

**INVERSION DE MODÈLES PHYSIQUES NON LINÉAIRES
APPLICATION AUX MESURES PAR COURANTS DE FOUCAULT**

Stéphane GUÉRIN - Jacques OKSMAN

École Supérieure d'Électricité - Service des Mesures
Plateau de Moulon 91192 Gif sur Yvette Cedex

RÉSUMÉ

Cette étude présente une application des techniques d'inversion généralisée de modèles non linéaires pour la mesure d'épaisseurs de dépôts à l'aide de courants de Foucault.

Après avoir rapidement détaillé la construction du modèle direct, on insistera sur l'inversion de ce modèle. Le problème étant normalement mal posé, on a cherché les conditions que les observations devaient respecter afin que l'inversion soit possible. Ces conditions ont été déterminées à l'aide d'un critère d'optimisation énoncé pour l'occasion.

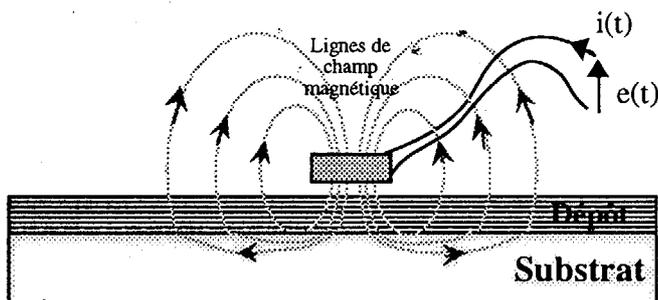
1. INTRODUCTION

Le contrôle non destructif (CND) conduit le plus souvent à des problèmes d'inversion. Dans le cas des mesures d'épaisseur par courants de Foucault, les modèles mis en jeu sont fortement non-linéaires et l'unicité de la solution n'est pas garantie a priori. La précision souhaitée est souvent incompatible avec l'emploi de méthodes non paramétriques. Il est donc nécessaire d'avoir recours à des modèles paramétriques pertinents, ce qui est possible dans notre cas. La résolution précise du problème direct a été effectuée par une approche physique puis par simulation. Une détermination des conditions de mesure optimales (ici les pulsations) a été menée afin de rendre possible l'inversion et de parvenir à la précision recherchée.

2. PHYSIQUE DU PROBLÈME (paramétrisation)

2.1 Principe

Le dépôt conducteur dont on cherche à mesurer l'épaisseur est présent sur un substrat métallique ferromagnétique doux.



ABSTRACT

This paper is devoted to a generalized inversion technique for non linear models. The method is applied to thickness measurement using eddy currents. The direct problem is briefly described. It leads to an ill-posed inversion problem. In order to deal with the possibility of inversion, we sought the conditions for which a classical inversion method could lead to the correct solution. Those conditions are optimized with respect to a proposed criterium.

L'application d'un champ magnétique variable dans un matériau conducteur induit des courants volumiques dont la répartition et l'intensité dépendent à la fois de la nature du matériau et de sa géométrie. Ces courants créent un champ magnétique de réaction qui s'oppose partiellement au champ de la source. La mesure de cette réaction doit permettre de remonter à la valeur de l'épaisseur du dépôt.

Le vecteur des observations y est formé dans notre cas des mesures de l'impédance complexe de la bobine en regard de la plaque pour différentes valeurs de la pulsation que l'on notera par le vecteur ω .

$$y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N]^T \quad \omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_N]^T$$

2.2 Modélisation

La résolution des équations fondamentales de l'électromagnétisme permet d'obtenir l'expression de l'impédance complexe en fonction de la pulsation et de définir les paramètres p à prendre en compte (épaisseur et grandeurs d'influence).

La plaque est supposée infinie dans le plan perpendiculaire à l'axe de la bobine. Celle-ci est décomposée en spires de courant élémentaires dont les sections sont infiniment petites. Le calcul s'effectue en deux étapes. La première consiste à exprimer en tout point de l'espace le potentiel vecteur créé par une spire élémentaire parcourue par un courant de pulsation ω . En raison de la symétrie axiale, le choix du potentiel vecteur comme variable de calcul est intéressant car celui-ci a une seule composante non nulle suivant l'axe orthoradial [1][2].



