MODELISATION ET IDENTIFICATION DES POINTE-ONDES EN ELECTRO-ENCEPHALOGRAPHIE

DE BRUCQ DENIS, COLOT OLIVIER, RUIZ VIRGINIE

La3I / LACIS-ITEPEA. UFR des Sciences et Techniques BP 118
76 821 Mont-Saint-Aignan Cedex, FRANCE
TdSI-GDR 134 CNRS

RÉSUMÉ

Dans les tracés électro-encéphalographiques, des figures paroxistiques, des pointes-ondes, sont très souvent présentes. Le phénomène apparaît à hautes fréquences: la pointe, et se termine à basse fréquence, l'onde. Les pointes-ondes se détachent souvent, nettement du tracé de fond.
Sur cette base, un modèle évolutif est établi. Les deux coefficients d'un modèle auto-régressif d'ordre deux, sont pris fonctions du temps. Un modèle interne linéaire comprenant trois paramètres constants, décrit l'évolution du module et des arguments des deux pôles, complexes conjugués. Les équations d'état et l'équation d'observation sont non-linéaires.
L'estimation statistique de l'état est réalisée par une extension du filtre de Kalman.
Sur des signaux réels, le modèle évolutif introduit, s'avère meilleur que les modèles auto-régressifs stationnaires d'ordre quatre.

ABSTRACT

Paroxysmal figures and spike-waves often occur in electroencephalographic (EEG) signals. Starting at high frequency, the phenomenon gives the spike and finishing at low frequency, it gives the wave. The spike-waves are clearly different from the background signals.
On this basis, an evolutive model is set on. The two coefficients of a 2-order auto-regressive (AR) model are dependent on time. A linear inner model with three constant parameters describes the modulus and the phase evolution of the conjugate complex two-pole.
The state and observation equations are nonlinear. The state's statistical estimation is obtained by means of an extended Kalman filter.
The evolutive model introduced, applied on real signals, proves to be better than the 4-order stationary AR-models.

1. INTRODUCTION

Les tracés encéphalographiques de fond ont été l'objet de nombreuses modélisations autorégressives. Cependant apparaissent des pointes-ondes et des artefacts. Les pointes sont des éléments rapides, parfois plus amples que le tracé de fond. Les pointes-ondes sont des pointes suivies d'ondes lentes. Ces figures peuvent apparaître isolément ou par bouffées. Elles sont typiques de l'épilepsie.
La pointe-onde est un phénomène transitoire évoluant des hautes fréquences vers des fréquences plus basses. Il s'agit d'un **glissement de fréquences**, phénomène essentiellement non stationnaire.

Nous avons introduit (§2) une modélisation de la pointe-onde, par un modèle auto-régressif évolutif d'ordre 2. Les coefficients usuels a_1, a_2 sont exprimés en fonction des coordonnées polaires ρ, φ des deux pôles conjugés de la transformée en z. Puis deux équations linéaires d'état sont introduites sur ce couple ρ, φ.

Les paramètres du modèle évoluant de façon non linéaire, l'identification est réalisée (§3) par une technique de **Kalman Etendu**; les bruits de modèlisation doivent être pris en compte. Enfin, une méthode du maximum de vraisemblance (§4) permet une identification plus précise.
Les résultats obtenus en simulation (§5), puis sur signaux réels (§6) justifient a posteriori l'utilisation de tels modèles AR évolutifs d'ordre 2 pour décrire le signal pointe-onde.

2. MODELE EVOLUTIF DE LA POINTE-ONDE

L'observation $Y(t)$; t$\in$ N échantillonnée à 100 Hertz, est liée à un bruit blanc e(t) suivant l'expression auto-régressive: $\forall$ t $\in$ N,

$$Y(t) + a_1(t+1)Y(t-1) + a_2(t+1)Y(t-2) = b_0 e(t) \quad (2.1)$$

Les paramètres a_1 et a_2 sont pris dépendant du temps, puisqu'ils doivent rendre compte de la non stationnarité du signal pointe-onde. Le décalage d'une unité en temps provient de considérations techniques. Une expression des paramètres a_1 et a_2 du modèle AR évolutif d'ordre 2 s'obtient par une analyse fréquentielle sur la transformée en z de la relation d'entrée sortie. Nous retenons l'écriture polaire des zéros d'où:

$$a_1(t+1) = -2\rho(t+1).cos\varphi(t+1) \quad (2.2)$$
$$a_2(t+1) = \rho^2(t+1) \quad (2.3)$$

