

# Miroirs acoustiques à retournement temporel itératif: Théorie et expériences.

Claire PRADA, Jean-Louis THOMAS et Mathias FINK

Laboratoire Ondes et Acoustique  
Université Paris 7, ESPCI,  
10 rue Vauquelin, 75005 Paris.

## RESUME

Un miroir à retournement temporel est constitué d'un réseau 2D de transducteurs piézo-électriques chacun connecté à un récepteur et à un générateur programmable. Ce système peut focaliser automatiquement sur une cible échogène de la façon suivante: une première onde est émise par le réseau, l'onde réfléchiée par la cible est captée puis réémise dans la chronologie inverse, l'onde résultante focalise sur la cible. S'il y a plusieurs cibles, cette opération peut être itérée pour focaliser sélectivement sur la cible la plus réfléchissante. Ceci se démontre en introduisant la matrice de transfert  $K$  du système et l'opérateur de retournement temporel  $K^*K$ . En outre, lorsque les cibles sont séparées et de réflectivités distinctes, on montre que la loi d'émission pour focaliser sur l'une quelconque des cibles est fournie par l'un des vecteur propre de l'opérateur  $K^*K$ . Ces résultats vérifiés expérimentalement à 3MHz, devraient s'appliquer à la détection par sonar actif.

## ABSTRACT

A time reversal acoustic mirror is a 2D array of transducers, each being connected to its own receiver and programmable generator. It can be used to focus on a reflective target as follows: a first wave is transmitted by the array, the wave reflected by the target is detected, time-reversed and retransmitted. The resulting wave is focussed on the target. If there are several targets, this process can be iterated in order to focus selectively on the most reflective. This is proved by introducing the transfer matrix  $K$  of the transducer array in front of the medium and a time reversal operator  $K^*K$ . Furthermore, if the targets are resolved and have different reflectivities, we demonstrate that the transmit law to focus on one of them is provided by one of the eigenvectors of  $K^*K$ . These results were verified by experiments at 3MHz and should be interesting for active sonar detection.

## Introduction

La focalisation d'une onde sur une cible à travers un milieu inhomogène est un problème délicat en acoustique. Le miroir à retournement temporel apporte une solution élégante dans le cas d'une cible échogène<sup>[1]-[6]</sup>. Il est intéressant aussi bien pour le contrôle non-destructif des matériaux, que pour la lithotritie ou la détection sous-marine. En outre, dans le cas de plusieurs cibles résolues, on peut l'utiliser en mode itératif afin de focaliser sur la cible la plus échogène. Dans la première partie, le principe du miroir à retournement temporel itératif ainsi qu'un exemple expérimental sont exposés. Dans la deuxième partie, la convergence du mode itératif est établie grâce à une modélisation du processus de retournement temporel faisant intervenir la matrice de transfert du système constitué par le réseau de transducteurs et le milieu sondé<sup>[7]</sup>.

L'itération du retournement temporel permet en général de focaliser sur la cible la plus échogène, mais il est parfois souhaitable de connaître la loi de focalisation sur les cibles plus faibles. Le modèle mathématique présenté conduit à une méthode de traitement de la matrice de transfert qui permet de détecter simultanément toutes les cibles lorsqu'elles sont résolues. Cette méthode est exposée dans la dernière partie.

## I. Miroir à retournement temporel itératif.

Le miroir à retournement temporel sert à focaliser automatiquement sur une cible échogène de position mal connue. Il est constitué d'un réseau de transducteurs, chacun

connecté à sa propre électronique (récepteur, convertisseur A/D, mémoire et un émetteur programmable). C'est un système adaptatif, basé sur l'invariance de l'équation des ondes par retournement temporel, qui est capable de transformer une onde issue de la cible en une onde convergeant vers la cible. Le processus comporte trois étapes: (1) une première onde omnidirectionnelle est émise par le réseau de transducteurs afin de solliciter la cible, (2) l'onde réfléchiée est captée par tous les transducteurs, (3) les signaux sont alors traités en parallèle: le signal délivré par chaque transducteur est numérisé, mémorisé puis appliqué dans une chronologie inverse au même transducteur. L'onde retournée temporellement est alors émise par l'ensemble des transducteurs. Elle focalise sur la cible en dépit des fluctuations de vitesse du milieu.

