) 40 37 25 22

E-mail magre@lan.ec-nantes.fr / membres du GR TDSI (france)
RÉSUMÉ ABSTRACT

Le mouvement brownien fractionnaire est un modèle possédant les propriétés capables de représenter des signaux fractals en $1/f$. Cependant, il est impossible de synthétiser parfaitement ces signaux directement. Nous montrons, au vu des convergences des fonctions d'autocorrélations des incréments, que le modèle de Barnes et Allan, est dans certaines conditions, une bonne approximation du (fbm). Ce résultat est intéressant dans la mesure où ce modèle peut être simulé directement par modélisation différentielle.

The fractional brownian motion is a theoretical model able to represent the fractal attitudes. But, it's not possible to have practical simulations directly issued from this model. In this paper, we show that the Barnes et Allan model, in regard with the convergence of the correlations of the increments, is a good approximation of the (fbm). This result is important since the direct simulation from the Barnes and Allan model, by means of an differential equation is possible.

Introduction

Le mouvement brownien fractionnaire (fbm) proposé par Mandelbrot dans [1] est devenu grâce à ses propriétés intéressantes un modèle extrêmement utilisé pour décrire les attitudes fractales en $1/f$. Nous étudions tout d'abord le (fbm), ses définitions ainsi que ses propriétés. Puis, nous verrons si le modèle de Barnes et Allan est un bon candidat pour une telle représentation et dans quelles mesures, il constitue une bonne approximation du (fbm).

On vérifie [4] que le (fbm) est statistiquement autosimilaire de paramètre H .

C'est à dire que pour toute échelle réelle $a > 0$ et pour tout t , on a l'équivalence statistique suivante :

$$a^{-H} B_H(at, \omega) \stackrel{s.e.}{=} B_H(t, \omega) \quad (2)$$

Par la suite, on écrira $B_H(t)$ pour $B_H(t, \omega)$.

La fonction d'autocorrélation du (fbm) est [4] :

$$\phi_{B_H B_H}(t, s) = \frac{\sigma_H^2}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}) \quad (3)$$

$$\text{avec : } \sigma_H^2 = \frac{\sigma^2}{\Gamma(H + \frac{1}{2})^2} \left[\int_{-\infty}^0 (|1-\tau|^{(H-\frac{1}{2})} - |-\tau|^{(H-\frac{1}{2})})^2 d\tau + \frac{1}{2H} \right]$$

1 Mouvement Brownien Fractionnaire (fbm)

1.1 Définitions et Propriétés du (fbm)

Le (fbm) est défini par :

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left[\int_{-\infty}^0 [|t-s|^{(H-\frac{1}{2})} - | -s|^{(H-\frac{1}{2})}] dB(s) + \int_0^t (t-s)^{(H-\frac{1}{2})} dB(s) \right] \quad (1)$$

$dB(s)$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2 , $\Gamma(\alpha)$ la fonction Gamma. H le paramètre dynamique est le paramètre fractal ($H \in [0,1]$) [2] et $B_H(0)$ est déterministe.

Cette fonction d'autocorrélation dépend explicitement de t et de s et pas seulement de $(t-s)$. Le (fbm) est donc non stationnaire.

Or, mathématiquement [5], les concepts de spectre et de densité spectrale ne sont associés qu'à des signaux stationnaires. Il est donc a priori impossible de définir rigoureusement ces notions spectrales pour le modèle (fbm).

Enfin, on définit le bruit brownien fractionnaire (fbrn), noté bb_H comme un signal centré, gaussien, possédant une fonction d'autocorrélation stationnaire de la forme :

$$\phi_{bb_H bb_H}(\tau) = C\tau^{(2H-2)} \quad (4)$$

avec C : Constante



1.2 Incréments du (fbm)

Soit le signal incrément $X_{B_H}(t) = B_H(t+\Delta) - B_H(t)$. Nous démontrons, de la même manière que pour le (fbm) lui-même [4], que les signaux incréments sont statistiquement autosimilaires de paramètre H . On peut écrire que :

$$X_{B_H}(at) \stackrel{s \sim e}{=} a^H X_{B_H}(t) \quad (5)$$

La fonction d'autocorrélation des signaux incrémentaux s'exprime comme [4] :

$$\begin{aligned} \phi_{X_{B_H} X_{B_H}}(t, s, \Delta) &= \frac{\sigma_H^2}{2} (|s-t+\Delta|^{2H} \\ &+ |s-t-\Delta|^{2H} - 2|s-t|^{2H}) \end{aligned} \quad (6)$$

Ainsi, la fonction d'autocorrélation du signal incrément du (fbm) ne dépendant explicitement que de $(s-t)$ et de Δ , vérifie la stationnarité des incréments du (fbm).