Précisons que ρ est le module et φ l'argument des pôles de la transformée en z. L'évolution au cours du temps de ces pôles devrait être circonscrite au cercle unité pour assurer la stabilité du modèle. Nous proposons:

$$\rho(t+1) = r(t).\rho(t) \tag{2.4}$$
$$\varphi(t+1) = s(t).\varphi(t) + q(t) \tag{2.5}$$

Signalons que l'évolution des paramètres ρ(t+1) et φ(t+1) est linéaire si les paramètres cachés r, s, q sont constants. Aussi, nous prenons:

$$r(t+1) = r(t) \tag{2.6}$$
$$s(t+1) = s(t) \tag{2.7}$$
$$q(t+1) = q(t) \tag{2.8}$$

Ces paramètres supplémentaires r, s, q introduits pour décrire la pointe-onde sont également à identifier.

L'utilisation de ce modèle AR évolutif d'ordre 2 pour décrire le signal pointe-onde, est justifiée d'abord par simulation puis sur quelques signaux réels. Les paramètres du modèle évolutif sont estimés à partir des observations Y(0), Y(1), ..., Y(t). Le nombre t est de l'ordre de 50, puisque souvent les durées des pointes-ondes sont de l'ordre d'une demie seconde.
L'estimation des paramètres ρ, φ, r, s et q est effectuée par la technique de filtrage de Kalman, étendu.

3. IDENTIFICATION PAR FILTRAGE DE KALMAN ETENDU

Adoptons une représentation d'état, mettant en évidence les paramètres à identifier. Soit le vecteur Z(t) d'état:

$$Z(t) \triangleq \begin{pmatrix} \rho(t) \\ \varphi(t) \\ r(t) \\ s(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Nous cherchons la représentation d'état:

$$Z(t+1) = f(Z(t)) \tag{3.2}$$
$$Y(t) = h(Z(t)) + V(t) \tag{3.3}$$

avec $R(t)$ covariance du bruit $V(t)$ d'observation.
D'après les équations (2.4) à (2.8), le modèle interne s'écrit:

$$Z(t+1) = f(Z(t)) \triangleq \begin{pmatrix} r(t).\rho(t) \\ s(t).\varphi(t) + q(t) \\ r(t) \\ s(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

L'équation d'observation sur Y(t), du modèle d'état provient du modèle (2.1) en tenant compte de l'expression des paramètres $a_1(t+1)$ et $a_2(t+1)$:

$$\begin{aligned} Y(t) =& 2\rho(t+1).cos\varphi(t+1).Y(t-1) \\ &- \rho(t+1)^2.Y(t-2) + b_0.e(t) \end{aligned} \tag{3.5}$$

En reportant les expressions (2.4) et (2.5) de ρ(t+1) et φ(t+1), l'équation d'observation devient:

$$\begin{aligned} Y(t) = 2\rho(t).r(t).cos[\varphi(t).s(t) + q(t)]Y(t-1) \\ -\rho(t)^2.r(t)^2.Y(t-2) + b_0.e(t) \end{aligned} \tag{3.6}$$

avec $V(t) \triangleq b_0 e(t)$ et la fonction h non-linéaire de l'état à la date t, vaut:

$$\begin{aligned} h(Z(t)) \triangleq 2.\rho(t).r(t).cos[\varphi(t).s(t) + q(t)].Y(t-1) \\ - \rho(t)^2.r(t)^2.Y(t-2) \end{aligned} \tag{3.7}$$

La technique du filtrage de Kalman étendu effectue l'approximation des équations d'état, par un développement de Taylor, au voisinage du dernier point prédit $\hat{Z}(t/t-1)$.
Le modèle linéaire approché de la représentation d'état devient:

$$\begin{aligned} Z(t+1) - \hat{Z}(t+1/t) = \\ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{\hat{Z}(t/t-1)} .(Z(t) - \hat{Z}(t/t-1)) + W_L(t) \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} Y(t) - \hat{Y}(t/t-1) = \\ \left.\frac{\partial h}{\partial z}\right|_{\hat{Z}(t/t-1)} .(Z(t) - \hat{Z}(t/t-1)) + V_L(t) + V(t) \end{aligned} \tag{3.9}$$

où $W_L(t)$ et $V_L(t)$ sont définies comme des bruits de linéarisation provenant des termes quadratiques négligés du développement de Taylor.