Lorsque le milieu contient plusieurs cibles, le processus peut être itéré afin de focaliser sur la cible la plus échogène. En effet, l'onde émise après retournement temporel engendre une deuxième onde réfléchiée qui peut à son tour être retournée temporellement. Dans le cas de 2 cibles  $A$  et  $B$  de réflectivités  $a$  et  $b$  ( $a > b$ ), le premier retournement temporel produit une onde focalisée sur  $A$  d'amplitude relative  $a$  et une onde focalisée sur  $B$  d'amplitude relative  $b$ . Ces deux ondes sont réfléchies par les cibles, ce qui génère deux ondes d'amplitude  $a^2$  et  $b^2$ . A la  $n$ -ième itération, les amplitudes sont  $a^n$  et  $b^n$  si bien que pour  $n$  assez grand, l'onde focalisant sur  $B$  est éliminée.

Le résultat expérimental suivant permet de valider ce



concept. On utilise un réseau linéaire de 64 transducteurs de 0.6mm de large, espacés deux à deux de 0.75mm et fonctionnant à la fréquence centrale 2.5MHz. La cible est composée de deux fils de réflectivités différentes placés perpendiculairement au réseau à une profondeur de 90mm. La première onde est émise par un élément du centre du réseau. On observe l'écho des fils capté par tous les transducteurs (Fig.1 en haut à gauche). Ces signaux sont retournés temporellement et réémis. Le champ de pression ainsi produit est mesuré dans le plan des cibles par un hydrophone (Fig.1 en haut à droite). On observe alors deux lobes centrés sur la position des deux fils. L'écho des fils est de nouveau enregistré et retourné temporellement, cette opération est effectuée quatre fois. Au cours des itérations suivantes, on observe sur les échos la sélection du front d'onde focalisant sur le fil le plus réflecteur. Sur les diagrammes de pression, le lobe le plus faible disparaît: le système a appris à focaliser sur l'un des deux fils.

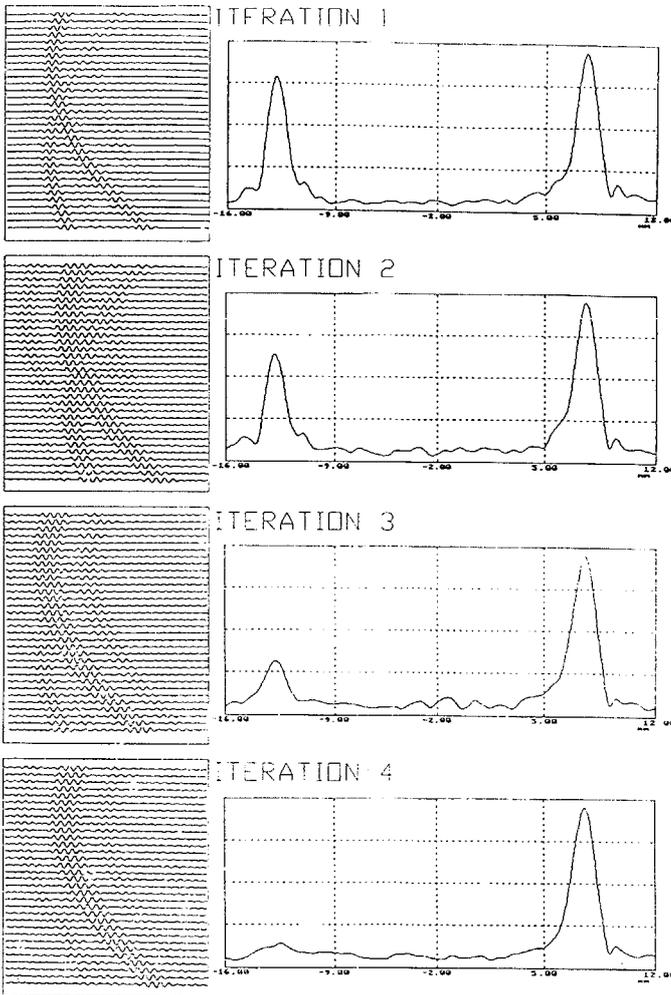


Figure 1: A gauche: Echos des fils reçus sur le réseau après chaque émission. A droite: Valeur crête du signal de pression mesuré dans le plan des fils après 1,2,3 et 4 itérations du processus. Le champ est obtenu par retournement temporel des échos représentés à gauche.