Pour $|\tau| = |t-s| \gg \Delta$, la fonction devient à l'ordre 2 :

$$\phi_{X_{B_H} X_{B_H}}(\tau, \Delta) \approx \frac{\sigma_H^2}{2} |\tau|^{2H} (2H(2H-1) \frac{\Delta^2}{(\tau)^2}) \quad (7)$$

$$\phi_{X_{B_H} X_{B_H}}(\tau, \Delta) \approx \sigma_H^2 H(2H-1) |\tau|^{(2H-2)} \Delta^2 \quad (8)$$

Cette fonction d'autocorrélation a, asymptotiquement le signe de $(H-1/2)$, soit positif pour $H > 1/2$ et négatif pour $H < 1/2$. De plus, pour $|\tau|$ tendant vers $+\infty$, elle tend vers zéro.

Les propriétés de ces fonctions d'autocorrélations sont donc fondamentales pour l'étude de la mémoire de ces processus. Ainsi, lorsque

- $H = \frac{1}{2}$, la corrélation entre les incréments est nulle. Il s'agit d'un bruit blanc dont l'intégrale est le mouvement brownien ordinaire.
- $H < \frac{1}{2}$, la corrélation est négative, il s'agit d'une anticorrélation caractéristique des signaux très chaotiques.
- $H > \frac{1}{2}$, la corrélation est positive, caractérisant les signaux à mémoire longue, très persistants dans le temps.

Si l'on considère le signal $\frac{X_{B_H}(t)}{\Delta}$, on calcule, à partir de l'équation (6), sa fonction d'autocorrélation :

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{X_{B_H}(t)}{\Delta} \frac{X_{B_H}(t)}{\Delta}}(\tau, \Delta) &= \frac{\sigma_H^2}{2\Delta^2} |\tau|^{2H} (|1 + \frac{\Delta}{\tau}|^{2H} \\ &+ |1 - \frac{\Delta}{\tau}|^{2H} - 2) \end{aligned} \quad (9)$$

Soit en développant au voisinage de $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{X_{B_H}(t)}{\Delta} \frac{X_{B_H}(t)}{\Delta}}(\tau, \Delta) &= \frac{\sigma_H^2}{2} |\tau|^{(2H-2)} (2H(2H-1) \\ &+ \Delta(\dots)) \end{aligned} \quad (10)$$

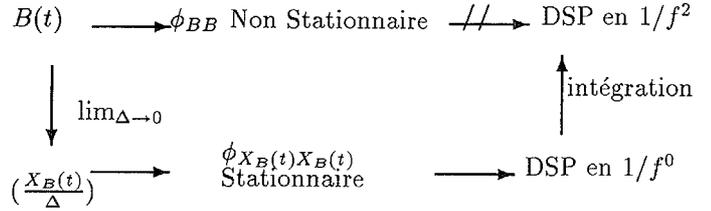
lorsqu'on fait tendre Δ vers 0, on obtient :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \phi_{\frac{X_{B_H}(t)}{\Delta} \frac{X_{B_H}(t)}{\Delta}}(\tau, \Delta) \approx \frac{\sigma_H^2}{2} |\tau|^{(2H-2)} (2H(2H-1)) \quad (11)$$

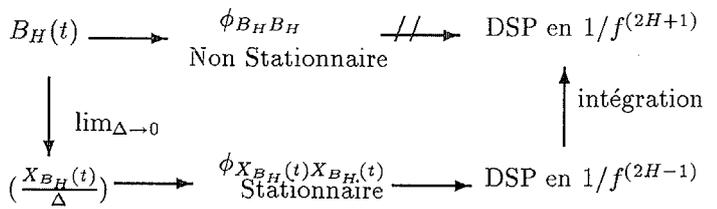
Donc, la fonction d'autocorrélation du signal $\frac{X_{B_H}(t)}{\Delta}$ tend vers la fonction d'autocorrélation du signal bb_H défini précédemment, comme étant le bruit brownien fractionnaire. Comme dans le cas du mouvement brownien classique, on peut ainsi dire que ce signal tend, au regard de la convergence de sa fonction d'autocorrélation, vers le (fbn).