Les dérivées secondes partielles sont facilement calculables. Ensuite, nous évaluons par approximation, le hessien, et, par la même, les covariances $Q_L(t)$ et $R_L(t)$ des bruits de linéarisation.
Ensuite, le filtre de Kalman est mis en oeuvre de façon classique sur les équations linéarisées.
Nous avons constaté en simulation que la convergence n'est assurée que si les valeurs initiales des paramètres cachés, ne sont pas trop éloignées des valeurs données. Toutefois, nous avons fait tourner l'algorithme de Kalman plusieurs fois pour définir des valeurs initiales qui assurent la convergence. La méthode du maximum de vraisemblance permet également d'atteindre une nominale réduisant l'erreur quadratique moyenne.

4. IDENTIFICATION PAR MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Nous prenons l'ensemble de la pointe-onde et par plusieurs itérations en utilisant une maximisation de la vraisemblance, nous identifions les paramètres cachés r, s et q.
Les paramètres du modèle décrivant la pointe-onde, obtenus par le filtrage de Kalman étendu rendent possible le calcul de la fonction de vraisemblance du modèle évolutif.
Pour la densité de probabilité de Y(t) gaussienne:

$$p(Y(t)) \triangleq \qquad (4.1)$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sqrt{det\Sigma(t)}}exp(-\frac{1}{2}\tilde{Y}(t/t-1).\Sigma^{-1}(t).\tilde{Y}(t/t-1))$$

les innovations $\tilde{Y}(t/t-1)$ sont des variables aléatoires centrées, de covariance Σ(t), définies par:

$$\tilde{Y}(t/t-1) \triangleq Y(t) - \hat{Y}(t/t-1)$$

La log-vraisemblance, log[p(Y(0),...,Y(t))], se calcule de manière récursive sur t à l'aide du filtre de Kalman étendu. Elle peut s'écrire:

$$\begin{aligned} L(r,s,q/Y(0),...,Y(t)) = & \qquad (4.2) \\ -\frac{t}{2}log2\pi - \frac{1}{2}\sum_{\tau=1}^{t} log\ det(\Sigma(\tau)) & \\ -\frac{1}{2}\sum_{\tau=1}^{t}\tilde{Y}(\tau/\tau-1).\Sigma^{-1}(\tau).\tilde{Y}(\tau/\tau-1) & \end{aligned}$$

Nous minimisons la quantité:

$$\begin{aligned} L1 \triangleq & \sum_{\tau=1}^{t} log\ det(\Sigma(\tau)) \qquad (4.3) \\ & + \sum_{\tau=1}^{t}\tilde{Y}(\tau/\tau-1).\Sigma^{-1}(\tau).\tilde{Y}(\tau/\tau-1) \end{aligned}$$

Les valeurs de $\Sigma(\tau)$ et $\tilde{Y}(\tau/\tau$-1) sont calculées par les équations du filtre de Kalman étendu (3.8-15). Une approximation quadratique par développement de Taylor accélère le processus de maximisation:

$$\begin{aligned} L1 = & L1(\hat{r},\hat{s},\hat{q}/Y(t)) \qquad (4.5) \\ & + \sum_{i=1}^{5}\frac{\partial L1}{\partial z_i}(\hat{r},\hat{s},\hat{q}/Y(t)).\tilde{z}_i \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{5}\tilde{z}_i.\tilde{z}_j.\frac{\partial^2 L1(\hat{r},\hat{s},\hat{q}/Y(t))}{\partial z_i \partial z_j} \end{aligned}$$

avec $\tilde{z}_i \triangleq z_i - \hat{z}_i$. Les diverses dérivées partielles sont calculables.
Après avoir fixé un vecteur initial de paramètres cachés (r,s,q), la vraisemblance et les diverses dérivées partielles sont calculées. Ensuite la forme quadratique est maximisée pour obtenir une nouvelle approximation de (r,s,q).