## II. Théorie du processus de retournement temporel itératif.

Une description mathématique du retournement temporel est nécessaire pour établir dans le cas général, la convergence du processus itératif. Elle fait appel à la notion de matrice de transfert du système.

•*Définition de la matrice de transfert du système:* Cette ma-

trice est définie à partir de la réponse impulsionnelle inter-élément  $k_{lm}(t)$  de l'élément  $l$  à l'élément  $m$ .  $k_{lm}(t)$  est le signal reçu sur la voie  $l$  lorsque la voie  $m$  est soumise à une impulsion  $\delta(t)$ . L'acquisition de ces  $L^2$  signaux peut se faire en excitant successivement les  $L$  voies du réseau et en recevant l'écho du milieu simultanément sur toutes les voies. Le système étant supposé linéaire et invariant, les signaux  $k_{lm}(t)$  pour  $1 \leq l, m \leq L$  permettent de décrire toute opération d'émission-réception. En effet, si  $e_m(t)$ ,  $1 \leq m \leq L$ , sont les  $L$  signaux d'entrée, les  $L$  signaux reçus  $r_l(t)$ ,  $1 \leq l \leq L$ , sont donnés par

$$r_l(t) = \sum_{m=1}^L k_{lm}(t) \otimes e_m(t), \quad 1 \leq l \leq L$$

Ces équations se réduisent dans le domaine fréquentiel à l'équation matricielle suivante:

$$\bar{R}(\omega) = \bar{K}(\omega) \bar{E}(\omega)$$

où  $\bar{E}(\omega) = (E_l(\omega))_{1 \leq l \leq L}$  et  $\bar{R}(\omega) = (R_l(\omega))_{1 \leq l \leq L}$  sont les vecteurs des transformées de Fourier des  $L$  signaux émis et des  $L$  signaux reçus, et où  $\bar{K}(\omega) = (K_{lm}(\omega))_{1 \leq m, l \leq L}$  est la matrice de transfert du système. Dans la suite, la dépendance en  $\omega$  est omise.

•*Modélisation du processus itératif:* Le processus de retournement temporel itératif peut maintenant être décrit. Soit  $\bar{E}^0$  le premier signal émis. Le signal reçu est alors

$$\bar{R}^0 = \bar{K} \bar{E}^0.$$

L'analogie du retournement temporel dans le domaine fréquentiel est la conjugaison. Par conséquent le nouveau vecteur d'émission  $\bar{E}^1$  est le conjugué du signal reçu, c'est à dire  $\bar{R}^{0*}$ . On a donc

$$\bar{E}^1 = \bar{K}^* \bar{E}^{0*}.$$

Par récurrence, les signaux émis à l'itération  $2n$  et à l'itération  $2n+1$  sont:

$$\begin{aligned} \bar{E}^{2n} &= [\bar{K}^* \bar{K}]^n \bar{E}^0 \\ \bar{E}^{2n+1} &= [\bar{K}^* \bar{K}]^n \bar{K}^* \bar{E}^{0*}. \end{aligned}$$

La matrice  $\bar{K}^* \bar{K}$  est appelée opérateur de retournement temporel. L'issue du processus itératif dépend du comportement de  $[\bar{K}^* \bar{K}]^n$  pour les grandes valeurs de  $n$ . Ce comportement peut être prévu car la matrice  $\bar{K}^* \bar{K}$  est diagonalisable. En effet, le principe de réciprocité assure la symétrie de  $K$  et ceci entraîne que  $\bar{K}^* \bar{K}$  est hermitienne. Ses sous-espaces propres sont donc orthogonaux et ses valeurs propres sont réelles. On montre aussi qu'elles sont positives.

