

**DE L'INTÉRÊT D'UNE RECONSTRUCTION PARAMÉTRIQUE EN PRÉSENCE
D'INFORMATION TRÈS LACUNAIRE
- APPLICATION À LA DÉBITMÉTRIE ULTRASONORE -**

Gilles FLEURY - Jacques OKSMAN

Service des Mesures
École Supérieure d'Électricité
Plateau de Moulon
91192 Gif sur Yvette Cédex

RÉSUMÉ

La notion de contrôle non destructif est par essence rattachée aux techniques de résolution des problèmes inverses. Ces dernières présentent le souci commun de formaliser l'information accessible a priori de l'objet à estimer. Ne disposant, dans notre application, que de très peu d'observations, une approche non paramétrique même régularisée n'était pas satisfaisante. Nous avons alors développé plusieurs aspects de l'optimisation d'instrument qui offre un cadre propice à une estimation réellement quantitative. Les perspectives de recherche sont enfin axées vers la définition de la pertinence d'un modèle paramétrique.

ABSTRACT

There is a basic connection between the non destructive testing concept and the resolution of inverse problems. The common techniques for solving those problems try to formalise the reachable prior information upon the object of interest. As we get just a few measurements, even a regularised non parametric approach appeared to be not sufficient. Thus we worked out few aspects of instrument optimisation which yield to quantitative estimations. Our research is eventually focused on the definition of a parametric model pertinence.

INTRODUCTION

Ce travail a pour toile de fond la mise au point d'un débitmètre ultrasonore non intrusif à temps de vol, pouvant tenir lieu d'étalon secondaire. Pour ce faire nous devons résoudre un problème de reconstruction 2D du profil des vitesses à partir d'un nombre très limité de rayons ultrasonores (3 ou 4). Cette optique instrumentale induit un problème inverse particulièrement mal posé pour lequel nous proposons plusieurs méthodes de reconstruction. Nous passons en revue plusieurs méthodes non paramétriques en plein essor de nos jours [5][6][7]. Par ailleurs, des modèles physiques puisés dans la littérature ainsi que des modèles plus empiriques que nous avons élaborés sous forme de fonctions paramétrées ou de bases fonctionnelles nous servent d'espace de définition. Plusieurs aspects de l'optimisation d'instrument son enfin abordés et confrontés. On montre l'équivalence de deux approches (algébrique et géométrique).

I. INSTRUMENT - NOTATIONS

L'élément de base du débitmètre est un couple de capteurs ultrasonores disposés en vis à vis à la périphérie de la conduite cylindrique. Le faisceau présente un certain angle α avec l'axe de la canalisation :

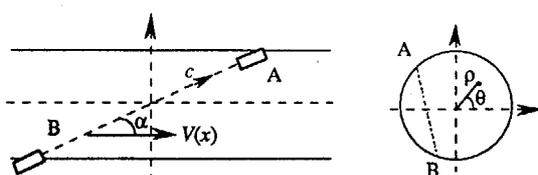


fig. 1 couple de capteurs ultrasonores

La différence entre les temps de vol A-B et B-A est approximativement proportionnelle à l'intégrale de la vitesse du fluide sur ce trajet.

On écrit ainsi :

$$\Delta T \approx \frac{2\ell \cos \alpha}{c^2} V_m \quad \text{avec} \quad V_m = \frac{1}{\ell} \int_A^B V(x) dx$$

Ces mesures différentielles nous fournissent n_c grandeurs intégrales que nous nommerons cordes.

Dans un premier temps il convient de décrire l'espace qui recouvre l'ensemble des profils de vitesse retenus. Cet espace peut être défini très généralement comme

- * l'ensemble des fonctions intégrables sur le disque unité ou de manière plus restrictive par
- * l'ensemble des modèles de type "boîte noire", fonctions paramétriques, ou décomposables dans une base ou une famille de fonctions.

La première approche conduit à une analyse non paramétrique alors que la seconde se place dans un espace de paramètres, qu'ils soient physiques ou purement formels.