Soit $A_0(r, z)$ cette composante. L'équation aux dérivées partielles, dans laquelle les courants de déplacement ont été négligés, s'écrit:

$$\frac{\partial^2 A_0(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_0(r, z)}{\partial r} - \frac{A_0(r, z)}{r^2} + \frac{\partial^2 A_0(r, z)}{\partial z^2} = j\omega\mu\sigma A_0(r, z)$$

(σ et μ étant la conductivité et la permittivité du milieu)

En appliquant la méthode de séparation des variables on montre que la solution est de la forme:

$$A_0(r, z) = \int_k \lambda(k) J_1(kr) e^{z(k^2 + j\mu\sigma\omega)^{1/2}} dk$$

En tenant compte des conditions de continuité exprimées aux interfaces, on obtient l'expression du potentiel vecteur en tout point de l'espace.

La seconde étape du calcul de l'impédance consiste à intégrer les potentiels vecteurs créés par toutes les spires élémentaires sur l'ensemble de la bobine pour exprimer la tension induite et aboutir finalement à l'expression de l'impédance de la bobine en regard de la plaque. On obtient ainsi un modèle $f = f(\mathbf{p}, \omega)$ non linéaire par rapport à trois paramètres inconnus représentés par \mathbf{p} (l'épaisseur recherchée et les deux grandeurs d'influence considérées comme des paramètres à part entière[3]). Ces paramètres sont:

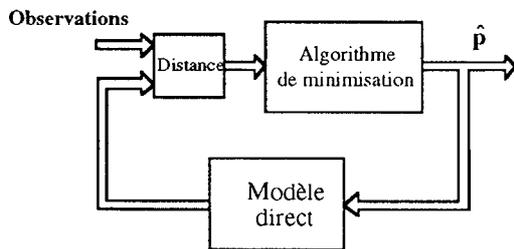
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} e_d \\ \sigma_d \\ d \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{épaisseur du dépôt recherchée} \\ \text{conductivité du dépôt} \\ \text{distance dépôt / bobine} \end{array}$$

3. INVERSION PARAMÉTRIQUE

Disposant des observations \mathbf{y} , on cherche le paramètre $\hat{\mathbf{p}}$ qui minimise une distance entre le résultat fourni par le modèle et les observations \mathbf{y} .

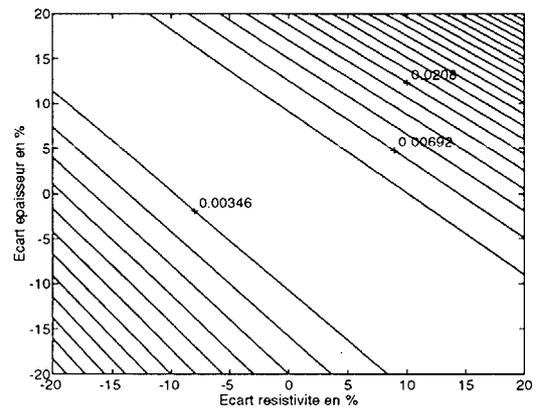
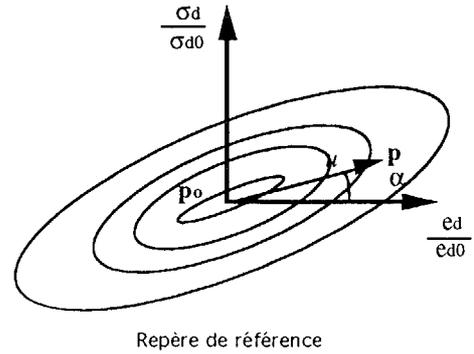
$$\hat{\mathbf{p}} = \text{argmin}_{\mathbf{p}} (\text{dist}(\mathbf{y}, f(\mathbf{p}, \omega)))$$

La méthode permettant d'obtenir le paramètre optimal repose sur le schéma de principe classique suivant, qui est le plus naturel, puisque le problème direct n'a pas une forme analytique:



Un tel procédé ne s'applique malheureusement que dans le cas où le problème est relativement bien posé. L'exemple suivant représente dans notre cas les lignes isocritère dans le repère de référence ci-dessous (la solution \mathbf{p}_0 est choisie comme origine) quand les conditions de la mesure sont choisies de façon non optimale.