L'issue d'un processus itératif peut alors être décrite. En effet, si  $\bar{V}_1$  est la composante de  $\bar{E}^0$  suivant la direction associée à la plus grande valeur propre  $\lambda_1$  de  $\bar{K}^* \bar{K}$ , on a

$$\bar{E}^{2n} \approx \lambda_1^n \bar{V}_1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

On vérifie que  $\overline{K}^* \overline{V}_1^*$  est aussi un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_1$ . On a donc

$$\overline{E}^{2n+1} \approx \lambda_1^n \overline{K}^* \overline{V}_1^* \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ceci assure la convergence du processus itératif vers une limite paire et une limite impaire qui en général sont proportionnelles.

• **Détermination de la matrice de transfert:** Pour  $D$  cibles ponctuelles en diffusion simple, la matrice de transfert s'exprime comme le produit de trois matrices: une matrice de propagation  $\overline{H}$ , de dimension  $D \times L$ , qui relie les signaux émis par les transducteurs aux pressions reçues par les cibles, une matrice de diffusion  $\overline{C}$ , de dimension  $D \times D$ , qui est diagonale et dont les coefficients sont les coefficients de réflectivité des cibles, une matrice de propagation inverse qui relie les pressions réfléchies par les  $D$  diffuseurs aux  $L$  signaux reçus. D'après le principe de réciprocité cette matrice est simplement  ${}^t \overline{H}$ . On a donc finalement

$$\overline{K} = {}^t \overline{H} \overline{C} \overline{H}$$

• **Détermination des vecteurs propres:** Si les cibles sont idéalement résolues, c'est-à-dire s'il est possible de focaliser sur l'une quelconque des cibles en produisant une énergie nulle sur les autres, alors les vecteurs propres de l'opérateur de retournement temporel peuvent être déterminés.

Lorsqu'on émet un signal vectoriel  $\overline{E}$ , la pression reçue par la cible  $i$  est le produit scalaire  ${}^t \overline{H}_i \overline{E}$  où  ${}^t \overline{H}_i = (H_{i1}, H_{i2}, \dots, H_{iL})$  est la  $i$ -ième ligne de la matrice  $\overline{H}$ . Ce produit est maximum si  $\overline{E} = \overline{H}_i^*$ . La focalisation optimale sur la cible  $i$  est donc obtenue en émettant le signal vectoriel  $\overline{H}_i^*$ . Pour une telle émission, la pression reçue par un diffuseur  $j$  est le produit  ${}^t \overline{H}_j \overline{H}_i^*$ . La résolution est idéale si ce produit est nul, c'est-à-dire si les vecteurs  $\overline{H}_i$  sont orthogonaux deux à deux. On vérifie alors l'équation

$$\overline{K}^* \overline{K} \overline{H}_i^* = \lambda_i \overline{H}_i^*$$

$$\text{avec } \lambda_i = |C_i|^2 \left( \sum_{l=1}^L |H_{il}|^2 \right)^2.$$

Ceci fournit les  $D$  valeurs propres non nulles de  $\overline{K}^* \overline{K}$ . On montre ainsi qu'un vecteur propre de  $\overline{K}^* \overline{K}$  donne la loi de focalisation sur l'une des cibles.

**Conséquence 1** - En général, le processus itératif de retournement temporel conduit à l'émission du vecteur propre de plus grande valeur propre, c'est à dire à une focalisation sur la cible vue par le réseau comme la plus réfléchissante.

**Conséquence 2** - Ce formalisme conduit à une méthode de détection. Elle consiste à mesurer la matrice de transfert du système (réseau de transducteurs + milieu étudié), à calculer et diagonaliser l'opérateur de retournement temporel correspondant.

### III. Détection simultanée de plusieurs cibles.

Pour tout réseau de transducteurs émetteurs et récepteurs, l'acquisition de la matrice de transfert  $\overline{K}$  peut se faire

très simplement en excitant successivement chaque transducteur du réseau par le même signal et en recevant l'écho sur toutes les voies. La diagonalisation de  $\overline{K}^* \overline{K}$  donne alors des indications intéressantes sur la présence de cibles, leur nombre, leur réflectivité et leur position.