5. SIMULATION SUR DES SIGNAUX SYNTHETIQUES

La technique de filtrage de Kalman nécessite la connaissance des valeurs initiales:

$$\hat{Z}(0/0) \quad et \quad P(0/0)$$

Pour débuter l'algorithme d'estimation non linéaire et assurer la convergence, il faut partir de valeurs proches des vraies valeurs (connues en simulation). L'analyse spectrale du modèle AR d'ordre 2 a montré que les phénomènes hautes fréquences s'obtiennent quand φ est proche de π et ρ proche de 1. Le vecteur initial $\hat{Z}(0/0)$ des paramètres du modèle évolutif, est choisi:

$$\hat{Z}(0/0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \\ 0.9 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

La matrice $P(0/0)$ de covariance d'erreur sur l'état, est prise diagonale:
P(i,i)=1.33 pour i=1,2,3,4,5 P(i,j)=0 pour i$\neq$j;
L'algorithme de filtrage de Kalman dépend également de la covariance R des bruits d'observation. Cette covariance R provient de la précision prévisible des mesures.
Il faudra rajouter un bruit W d'état de covariance Q pour décrire l'inadéquation du modèle avec la réalité expérimentale; une valeur arbitraire peut-être donnée en simulation.
En simulation le filtre de Kalman étendu donne les résultats souhaités. Nous remarquons que la vitesse de convergence des paramètres estimés vers les paramètres donnés est rapide, une dizaine d'itérations. Cependant la convergence n'est assurée que si les valeurs initiales des paramètres ne sont pas trop éloignées des vraies valeurs.

6. APPLICATION AUX SIGNAUX EEG

Nous appliquons nos logiciels d'identification et de détection à des signaux EEG réels. Le premier des signaux étudiés comporte une pointe-onde apparaissant au $100^{ième}$ échantillon.
Nous constatons que le modèle AR d'ordre 4 permet une bonne prédiction du signal "tracé de fond". Nous obtenons alors des erreurs de prédiction $\tilde{Y}(t/t-1)$, faibles et gaussiennes. Avec le seuil choisi, nous détectons l'instant de passage à la pointe-onde.
Cependant, les deux techniques de modélisations AR et modélisation AR évolutive utilisées en parallèle, fournissent à chaque instant des erreurs (au nombre de trois) de prédiction. Tant que l'erreur AR est inférieure à l'erreur évolutif, le modèle AR est conservé; dans le cas contraire, nous changeons de modèle. D'une façon générale, il y a lieu de prendre le modèle pour lequel l'erreur est la plus petite.

La mise en oeuvre du filtrage de Kalman sur les signaux E.E.G s'effectue selon les étapes suivantes:
- A partir des quatre dernières valeurs observées, la prédiction AR est calculée et une mise à jour des paramètres du modèle AR est effectuée.
- A partir des deux dernières valeurs observées, la prédiction évolutive initiale est obtenue.
- Mais en situation évolutive, une autre prédiction est calculée, celle provenant des paramètres évolutifs déjà identifiés depuis le début détecté de la pointe-onde. Dans ces deux derniers cas, le filtrage de Kalman étendu met à jour le modèle d'état.
Les paramètres identifiés après une cinquantaine d'échantillons valent:
a_1= 0.95 a_3= 0.15
a_2= -0.65 a_4= 0.05

Ces valeurs sont retenues comme valeurs initiales par la suite.

Pour le modèle évolutif, les valeurs initiales $\rho(0/-1)$ et $\varphi(0/-1)$ sont choisies pour décrire un phénomène passant des hautes fréquences aux basses fréquences. La valeur de $\rho(0/-1)$ est prise dans l'intervalle $[0.8, 1]$ et la valeur de $\varphi(0/-1)$ vaut 2.1 rd/s. Si au début de l'étude, les valeurs de r(0/-1), s(0/-1) et q(0/-1) sont arbitraires ensuite nous prenons les valeurs identifiées.

La même méthodologie est choisie pour initialiser la matrice de covariance d'erreur sur l'état P(0/-1). Au départ, il est simple de choisir une matrice diagonale où les termes diagonaux correspondent à la précision que nous pensons avoir sur l'état initial. Une valeur trop faible de la covariance implique souvent un décrochage et une valeur trop importante une précision insuffisante.