1.3 Densité Spectrale

Malgré la non stationnarité du (fbm), qui interdit de définir théoriquement une densité spectrale, on procède comme pour le mouvement brownien ordinaire, c'est à dire :



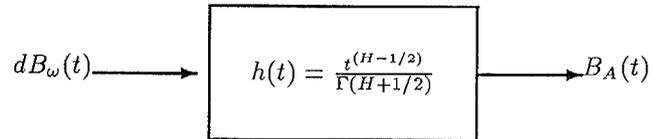
Malgré sa non-différentiabilité, on associe un spectre au mouvement brownien ordinaire via le bruit blanc qui est vu comme sa dérivée. Pour le (fbm), il vient :



2 Modèle de Barnes et Allan

2.1 Définition

Si on considère le produit de convolution d'un signal d'entrée (un bruit blanc gaussien centré, de variance σ^2) par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$:



La sortie du système s'écrit $B_A(t) = h(t) * dB(t)$ ou :

$$B_A(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^t |t - \tau|^{(H-\frac{1}{2})} dB(\tau) d\tau \quad (12)$$

Il a été défini un modèle plus physique connu sous le nom de modèle de Barnes et Allan [3] :

$$B_A(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t |t - \tau|^{(H-\frac{1}{2})} dB(\tau) d\tau \quad (13)$$

En comparant (13) et (1), on peut considérer que ce signal n'est autre que le (fbm) initialisé à l'instant $t = 0$, c'est à dire avec $dB(t) = 0$ pour $t < 0$.

La critique la plus fondamentale que l'on puisse apporter à ce modèle est la trop grande importance accordée à l'instant initial. Ceci peut apparaître d'autant plus crucial du fait des mémoires longues de ces signaux. Celles-ci se caractérisent en effet par la persistance à long terme de la condition initiale. Cependant, dans la pratique, il ne peut se trouver que deux types de situations : soit on ne connaît



un signal qu'à partir d'un instant initial d'enregistrement $t = 0$, même si ce signal existe depuis longtemps, soit on s'intéresse à la période transitoire de génération du signal fractal (par exemple le bruit en $1/f$ apparaissant dès la mise en charge d'un circuit électronique). Le modèle de Barnes et Allan défini par (13) permet ainsi de disposer d'un modèle physique rendant mieux compte des réalités premières de l'expérience.

2.2 Propriétés

Comme pour le (fbm), on démontre aisément que le signal $B_A(t)$ est statistiquement autosimilaire de paramètre H . Pour tout réel $a > 0$ et pour tout t :

$$B_A(at) \stackrel{s.e.}{=} a^H B_A(t) \quad (14)$$

La fonction d'autocorrélation du modèle de Barnes et Allan est [4] :

$$\phi_{B_A B_A}(t, s) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})^2} [|s - t|^{2H} \beta_{\frac{t}{s}}(p, q)] \quad (15)$$

Où $\beta_{\frac{t}{s}}(p, q)$ est la fonction bêta incomplète notée :

$$\beta_x(p, q) = \int_0^x u^{p-1} (1-u)^{q-1} du \quad (16)$$

Les paramètres p et q dépendent de H : $p = H + \frac{1}{2}$ et $q = -2H$.

La variance se calcule comme :

$$E[B_A(t)^2] = \sigma_{BA}^2 t^{2H} \quad (17)$$

avec $\sigma_{BA}^2 = \frac{1}{2H} \frac{\sigma^2}{\Gamma(H + \frac{1}{2})^2}$

On constate que la variance de ce modèle est, à la constante près, la même que celle du (fbm). On remarque également que ce modèle est non-stationnaire.

2.3 Propriétés des incréments

Soit le signal incrémental $X_{B_A}(t) = B_A(t + \Delta) - B_A(t)$, le calcul de la fonction d'autocorrélation des incréments [4] conduit à :

$$\phi_{X_{B_A} X_{B_A}}(t, s, \Delta) = \frac{\sigma^2}{2} P(t, s, \Delta) \quad (18)$$

$P(t, s, \Delta)$ s'exprime, à l'aide des fonctions bêta incomplètes :