Nous désignons par le vecteur δ l'ensemble des cordes ultrasonores. Le profil des vitesses est déroulé suivant un vecteur f . Nous notons a les paramètres fonctionnels dans le cas linéaire et p dans le cas non linéaire. Enfin nous notons π les paramètres instrumentaux, décrivant les positions (ρ_i et θ_i) des faisceaux.

* Dans une approche non paramétrique la relation qui relie les données aux inconnues s'exprime sous la forme $\delta = Df$ où la matrice D représente les contributions des éléments de discrétisation touchés par les mesures.

* Dans une approche paramétrique la corde est définie par ce qui se traduit par :

$$\delta_i = \frac{1}{2\sqrt{1-\rho_i^2}} \int_{-\sqrt{1-\rho_i^2}}^{\sqrt{1-\rho_i^2}} f(p; \rho(s), \theta(s)) ds \quad \begin{matrix} \delta = g(p; \pi) & \text{en non linéaire} \\ \delta = \Delta(\pi).a & \text{en linéaire} \end{matrix}$$

la matrice Δ représente les valeurs des cordes sur les différentes composantes de la famille fonctionnelle considérée.



II. INVERSION

Les données dont nous disposons sont systématiquement entachées d'erreurs de mesure, de modélisation ou d'a priori. Nous retiendrons donc les relations :

$$\delta = g(p; \pi) + e \quad \text{ou} \quad \delta = \Delta(\pi).a + e$$

Ces erreurs sont donc représentées globalement par une grandeur additive e , cette hypothèse simplificatrice devant être justifiée.

Nous ne présenterons que deux des approches possibles pour l'inversion, notre propos n'étant pas de traiter la problématique du problème inverse.

II.1 Approche déterministe - moindres carrés

Dans une approche au sens des moindres carrés on cherche à minimiser la forme quadratique reliant les mesures aux estimées issues du modèle soit : $\xi(a) = (\delta_{mes} - \Delta a)^T W^T W (\delta_{mes} - \Delta a)$, la matrice de pondération $W^T W$ étant indépendante de a .

$$\text{On obtient : } \hat{a} = (\Delta^T W^T W \Delta)^{-1} \Delta^T W^T W \delta_{mes}$$

Si la relation entre les mesures et les paramètres est non linéaire, le coût prend la forme suivante, et ne peut donner lieu à une expression explicite du résultat :

$$\xi(p) = (\delta_{mes} - g(p; \pi))^T W^T W (\delta_{mes} - g(p; \pi))$$

Le problème peut toutefois être linéarisé autour du point p_0 . On construit alors classiquement la matrice jacobienne de la fonction g en ce point.

$$\text{Nous noterons ainsi : } \nabla g_0 = \left[\frac{\partial g}{\partial p_j}(p_0; \pi_i) \right]$$

II.2 Approche probabiliste - bayésienne

La méthode qui s'appuie sur la loi de Bayes permet d'introduire agréablement les notions d'a priori par le biais de densités de probabilités [1][2]. Cette loi traduit la relation entre la densité de probabilité a posteriori d'une grandeur et sa loi a priori via la densité conditionnelle liée au modèle retenu :

$$P_{post}(a|\delta) = \frac{P(\delta|a)P_0(a)}{\int P(\delta|u)P_0(u)du}$$

Le bruit additif est choisi gaussien de moyenne μ_e et de matrice de covariance Γ_e . Si l'on suppose que les paramètres a suivent a priori une loi de probabilité gaussienne (μ_a, Γ_a), la loi de Bayes définit la densité de probabilité a posteriori des paramètres a sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{post}(a) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_a}{2}} |\hat{\Gamma}_a|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (a - \hat{\mu}_a)^T \hat{\Gamma}_a^{-1} (a - \hat{\mu}_a) \right\} \\ \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mu}_a = \hat{\Gamma}_a^{-1} [\Gamma_e^{-1} \mu_e + \Delta^T \Gamma_e^{-1} (\delta_{mes} - \mu_e)] \\ \hat{\Gamma}_a = (\Delta^T \Gamma_e^{-1} \Delta + \Gamma_a^{-1})^{-1} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La valeur la plus probable au sens du maximum a posteriori (MAP) pour les coordonnées ainsi estimées vaut alors dans le cas classique envisagé ($\mu_{a,e} = 0$ $\Gamma_e = \sigma_e^2 Id_{n_e}$ $\Gamma_a = \sigma_a^2 Id_{n_a}$) :

$$\hat{a} = \hat{\mu}_a = (\Delta^T \Delta + \alpha Id_{n_a})^{-1} \Delta^T \delta \quad \text{ou} \quad \alpha = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_a} \right)^2$$