Les évaluations des écarts types σ_ρ, σ_φ , σ_r, σ_s et σ_q des bruits d'états, sont fournis par les approximations de

$$\sigma_{z_i}^2 = E((\hat{z}_i(t/t) - \hat{z}_i(t/t-1))^2)$$

avec z_i paramètres ρ, φ, r, s et q.

A chaque itération, le filtre de Kalman nous fournit les valeurs de $\hat{z}_i(t/t)$ et $\hat{z}_i(t/t-1)$ grâce auxquelles nous calculons l'expression

$$(\hat{z}_i(t/t) - \hat{z}_i(t/t-1))^2$$

que nous moyennons sur la durée de la pointe-onde.

Dressons un tableau récapitulatif pour huit pointe-ondes choisies dans la banque de données EEG actuellement en laboratoire.

	$\sigma_{\hat{\rho}}$	$\sigma_{\hat{\varphi}}$	$\sigma_{\hat{r}}$	$\sigma_{\hat{s}}$	$\sigma_{\hat{q}}$
po 1	0.036	0.016	0.025	0.027	0.016
po 2	0.049	0.023	0.034	0.049	0.024
po 3	0.067	0.077	0.056	0.096	0.049
po 4	0.031	0.001	0.018	0.064	0.031
po 5	0.03	0.005	0.024	0.015	0.013
po 6	0.061	0.002	0.029	0.033	0.016
po 7	0.117	0.011	0.043	0.059	0.029
po 8	0.068	0.007	0.076	0.05	0.039

Les erreurs de prédiction, modèle évolutif sont plus petites que celle du modèle AR.

	$(y-\hat{y})^2_{AR}$	$(y-\hat{y})^2_{ARev}$
po 1	0.15	0.02
po 2	0.21	0.05
po 3	0.45	0.07
po 4	0.35	0.03
po 5	0.09	0.01
po 6	0.55	0.08
po 7	0.18	0.01
po 8	0.95	0.08

Des traçés graphiques montrent que les paramètres r, s et q varient mais convergent pendant la durée des pointes-ondes. Les valeurs des variances σ_ρ^2, σ_φ^2 retenues, assurent le non décrochage.

Nous avons appliqué ces algorithmes d'identification et de détection à d'autres types de non-stationnarité: par exemple à des artéfacts qui apparaissent dans les signaux EEG; en ces cas, les algorithmes d'identification du modèle évolutif, décrochent dès le début des artéfacts.

7. CONCLUSION

Nous avons vérifié l'intérêt de modèles internes AR évolutif d'ordre 2 pour décrire les signaux pointes-ondes.

La technique de filtage de Kalman étendu permet l'estimation des paramètres cachés dépendant des relations non-linéaires des observations.

Cette extension de la technique de Kalman s'est montrée performante du point de vue de l'estimation des paramètres du modèle évolutif. Toutefois, la mise en oeuvre de cette estimation est confortée par un maximum de vraisemblance.

Certains problèmes sont encore à l'étude. En particulier, une minimisation de l'erreur quadratique moyenne en fonction des valeurs initiales, est en cours. De même, nous essayons de classifier les pointes-ondes à partir des paramètres cachés de cette étude.

BIBLIOGRAPHIE

BOHLIN T. Analyse of the EEG signals with changing spectra. IBM Nordic Laboratory Technical Paper pp. 18-212, Octobre 1971.

CHAOUKI S. Logiciel de traitement du signal, Thèse de 3ème cycle, Rouen 1987.

DACUNHA-CASTELLE D., DULFO M. Probabilités et statistiques, MASSON, 1983.

DE BRUCQ D., FOLLIOT G. Théorie du signal, MASSON, 1989.

ISAKSSON A. On time variable properties of EEG signals examined by means of Kalman filter method. Techn. report., N°95, Royal Institute of technology, Stockolm, April1975.

NAJIM M. Modélisation et identification en traitement du signal. Masson, 1988.

STANUS E., LACROIX B., KERKHOLFS M. and MENDLEWICZ. Automated sleef scoring: a comparative reliability study of two algorithms. Electroenceph. Clin. Neurophsiol. 66 pp. 448-456, 1987.