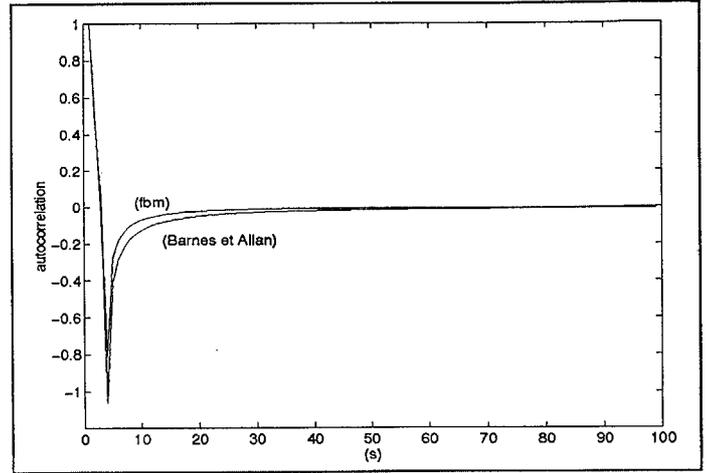
$$\begin{aligned} P(t, s, \Delta) = & (s-t)^{2H} \beta_{\frac{t+\Delta}{s+\Delta}}(H + \frac{1}{2}, -2H) \\ & - (s-t+\Delta)^{2H} \beta_{\frac{t}{s+\Delta}}(H + \frac{1}{2}, -2H) \\ & - (s-t-\Delta)^{2H} \beta_{\frac{t-\Delta}{s}}(H + \frac{1}{2}, -2H) \\ & + (s-t)^{2H} \beta_{\frac{t}{s}}(H + \frac{1}{2}, -2H) \end{aligned} \quad (19)$$

A l'inverse du (fbm), ces intégrales dont les formes dépendent explicitement, à la fois de t et de s , conduisent à une fonction d'autocorrélation des incréments non stationnaire. Dans [4], nous étudions la convergence de cette fonction bêta incomplète pour tout H , et nous calculons cette fonction pour $x \in [0, 1]$.

2.4 Evaluation de la fonction d'autocorrélation des incréments

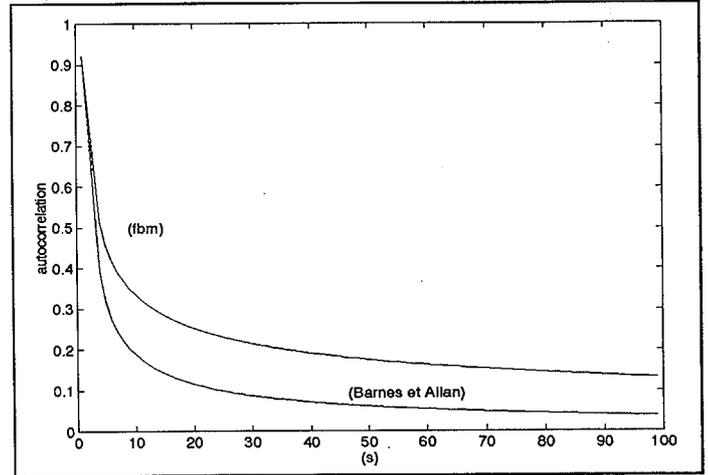
A partir de l'équation (19), connaissant la fonction bêta incomplète partout où il nous est nécessaire de la connaître [4], nous pouvons représenter la fonction d'autocorrélation des incréments du modèle de Barnes et Allan. Nous devons choisir les valeurs de l'instant d'observation t , de Δ et du nombre de points de représentations. Sur les figures suivantes, nous représenterons conjointement les deux fonctions d'autocorrélation (6) et (19) des incréments pour les deux modèles, calculées dans les mêmes conditions.

Autocorrélation des incréments pour $H=0.2$



Représentation des deux fonctions d'autocorrélation des incréments de Mandelbrot et de Barnes et Allan pour $H=0.2$, $\Delta = 4$, $t = 1E - 5$, 100 points

Autocorrélation des incréments pour $H=0.8$



Représentation des deux fonctions d'autocorrélation des incréments de Mandelbrot et de Barnes et Allan pour $H=0.8$, $\Delta = 4$, $t = 1E - 5$, 100 points

2.5 Critères d'adéquation

Afin de faciliter la comparaison des deux fonctions, on cherche à quantifier le degré d'approximation des deux courbes d'autocorrélation des incréments des deux différents modèles, par le choix de deux critères.



Soit pour P_1 la courbe concernant les incréments du (fbm) et P_2 la courbe concernant le modèle de Barnes et Allan. Pour tout point i des courbes P_1 et P_2 , le premier critère noté C_1 est défini par :

$$C_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |P_2(i) - P_1(i)| \quad (20)$$

avec n : nombre de points des courbes

Le second critère, noté C_2 est un critère quadratique :

$$C_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{P_1(i)}{P_2(i)}\right)^2 \quad (21)$$

Ces critères ne sont pas uniques, mais permettent de quantifier les différences entre les deux courbes en faisant varier les paramètres influant sur les autocorrélations des incréments (t , H et Δ).