Remplacer Δ par ∇g_0 aboutit à la même formulation de l'estimation des paramètres \hat{p} autour du point p_0 . Les hypothèses de loi gaussienne sont réductrices ; aussi utiliser d'autres lois est parfois licite. Ceci conduit néanmoins à des algorithmes très gourmands en calcul pour l'évaluation de la densité a posteriori $P_{post}(a)$ comme pour la recherche du MAP.

III. MÉTHODES NON PARAMÉTRIQUES

III.1 Méthode ART contrainte

Reconstruire une grandeur 2D à partir de ces différentes projections appartient à la problématique de la tomographie. Cette technique est largement établie et conduit à des résultats concluants. La limitation à trois ou quatre du nombre de cordes ultrasonores ne nous permet pas cependant d'utiliser de telles approches. Les méthodes de type ART paraissent de prime abord plus adaptées à notre objectif comme à nos contraintes. Elles conduisent néanmoins à des résultats essentiellement qualitatifs malgré un nombre de projections usuel bien supérieur à celui qui nous est octroyé. Il nous faut introduire d'une manière ou d'une autre une connaissance a priori sur le profil de vitesse.

Un des moyens simples consiste à propager l'information contenue au niveau des chemins ultrasonores à tout le profil en imposant un critère de douceur. Des splines cubiques ou une interpolation biharmonique donnent accès par nature à cette notion de douceur en adéquation avec la physique. Par ailleurs un a priori tout autant physique sur la tangente à proximité de la paroi permet de contraindre davantage le profil tout en tenant compte des pentes des profils réels.

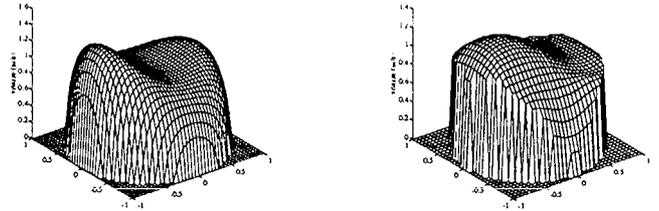


fig. 2 profil des vitesses en entrée d'un coude à 90°, modèle comportemental.
fig. 3 Reconstruction ART + splines optimisées (Erreur sur le débit : -0.43%)

III.2 Maximum d'entropie

Le premier pas consiste à définir l'entropie du profil, considéré comme une simple image. Différentes propositions, liées à la nature de l'objet, sont faites dans la littérature. Il reste ensuite à minimiser un coût conjoint tenant compte simultanément des mesures et de cet a priori. Des simulations en ce sens nous ont montré qu'il était illusoire d'espérer remonter à un résultat quantitatif avec si peu de données. Il est clair qu'établir la notion d'information est primordial pour étudier la faisabilité de l'inversion dans un espace de définition donné.

IV. MÉTHODES PARAMÉTRIQUES

IV.1 Espace de travail

Nous avons utilisé trois modèles comportementaux issus du département DER/REME de E.D.F. (St Denis). L'un décrit l'aspect du profil de vitesse dans une canalisation rectiligne aux parois rugueuses, même pour des régimes fortement turbulents. Un autre est adapté à la déformation subie par le profil au voisinage d'un coude ; enfin un troisième décrit le régime transitoire à la sortie de ce coude vers une stabilisation de type "longueur droite".

Nous avons élaboré par ailleurs plusieurs fonctions paramétrées propices à la description des profils de vitesse.