(Afin de faciliter la représentation graphique, l'espace des paramètres est réduit aux deux premières dimensions liées au dépôt et le nombre de mesures est aussi fixé à deux).



Le mauvais conditionnement du problème est évident. Aucune hypothèse classique ne pouvant être faite sur le système ou sur les incertitudes (bruits), il nous a paru utile de rechercher des conditions de mesures optimales (ici les pulsations) qui permettraient par exemple de retrouver un problème bien posé[4].

4. OPTIMISATION DE L'INSTRUMENT

Au vu des résultats précédents, on pourrait considérer que les conditions de mesure optimales seraient celles qui minimiseraient l'erreur d'estimation sur l'épaisseur. Il faudrait chercher ω_{opt} tel que:

$$\omega_{opt} = \text{argmin}_{\omega} (E(\hat{e}_d - e_d)^2)$$

Ce problème d'optimisation étant excessivement complexe, nous avons recherché une solution (probablement sous-optimale) qui utilise un nouveau critère d'optimisation plus simple, basé sur l'étude de la fonction de coût à minimiser.

4.1 Critère d'optimisation

L'élaboration de ce critère d'optimisation tire son origine du constat simple suivant: lorsque la variance de l'erreur d'estimation est très importante, on constate qu'il existe au moins une direction liée à l'espace des paramètres et à la solution optimale dans laquelle la concavité de la fonction de coût est faible. Quand la variance de l'erreur d'estimation est relativement peu importante, alors la fonction de coût présente une concavité prononcée et sensiblement constante dans toutes les directions. Quand l'espace des paramètres est réduit à deux dimensions, la fonction de coût présente alors une allure en "cuvette".

Le critère d'optimisation proposé maximise en conséquence la concavité minimale dans un repère normalisé et centré autour de la solution optimale.

N.B Sous certaines conditions, on peut montrer que ce critère est relié aux valeurs propres de la matrice jacobienne du système au voisinage de la solution[5].

La fonction de coût C choisie est relative et quadratique. Elle traite de manière équivalente les parties réelles et imaginaires du modèle (On a : $f = f_x + j f_y$).

On pose tout d'abord:

$$C(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) \equiv \sum_{z=x,y} \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{f_z(\mathbf{p}, \omega_i) - f_z(\mathbf{p}_0, \omega_i)}{f_z(\mathbf{p}, \omega_i)} \right)^2 \right)$$

Puis on effectue le changement de variables:

$$(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{p}_0, u, \alpha)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + u \text{diag}(\alpha_{k=1..M}) \mathbf{p}_0$$

$$\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_M]^T \text{ avec } \sum_{k=1}^M \alpha_k^2 = 1$$

expressions dans lesquelles u représente la distance entre \mathbf{p} et \mathbf{p}_0 et α les variations relatives de chacune des coordonnées.

On obtient:

$$\frac{\partial^2 C(\mathbf{p}_0, u, \alpha)}{\partial u^2} \equiv 2 \sum_{z=x,y} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M \alpha_k s_{k,i,z} \right)$$

où $s_{k,i,z}$ représente la sensibilité relative du modèle par rapport aux paramètres:

$$s_{k,i,z} = \frac{p_k}{f_z(\mathbf{p}, \omega_i)} \frac{\partial f_z(\mathbf{p}, \omega_i)}{\partial p_k}$$