Critères C_1 et C_2 en fonction de H (Δ et t fixés)

Paramètre	C_1	C_2
H=0.1	4.45E-5	0.5175
H=0.2	4.27E-5	0.4257
H=0.3	3.21E-5	0.2348
H=0.4	1.35E-5	0.0809
H=0.5	1.26E-17	0.6000
H=0.6	3.9E-5	0.1663
H=0.7	2.68E-4	0.9817
H=0.8	1E-3	3.3192
H=0.9	3.2E-3	9.0187

Récapitulatif du critère C en fonction de H . $t = 1E-5$ et $\Delta = 4$

2.5.1 Variation de l'instant initial de calcul

L'instant d'observation t est fixé à trois valeurs différentes. Une très petite, une autre de l'ordre de la période d'échantillonnage et une troisième 5 fois plus grande que cette période.

Critères C_1 et C_2 en fonction de t (Δ constant)

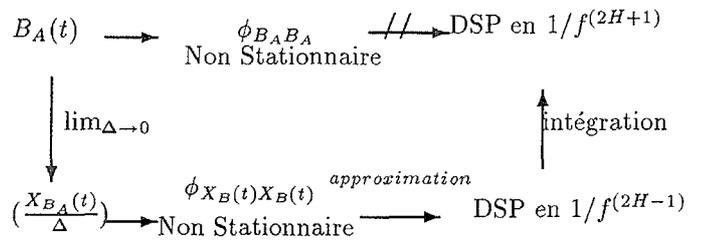
C_1	$t = 1E-5$	$t = 4$	$t = 20$
H=0.2	4.27E-5	7.26E-6	3.31E-6
H=0.8	1E-3	8.85E-4	7.5869E-4
C_2	$t = 1E-5$	$t = 4$	$t = 20$
H=0.2	0.4257	0.2132	0.0199
H=0.8	3.3192	1.6773	0.5236

Récapitulatif des critères C_1 et C_2 en fonction de t , $\Delta = 4$

On constate que plus grand est l'instant d'observation, meilleure est l'adéquation entre les deux fonctions d'autocorrélations.

2.6 Densité spectrale associée

Comme la fonction d'autocorrélation des incréments n'est rigoureusement pas stationnaire, il n'est pas possible, comme pour le (fbm) ou le (bm), de définir une densité spectrale au modèle de Barnes et Allan, via ses incréments. Mais, dans la mesure, où la fonction d'autocorrélation des incréments est une bonne approximation de celle des incréments du (fbm), on peut écrire, de façon similaire à la démarche classique :



Conclusion

Dans cet article, nous avons donc étudié comparativement les deux modèles théoriques bien connus, de Mandelbrot (fbm) et de Barnes et Allan. Ayant remarqué un certain nombre de propriétés communes, nous avons pu montrer la convergence de la fonction d'autocorrélation des incréments du modèle de Barnes et Allan vers cette même fonction pour le (fbm). Ainsi, nous concluons qu'au vu de cette convergence, toutes les autres propriétés importantes par ailleurs vérifiées, le modèle de Barnes et Allan est une bonne approximation du (fbm), tout du moins pour les valeurs de H inférieures à 0.5.

Comme ce modèle est plus physique, il est possible de définir une méthode de synthèse différentielle directement issue de l'équation (13). Cette synthèse consiste en la simulation d'une infinité d'équations différentielles [4].

References

- [1] B.B. Mandelbrot and J.W Van Ness : -*Fractional Brownian Motions, Fractional noises and applications*-, The Siam Review, Vol 10, n°4, pages 422-437, October 1968
- [2] H.E Hurst and R.P Black and Y.M Sinaika : -*Long Terme Storage in Reservoirs. An Experimental Study*-, Proc IEEE, , pages 3557-3560, 1991
- [3] J.A. Barnes and D.W. Allan : -*A statistical model of flicker noise*-, Proc. IEEE Vol 54, pages 176-178, 1966
- [4] Olivier Magré : -*Mouvement brownien fractionnaire : Analyse et Synthèse*-, Thèse de doctorat, à paraître
- [5] P.Flandrin.: -*On the Spectrum of Fractional Brownian Motions*-, IEEE Transactions on information theory, January 1989