IV.2 Inversion

Parmi les techniques visant à choisir une solution parmi l'ensemble de celles se conformant aux données se dégage une classe de méthodes qui recherchent un équilibre entre l'information a priori et les données expérimentales. Ces techniques de régularisation sont bien établies. Elles se concrétisent par la minimisation d'un coût conjoint $\xi = J_1 + \lambda J_2$, cumulant l'erreur résiduelle sur les cordes avec une autre grandeur

issue du profil (énergie, douceur, symétries diverses ou encore entropie). Ce critère utilise une grandeur λ qui joue le rôle d'arbitre entre l'a priori et les observations.

IV.3 Évaluation de l'hyperparamètre λ

La méthode de validation croisée généralisée est bien souvent utilisée pour trouver une estimée de cette grandeur charnière [8]. Ce critère C empirique possède l'avantage de présenter effectivement un minimum :

$$C = \frac{\delta_{mes}^T A^T A \delta_{mes}}{(\text{tr } A)^2} \quad \text{où} \quad \begin{cases} A = Id_{n_c} - K \\ K = \Delta M \Delta^T \\ M = (\Delta^T \Delta + \lambda Id_{n_c})^{-1} \end{cases}$$

Au lieu de rechercher le minimum de cette fonction, souvent très peu marqué, nous préférons chercher en quel point sa dérivée s'annule (sachant que l'extremum est bel et bien un minimum), soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \delta_{mes}^T A^T [\text{tr } B \cdot A - \text{tr } A \cdot B] \delta_{mes} = 0 \\ \text{où } B = \Delta M^2 \Delta^T \end{cases}$$

V. OPTIMISATION

V.1 Approche classique

La première approche rencontrée vise à minimiser une distance entre une grandeur d'intérêt et son estimée issue de l'inversion. Ceci revient pour nous à vouloir estimer au mieux :

- soit les données génératrices de la fonction reconstruite (points de discrétisation - approche non paramétrique) (paramètres fonctionnels - approche paramétrique)
- soit une donnée sous tendue par la fonction reconstruite (une grandeur intégrale comme le débit)

L'estimation des coordonnées par inversion classique donne $\hat{a}_0 = [\Delta^T W^T W \Delta]^T W^T W \Delta^T \delta_{mes}$. L'optimisation vise à minimiser un critère du type $\varepsilon_a = (\hat{a}_0 - a_0)^T W^T W (\hat{a}_0 - a_0)$, d'où l'instrument :

$$\hat{\pi}_1 = \arg \min_{\pi} [\varepsilon_a]$$

V.2 Conditionnement optimal de la matrice générique

Dans une approche de type moindres carrés, la matrice à inverser est $M_0 = \nabla g_0^T \nabla g_0$. Le caractère mal posé du problème est intimement lié au mauvais conditionnement de cette matrice dont l'inversion est très sensible au bruit. On montre classiquement qu'un bruit sur les observations induit sur la grandeur à estimer une erreur relative majorée par l'expression suivante :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \frac{\|\delta y\|}{\|y\|} \quad \text{où } \lambda_{\min} \text{ et } \lambda_{\max} \text{ sont les valeurs propres extrémales de la matrice } M_0.$$

Afin d'obtenir un problème inverse le mieux posé possible il convient donc de maximiser le conditionnement réciproque de la matrice générique, d'où l'instrument :

$$\hat{\pi}_2 = \arg \max_{\pi} \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right)$$

V.3 Approche géométrique

Les méthodes d'inversion dans les cas non linéaires utilisent les techniques de minimisation habituelles itératives telles que le gradient conjugué. Ces algorithmes déplacent le point courant sur la surface de coût. En conséquence plus le minimum de cette surface sera marqué plus l'algorithme sera efficace et évitera des oscillations ou des non convergences. La surface de coût doit donc être la plus ramassée possible autour du point p_0 . Aussi cherchera-t-on à maximiser la concavité la plus pénalisante autour de ce point cible.

Le coût à minimiser afin de remonter aux paramètres retenus p_0 est $\xi = (g(p; \pi) - g(p_0; \pi))^T (g(p; \pi) - g(p_0; \pi))$, en supposant nuls les bruits de mesure et de modélisation.

