



BORNES D'ESTIMATION EN POURSUITE DE CIBLES

Serge Prosperi

*THOMSON CSF Division RCC
Service Composantes Spatiales
146 Bd De Valmy, BP 82, 92 704 Colombes Cedex*

RÉSUMÉ

La poursuite de cibles, dont le coeur est l'association temporelle des mesures aux cibles, est un problème exponentiel. Les méthodes de résolution sont donc approchées, et la notion usuelle de borne est insuffisante pour qualifier les algorithmes utilisés en pratique.

Nous présentons dans l'article le calcul général de la borne de Cramer Rao, pour plusieurs cibles en présence de fausse alarme. Cette borne permet de juger de l'efficacité des méthodes de poursuite globales, pour l'initialisation de pistes. On propose ensuite d'étudier les méthodes de filtrage prédictif. On se limite pour cela aux algorithmes sans mémoire, et on montre que dans ce cas la borne n'est autre que l'espérance du filtre bayésien (PDAF).

1. INTRODUCTION

La plupart des systèmes d'écoute (radar, sonar, sismique) génèrent des mesures de cibles, modélisées comme des processus aléatoires. Ces systèmes sont généralement découpés en une fonction de détection, destinée à distinguer images de cibles et fausses alarmes, et une fonction d'estimation, qui fournit les paramètres cinématiques des cibles. Dans les systèmes récents, on peut y ajouter la fusion de données, qui permet de synthétiser les informations issues de différents traitements, ou de différentes antennes, pour localiser les cibles, y compris dans les cas non directement observables (triangulation, modèles de trajectoires), mais aussi de les classifier, et constituer une véritable aide à la décision.

La première étape d'un dispositif de fusion et de trajectographie est l'association temporelle des mesures issues d'une même cible aux instants successifs. En effet, dans la plupart des cas ces mesures ne sont pas discernables de celles des autres cibles. Ce problème se pose en présence de fortes densités de cibles et de nombreuses fausses alarmes. Lors de l'évaluation des performances, on peut proposer un critère de détection, fondé sur la statistique des fausses alarmes après la phase d'association. On peut aussi considérer directement le problème de l'estimation des paramètres des cibles. Contrairement au problème de trajectographie les paramètres géométriques ou cinématiques ne sont en général pas directement accessibles. (cas de mesures angulaires seules)

En présence de nombreuses cibles ou fausses alarmes, une estimation ne pourra être faite que sur un nombre très limité d'échantillons, en raison de la complexité combinatoire (exponentielle) du problème. C'est la raison pour laquelle après avoir détecté la présence de cibles, et estimé les paramètres associés

ABSTRACT

The Tracking problem, whose main function is the targets to tracks correlation, has an exponential complexity. Practical methods have thus to use approximations, and the usual notion of bound is ineffective. The general calculation of the Cramer Rao lower bound is presented, for the multitarget tracking problem, with false alarms. It can be used to measure the quality of a global estimation technique (for track initiation). we then suggest another approach, for testing the tracks filtering methods. We limit the problem to the one scan (memoryless) tracking algorithms, and show that the bound is in this case the average of the Bayesian Filter (PDAF) covariance.

aux pistes ainsi créées, on poursuit ces pistes à l'aide d'un filtrage prédictif. Soit X_k l'état de la cible à l'instant k , avec une transition d'état en général non linéaire linéaire,

$$X_{k+1} = \phi(X_k) + V_{k+1} \quad (1)$$

V_k étant un bruit blanc gaussien L'équation de mesure s'écrit

$$z_k = h(X_k) + W_k \quad (2)$$

Le problème de filtrage classique consiste alors à estimer les valeurs successives de l'état, X_k , à partir des mesures. La spécificité du problème de poursuite provient de ce que les mesures issues de la cible ne sont pas identifiées a priori. La qualité de cette estimation est le plus souvent évaluée par simulations, ce qui rend difficile une comparaison objective. On peut également étudier le comportement du filtre, par l'analyse de la variance.

Notre approche consiste à rechercher une borne inférieure pour la covariance du vecteur d'état. Dans le cas linéaire, le filtre de Kalman est la solution du maximum de vraisemblance, et est donc un estimateur asymptotiquement efficace [1]. Pour le filtrage non linéaire, on peut déterminer une borne du type Cramer Rao en supposant l'absence de bruit d'état [2].

C'est ce que nous supposons pour commencer. Dans ce cas, l'état du système est défini par son état initial, X_0 , qui est donc le paramètre x régissant le système. Le calcul de la borne de Cramer Rao pour le problème de la poursuite est présenté au paragraphe 2, dans le cas d'une ou deux cibles en présence de fausse alarme. On considère ensuite au paragraphe 3 des exemples d'utilisation de cette borne dans le cas de mesures géométriques seules, ou avec mesures complémentaires de niveau d'énergie. Enfin, on revient au paragraphe 4 sur le problème de l'estimation récursive des filtres de poursuite, et on propose un calcul de borne pour des algorithmes sans mémoire. Les simulations qui suivent permettent de montrer sur un exemple simple l'intérêt de l'approche utilisée.



2. CALCUL DE LA BORNE

On rappelle que la borne inférieure pour la variance d'un estimateur du paramètre θ s'écrit

$$V \geq (I + b') F^{-1} (I + b')^t \quad (3)$$

b étant le biais de l'estimateur, b' sa dérivée par rapport au paramètre, et F la matrice de Fisher, qui s'écrit

$$F = -E (L''(Z/\theta)) = E (L'(Z/\theta) L'(Z/\theta)^t) \quad (4)$$

avec $L(Z/\theta) = \log(p(Z/\theta))$, où p désigne la fonction de vraisemblance, et L' est le gradient de L , par rapport à θ .