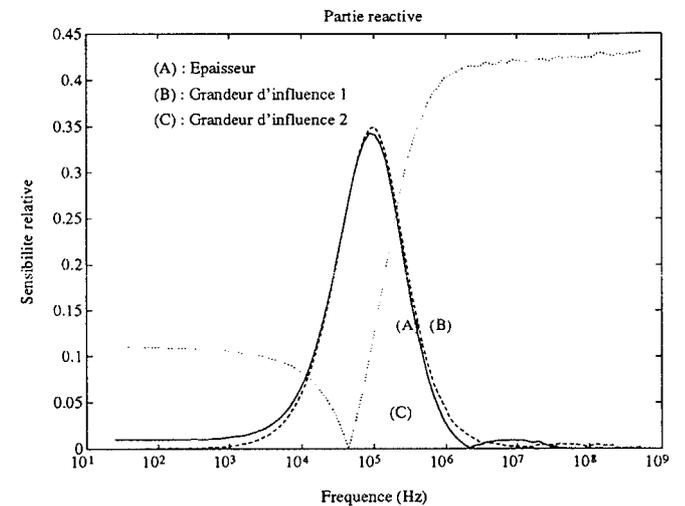
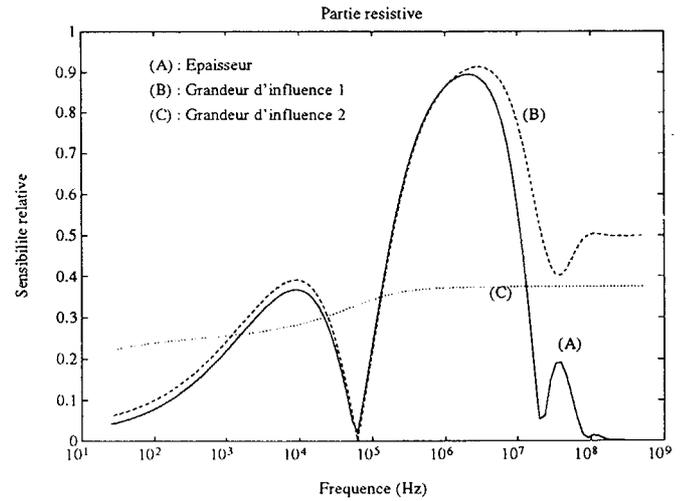
Le critère s'exprime donc à l'aide d'une combinaison linéaire de ces sensibilités. La solution optimale pour les conditions de mesure (pulsations) s'écrit alors:

$$\omega_{opt} = \arg \max_{\omega} \left(\min_{\alpha} \sum_{z=x,y} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M \alpha_k s_{k,i,z} \right) \right)$$

4.2 Application

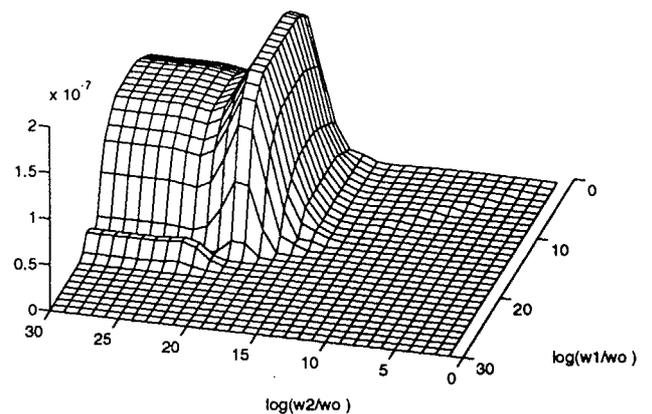
N.B. Afin de simplifier la présentation, on a choisi de ne traiter les exemples que dans le cas de deux mesures d'impédance pour deux fréquences. L'application, en réalité, impose que ces mesures soient en nombre plus élevé.

Les valeurs absolues des sensibilités relatives du modèle ont l'allure suivante en fonction des fréquences de mesure:



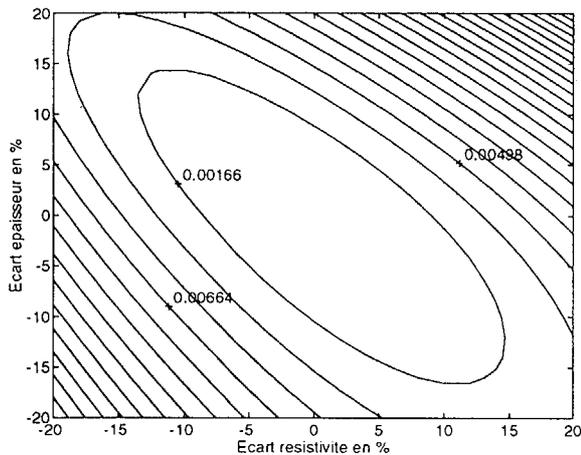
Physiquement, les signes des sensibilités correspondant à l'épaisseur et à la conductivité (grandeur d'influence n°1) sont opposés: il est donc visible que les deux effets vont se compenser dans un vaste domaine des fréquences de travail.