La concavité de cette surface au point p_0 dans la direction u_β fait intervenir la fonction Φ définie par $\Phi(u) = \xi(p_0 + hu)$, le vecteur u_β étant choisi normé. L'indice β fait le parallèle avec l'angle directeur dans le cas bidimensionnel.

$$\text{Le vecteur } p \text{ est alors : } p = \left(Id_n + h \frac{D}{\sqrt{p_0^T D^T D p_0}} \right) p_0$$

La matrice directionnelle D est une matrice diagonale qui contient les coordonnées du vecteur u_β sur la base naturelle de l'espace des paramètres. La dérivée seconde du coût dans la direction u_β au point p_0 est donnée alors par la limite :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_\beta^2} \Big|_{p_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2} \right) \begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2} = 2(g(p; \pi) - g(p_0; \pi))^T \frac{\partial^2 g}{\partial h^2} + 2 \left(\frac{\partial g}{\partial h} \right)^T \left(\frac{\partial g}{\partial h} \right) \\ \text{où } \frac{\partial^n g}{\partial h^n} = \left[\dots \quad \frac{\partial^n g}{\partial h^n}(p; \pi_i) \quad \dots \right]^T \quad n \in [1, 2] \end{cases}$$

$$\text{On trouve alors : } \gamma_\beta(\pi) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_\beta^2} \Big|_{p_0} = 2 \frac{p_0^T D^T \nabla g_0^T \nabla g_0 D p_0}{p_0^T D^T D p_0}$$

L'instrument préconisé vient immédiatement :

$$\hat{\pi}_3 = \arg \max_{\pi} \left(\min_{\beta} (\gamma_\beta(\pi)) \right)$$

V.4 Incrément d'information global

Dans le cas linéaire (paramétrique ou non) et sous l'hypothèse de lois gaussiennes il nous est possible d'expliciter le calcul de l'entropie a posteriori des paramètres :

$$H = - \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} P_{post} \log(P_{post}) d\alpha = \frac{1}{2} \log(\det \hat{\Gamma}_a) + \frac{1}{2} (1 + n_a \log(2\pi))$$

L'information apportée par les observations aux paramètres du modèle s'exprime donc par :

$$I = -\frac{1}{2} \log(\det \hat{\Gamma}_a) - \frac{1}{2} (1 + n_a \log(2\pi))$$

Il s'agit donc de maximiser cet incrément d'information. Il s'exprime naturellement par la différence :

$$\Delta I = -\frac{1}{2} \log(\det \hat{\Gamma}_a) + \frac{1}{2} \log(\det \Gamma_a) = \frac{1}{2} \log(\det \Gamma_a \hat{\Gamma}_a^{-1})$$

L'égalité entre les deux déterminants suivants :

$$\det \Gamma_a \Gamma_a^{-1} = \det (Id_{n_c} + \Gamma_a \Delta^T \Gamma_c^{-1} \Delta) = \det (Id_{n_c} + \Delta \Gamma_a \Delta^T \Gamma_c^{-1}) = \det R$$

permet de définir la matrice de redondance $R = Id_{n_c} + \Delta \Gamma_a \Delta^T \Gamma_c^{-1}$.

Cette matrice présente l'intérêt de décrire, via ses vecteurs propres, des combinaisons d'observations. Chacune de ces "pseudo-mesures" concoure, de manière additive, à l'incrément global d'information par sa vecteur propre associée [3].

L'optimisation vise alors à déterminer - dans un espace donné - l'instrument qui permet de maximiser ΔI . On retrouve l'idée très naturelle d'une estimation qui induit une variance "minimale" (appellation justifiée dans le cas unidimensionnel) :

$$\hat{\pi}_4 = \arg \max_{\pi} (\Delta I) = \arg \max_{\pi} (\det R)$$

Cette notion d'incrément d'information quoique naturelle ne donne guère de résultats intéressants. Les instruments qui en résultent sont souvent fortement redondants. La corde apportant le plus d'information reste prépondérante lorsque l'on désire discriminer plusieurs mesures. Les hypothèses de lois normales additives peuvent être erronées, comme le fait de considérer simplement une linéarisation autour d'un point p_0 . Des recherches sont entreprises en ce sens [4].