• **Résultat expérimental:** Le réseau est identique à celui utilisé dans les expériences de retournement temporel. La cible est constituée de 6 fils placés perpendiculairement au réseau à une profondeur de 90mm et distants deux à deux et de gauche à droite de 4.8, 5.2, 3.6, 6.0 et 3.2mm. L'acquisition des réponses impulsionnelles inter-élément se fait avec une fréquence d'échantillonnage de 10MHz et seule l'information d'amplitude et de phase à la fréquence centrale de 2.1MHz est conservée.

La distribution des valeurs propres de  $\overline{K}^* \overline{K}$  met en évidence six valeurs maximales de même ordre de grandeur (Fig.2). Ceci indique que la cible est composée de 6 éléments. On a représenté la phase des 60 composantes des 6 vecteurs propres associés aux 6 valeurs propres maximales (Fig.3). Le champ de pression créé par l'émission de chacun des 6 vecteurs propres est calculé en tenant de la géométrie du réseau. On observe dans le plan des fils un lobe à la position de l'un des fils (Fig.4), ceci permet de retrouver séparément la position de chaque fil. On peut aussi reconstituer une image de l'objet en faisant la somme des 60 images obtenues par propagation des vecteurs propres normalisés, pondérées par la racine carrée des valeurs propres (Fig.5).

### Conclusion

Le miroir à retournement temporel est un système adaptatif qui en présence de plusieurs cibles, peut fonctionner en mode itératif afin de focaliser sur la plus échogène. L'acquisition de la matrice de transfert  $K$  du système constitué par le réseau de transducteurs et la diagonalisation de l'opérateur de retournement temporel  $K^* K$  permettent de prévoir l'issue et la rapidité de convergence d'un processus itératif. De plus, lorsque les cibles sont résolues, chaque cible est associée à un vecteur propre qui donne une loi de focalisation sur celle-ci. En outre, sa réflectivité est une fonction simple de la valeur propre correspondante. De ce résultat découle une méthode de détection qui ne nécessite pas d'émetteur programmable mais requiert simplement l'acquisition de la matrice de transfert du système puis son traitement numérique.

### Références

- [1] M.Fink, C.Prada, F.Wu, D.Cassereau. "Self focusing with time reversal acoustic mirrors in inhomogeneous media", IEEE 1989 Ultrasonic Symposium, Montréal, Oct 89.
- [2] C.Prada, M.Fink, and F.Wu. "The iterative time reversal mirror: a solution to self focusing in pulse echo mode," J.Acoust.Soc.Am 1991 90(2) pp 1119-1129.
- [3] C.Prada, "Retournement temporel des ondes ultrasonores, application à la focalisation," Thèse de Doctorat, Juin 1991.
- [4] Mathias Fink, "Time Reversal of Ultrasonic Fields - Part I: Basic Principles,"
- [5] Didier Cassereau and Mathias Fink, "Time Reversal of Ultrasonic Fields - Part III: Theory of the Closed Time-Reversal Cavity",
- [6] François Wu, Jean-Louis Thomas and Mathias Fink, "Time Reversal of Ultrasonic Fields - Part II: Experimental Results", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics,



and Frequency Control, (39), 5, 1992.

[7] C.Prada, J.L.Thomas, and M.Fink, "The iterative time reversal process: analysis of the convergence," Soumis au Journal of the American Society of Acoustics (Janvier 93).

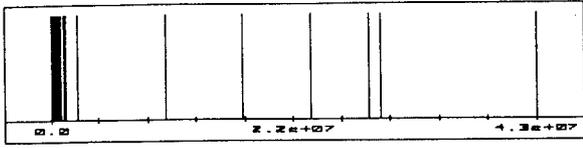


Figure 2: Distribution des 60 valeurs propres de 0.0 à la valeur propre maximale.