Le critère d'optimisation en fonction des pulsations de mesure est représenté ci dessous; on constate que son maximum est suffisamment prononcé pour qu'il soit possible d'obtenir ω_{opt} .





Dans les conditions de mesure optimales déterminées ci-dessus la fonction de coût présente alors l'allure souhaitée pour l'inversion (figure ci-dessous).



A partir de cette allure de fonction de coût, il est clair qu'un simple critère de distance sur les observations permet l'inversion du problème, ce qui est confirmé par l'expérience.

5. RÉSULTATS / CONCLUSION

Des inversions ont été effectuées dans les conditions de mesure optimales obtenues par le critère d'optimisation. Les résultats sont tels que la variance expérimentale de l'erreur d'estimation est du même ordre de grandeur que l'imprécision sur les mesures d'impédance. L'épaisseur du dépôt peut donc être obtenue avec la précision requise dans des conditions industrielles, puisque les valeurs des grandeurs d'influence sont elles aussi déterminées.

En plus de la solution optimale, les résultats obtenus grâce à ce critère d'optimisation montrent aussi que l'ensemble des conditions de mesure possibles se décompose clairement en deux domaines séparés par une certaine pulsation de coupure notée ω_c . On observe que l'inversion est possible si l'on dispose d'information dans ces deux domaines. Ainsi, dans le cas de deux pulsations, il faut choisir une pulsation de part et d'autre de ω_c . Une étude des phénomènes physiques mis en jeu nous a permis de valider et aussi de comprendre ces résultats. Nous avons pu montrer que pour des pulsations de valeurs très inférieures à ω_c , l'impédance est essentiellement une fonction du produit $e_d \sigma_d$ car les courants s'établissent dans tout le dépôt de façon homogène. Pour des pulsations de valeurs supérieures à ω_c au contraire, les courants se localisent en surface et l'impédance est alors essentiellement dépendante de la conductivité du dépôt σ_d . Les observations pour lesquelles on a $\omega < \omega_c$ apportent donc de l'information sur le produit $e_d \sigma_d$ tandis que celles effectuées pour $\omega > \omega_c$ contribuent à l'estimation de σ_d seul. La combinaison de ces informations permet donc d'estimer le paramètre e_d recherché.

On voit donc sur cet exemple dont on connaît les origines physiques, que les résultats fournis par le critère d'optimisation sont tout à fait compatibles avec une étude physique qualitative.

Cette étude a permis de présenter plusieurs aspects de l'inversion de modèle non linéaires sur une application en C.N.D. Nous avons vu qu'une bonne paramétrisation était nécessaire mais devait aussi être complétée par une étude approfondie des conditions de mesure. Ces conditions nécessaires à l'inversion ont été déterminées à l'aide d'un critère d'optimisation obtenu à partir de considérations géométriques sur la fonction de coût. L'utilisation de ce critère d'optimisation peut être étendue à d'autres types de problèmes.

Références

- [1]: A. TEGOPOULOS and E.E. KRIEZIS, "Eddy Currents in Linear Conducting Media", *Studies in Electrical and Electronic Engineering 16. Col ELSEVIER*.
- [2]: C.V. DODD, "Integral Solutions to some Eddy Current Problems", *International Journal of Nondestructive Testing, 1969. Vol.1, pp. 29-90*.
- [3]: J. OKSMAN, "Méthodes de traitement du signal et d'estimation appliquées aux mesures indirectes", *Rapport interne, Service des Mesures, 1991*.
- [4]: TARANTOLA, "Inverse Problem Theory-Methods for data Fitting and Model Parameter estimation", *Elsevier*.
- [5]: G.FLEURY, J. OKSMAN, "De l'intérêt d'une représentation paramétrique en présence d'information très lacunaire", *Colloque GRETSI 1993*.