V.5 Incréments d'information élémentaires

La méthode précédente permet de quantifier l'incrément d'information apportée aux paramètres p dans leur globalité. Elle ne permet pas en revanche de savoir dans quelle mesure un paramètre a bénéficié de l'information contenue dans les mesures. Nous nous proposons ici de déterminer des quantités qui permettront de juger de l'information apportée par un jeu de mesures sur un paramètre donné.

On peut pour cela utiliser la matrice de covariance de la densité de probabilité a posteriori des paramètres. Celle-ci est définie comme suit :

$$\hat{\Gamma}_a = \sigma_p^2 (I_{d_n} + M_0/\alpha)^{-1} \text{ ou encore } \hat{\Gamma}_a = [\hat{\sigma}_{p_i}^2]$$

Or la matrice de covariance a priori a été choisie égale à $\sigma_p^2 I_{d_n}$. Nous définirons alors l'incrément d'information élémentaire apporté au paramètre p_i comme étant la quantité :

$$di_0^{p_i}(\pi) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sigma_p^2}{\hat{\sigma}_{p_i}^2} \right)$$

La méthode proposée vise à retenir l'instrument composé de n_p observations qui maximisent les incréments d'information élémentaires. Cette recherche se fait alors pas à pas :

$$\hat{\pi}_5 = \left\{ \arg \max_{\pi} (di_0^{p_i}(\pi)) \right\}_{i \in [1, n_p]}$$

Un des points intéressants de cette approche réside dans une chute très sensible de la complexité. On passe effectivement d'une optimisation dans un espace à n_p paramètres à n_p optimisations unidimensionnelles.

V.6 Comparaison des différentes approches

Il est aisé de prouver que rechercher un conditionnement optimal de la matrice générique ($\hat{\pi}_2$) et vouloir une surface de coût la plus "sympathique" pour tout algorithme de minimisation ($\hat{\pi}_3$) sont deux soucis équivalents. La concavité s'exprime par :

$$\gamma_\beta(\pi) = 2\hat{p}_0^T M_0 \hat{p}_0 \text{ où } \hat{p}_0 \text{ est le vecteur normé } \hat{p}_0 = \frac{Dp_0}{\sqrt{p_0^T D^T D p_0}}$$

Cette expression quadratique de la concavité est donc minimale lorsque le vecteur \hat{p}_0 se trouve colinéaire au vecteur propre associé à la plus petite valeur propre soit $\hat{p}_0 = \mathbf{v}_{\min}$ (puisque l'on a deux vecteurs normés). On vérifie bien que :

$$\gamma_{\min} = 2\mathbf{v}_{\min}^T M_0 \mathbf{v}_{\min} = 2\lambda_{\min} \text{ , et de même } \gamma_{\max} = 2\lambda_{\max}$$

Il est alors clair que ces deux méthodes d'optimisation sont liées. Chercher une matrice la mieux conditionnée possible revient à vouloir une surface qui se rapproche le plus possible d'une surface de révolution autour de p_0 . En revanche, si l'on préfère opter pour la maximisation de la concavité la plus pénalisante (cf. V.3), le parallèle algébrique aboutit à $\max(\lambda_{\min})$.

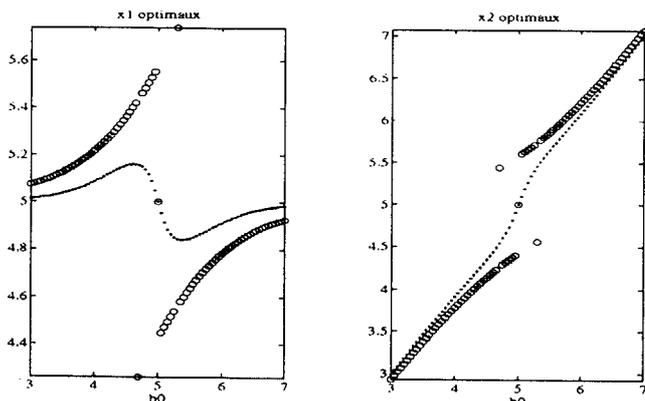


fig. 4 Composantes des instruments $\hat{\pi}_3(\circ)$ et $\hat{\pi}_5(\bullet)$ pour différents couples $[a_0, b_0]$

Cet exemple utilise la fonction $\text{atan}(x - a_0) + \text{atan}(x - b_0)$, avec $a_0 = 5$ fixé, b_0 variant. Le critère géométrique reste sensible dans des zones de l'espace où le problème est particulièrement mal posé. En revanche les critères sont asymptotiquement équivalents pour des zones où le problème tend à devenir bien posé.