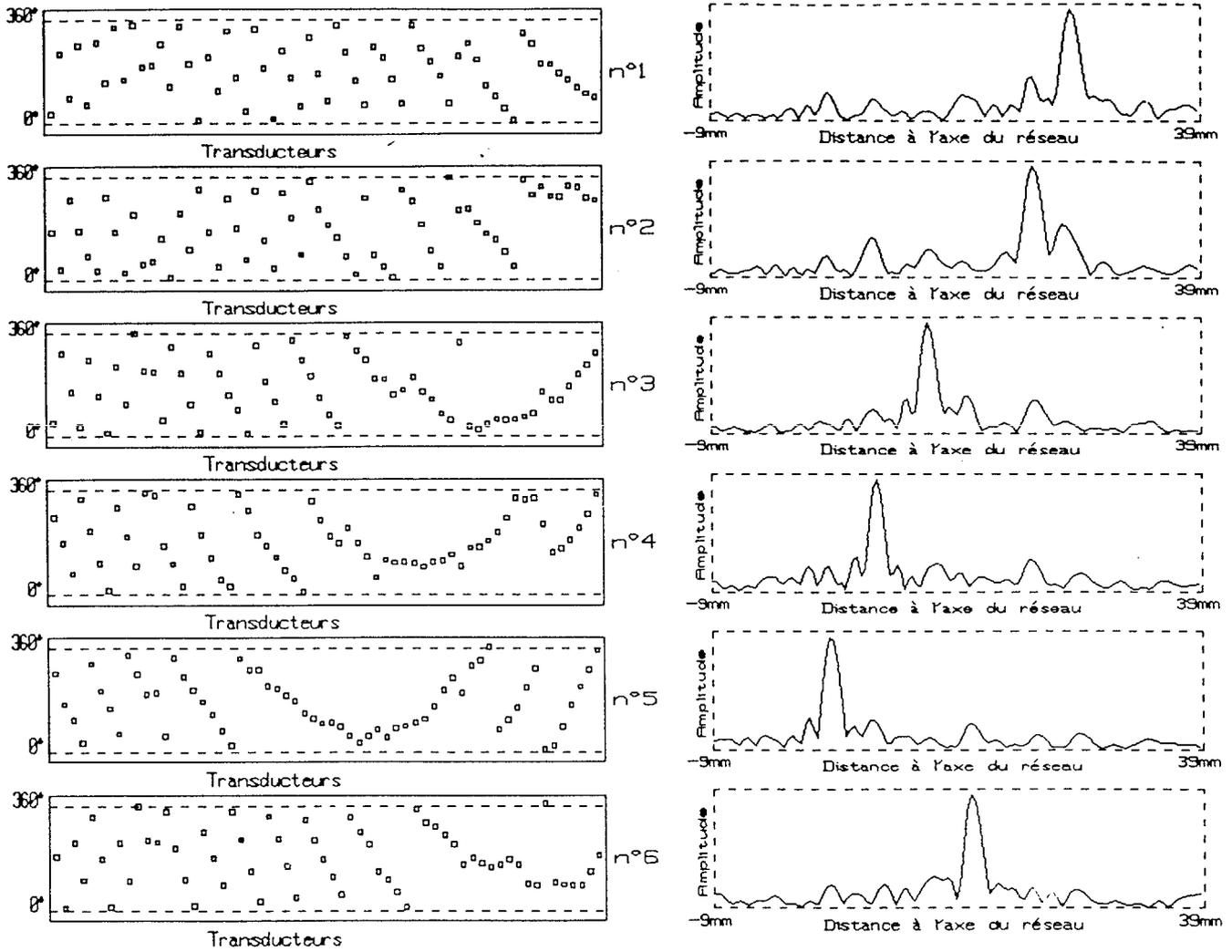


Figure 3: Loi de phase des six vecteurs propres associés aux six valeurs propres maximales. De haut en bas les valeurs propres par ordre décroissant.

Figure 4: Diagramme de pression calculé dans le plan des cibles par propagation des vecteurs propres associés aux six valeurs propres maximales.

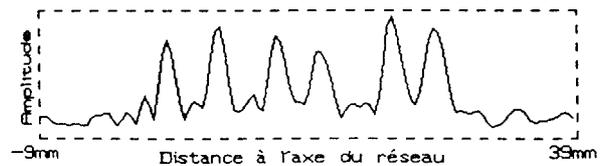


Figure 5: Image de l'objet.