(Rq : dans le cas bidimensionnel la relation entre l'angle directeur β de plus faible concavité et celui, φ_{\min} , défini par \mathbf{v}_{\min} est : $\tan \varphi_{\min} / \tan \beta = p_{20} / p_{10}$. Il est donc généralement erroné de croire que les vecteurs propres se trouvent dirigés dans les directions à concavités extrémales.)

V.7 Introduction d'une pertinence - Choix de modèles

Une première étape réside dans l'élaboration d'une grandeur qui caractérise le degré de pertinence d'un paramètre par rapport à un autre. Nous définissons cette grandeur en fonction d'incrément d'information élémentaires. La logique de cette définition veut qu'un paramètre dont la variance propre n'évolue guère avec les observations devrait être considéré comme moins pertinent qu'un paramètre dont la variance diminue plus fortement. Aussi nous pouvons définir deux grandeurs, d'une part la pertinence relative de deux paramètres :

$$\eta(p_i/p_j) = \frac{di_0^{p_i}(\hat{\pi}_5(i))}{di_0^{p_j}(\hat{\pi}_5(j))}$$

d'autre part la pertinence du modèle :

$$\eta = \frac{di_0^{\max}}{di_0^{\min}} \text{ où } \begin{cases} di_0^{\max} = \max_i di_0^{p_i}(\hat{\pi}_5(i)) \\ di_0^{\min} = \min_i di_0^{p_i}(\hat{\pi}_5(i)) \end{cases}$$

Un instrument pourrait donc être considéré comme optimal quand chaque paramètre reçoit autant d'information des mesures effectuées. Un tel instrument aurait alors une pertinence proche de l'unité.

CONCLUSION

Les méthodes non paramétriques - tomographie ou ART d'une part, maximum d'entropie d'autre part - se trouvent inadaptées à cette situation pauvre en information. Cependant nous avons mis au point une méthode assimilable à de l'ART contraint qui donne des résultats intéressants quant à l'estimation du débit. Choisir un a priori régularisateur ou un espace paramétré sont les deux points sensibles des deux optiques de l'inversion.

L'optimisation paramétrique permet de définir des critères quantitatifs jugeant du degré de pertinence de l'espace choisi vis à vis du contexte d'inversion. Le cadre de l'optimisation est néanmoins très lié aux espaces retenus, et il n'est certes pas trivial de tenir compte des erreurs de modélisation comme d'a priori auxquelles il faut faire face dans tout problème.

Références :

- [1] A. TARANTOLA, "Inverse Problem Theory-Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation", Elsevier.
- [2] JAYNES, "Prior Probabilities", *IEEE Trans.on Systems Science and Cybernetics*, pp. 227-241, Sept. 68.
- [3] H. HURWITZ, "Entropy reduction in Bayesian analysis of measurements", *Physical Review A*, Vol 12 n°2, pp 698-706, August 75
- [4] N. POLSON, "On the Expected Amount of Information from a Non-linear Model", *J. R. Statist. Soc. B*, pp 889-895, 1992.
- [5] G. DEMOMENT, "Image Reconstruction and Restoration : Overview of Common Estimation Structures and Problems", *IEEE Trans. ASSP*, pp. 2024-2036, Dec. 89.
- [6] LEAHY and GOUTIS, "An Optimal Technique for Constraint-Based Image Restoration and Reconstruction", *IEEE Trans. ASSP*, pp. 1629-1642, Dec. 86.
- [7] SALERNO and TONAZZINI, "2D Image Reconstruction from Sparse Line-Integral Data", *Signal Processing*, pp. 193-203, 1991.
- [8] THOMPSON, BROWN, KAY and TITTERINGTON, "A Study of Methods of Choosing the Smoothing Parameter in Image Restoration by Regularization", *IEEE Trans. PAMI*, pp. 326-339, April 91.