On considère le cas d'une cible, et on s'intéresse à l'estimation du paramètre de la cible à partir d'un ensemble de mesures (de dimension r) $Z_k = \{z_{k,1}, \dots, z_{k,m_k}\}$ (5)

qui sont soit issues de la cible, soit des fausses alarmes, et x désigne le paramètre d'état de la cible (vecteur d'ordre M)

La variable observée est $Z^* = (Z^k, M^k)$, avec

$$Z^k = (Z_{1,1}, \dots, Z_k) \text{ et } M^k = (m_1, \dots, m_k) \quad (6)$$

L'information de Fisher de Z^* au point x_0 peut s'écrire

$$F_{x_0} = \int_Z p(Z^*/x_0) L'(Z^*/x_0) L'(Z^*/x_0)^t dZ^* \quad (7)$$

Une première remarque est que si les lois sont stationnaires, et les échantillons successifs indépendants, l'information de Fisher est additive.

Un développement Bayésien de cette expression permet d'obtenir (voir annexe)

$$F_{x_0} = P_D^2 \left[\sum_{m>0} P(m) T_1(m)/m + (m-1) T_2(m)/m \right] \quad (8)$$

où T_1 est elle-même une intégrale multiple définie par

$$T_1 = \int_Z \prod_{j \leq m} d/dx [h(z_j)] d/dx [h(z_j)]^t \frac{\prod_{j \leq m} I(z_j/H_0)}{I(Z/x, m)} dZ \quad (9)$$

$$\text{avec } h(z_j) = p(z_j/x, H_j) / p(z_j/H_0) \quad (10)$$

Le même calcul peut être mené pour le cas de plusieurs cibles. Lorsque les cibles sont éloignées ou sans interaction, l'information de Fisher globale se décompose en la somme des informations associées à chacune d'entre elles. Par contre, dans des cas de fortes densités de cibles, on peut être amené à considérer la présence simultanée de deux ou plusieurs cibles. L'expression de la matrice de Fisher dans le cas de deux cibles est fournie en annexe, sans démonstration. La difficulté principale réside alors dans le calcul numérique des intégrales. Nous abordons ce problème au paragraphe suivant. On peut en fait considérer un nombre de sources p quelconque. Le nombre de facteurs distincts est alors $p(p+1)(p+5)/6$. Lorsqu'on limite la durée des observations, le cas $p=2$, qui correspond par exemple au croisement de deux cibles, paraît suffisant. On notera que l'expression générale présentée ici fait intervenir les lois conditionnelles et s'applique donc aux cas non linéaires et non gaussiens. Dans ce qui suit, nous supposons toutefois que les lois des mesures sont gaussiennes, ce qui permet une présentation synthétique du résultat.

La borne considérée concerne l'état de la cible à un instant quelconque en l'absence de bruit de modèle. Si la transition d'état, ϕ_k , est linéaire ($X_{k+1} = A_k X_k$) et inversible, il existe une relation simple entre ces valeurs. En effet, si F est l'information de Fisher associée à X_0 , et F_k celle associée à X_k , alors

$$F_k = [C_{k,0}^{-1}]^t F C_{k,0}^{-1}, \text{ avec } C_{k,1} = A_{k-1} \dots A_{k-1} \quad (11)$$

Dans ce cas linéaire, on peut tenir compte du bruit de modèle, et on est amené à calculer la borne en un point X_1 , à partir des mesures :

$$z_k = h_k (C_{k,1} X_1 + U_{k,1}) + W_k \quad (12)$$

les z_k étant les mesures dans l'hypothèse de signal, et en posant

$$U_{k,1} = V_k + A_{k-1} V_{k-1} + \dots + A_{k-1} V_{k-1}. \quad (13)$$

Si l'équation de mesure est elle-même linéaire,

$$z_k = h_k C_{k,1} X_1 + h_k U_{k,1} + W_k \quad (14)$$

Dans ce cas, les résultats du paragraphe suivant s'appliqueront directement, en considérant que le bruit de mesure est gaussien.

3. APPLICATIONS

3.1 Cas de mesures de position

On estime la position des cibles, avec des mesures d'angle (azimut, ou azimut et site), de distance, de fréquence ou de doppler. Les mesures issues des cibles sont supposées gaussiennes, alors que les fausses alarmes sont réparties de façon uniforme dans la région d'observation, et que leur nombre suit une loi de Poisson. Dans le cas des mesures de distance, dont l'ensemble des valeurs n'est pas borné, l'utilisation de cases distance en radar ou sonar actif conduit naturellement à limiter la région observée. Il est utile de noter que la variable d'intérêt est en fait la densité (spatiale, fréquentielle...) de fausses alarmes plutôt que leur nombre total. La loi uniforme et la loi de Gauss correspondent à des entropies maximales dans les cas respectifs de supports borné et non borné. On peut montrer en outre qu'une répartition de Poisson pour le nombre de fausses alarmes est une conséquence de l'indépendance des événements (à partir du processus de Poisson, ou directement dans un formalisme probabiliste).

On suppose que z est un vecteur gaussien de covariance Γ , avec $\Gamma^{-1} = C C^t$, et de moyenne μ , et V est le volume de la région d'observation (V^{-1} est la densité de la loi des fausses alarmes).

L'intégrale T_1 de (9) peut alors s'écrire, en faisant le changement de variable $U = CY$, avec $U = (u_1, \dots, u_m)^t$, $y = z - \mu(x)$ étant l'innovation associée au vecteur de mesure z et à la moyenne $\mu(x)$

$$\text{et } \gamma = \frac{|C|}{(2\pi)^{r/2}}$$

$$T_1 = V^{-2m} \gamma^2 |C|^m (\mu'(x))^t C^{-1} \int u_1 u_1^t e^{-u_1^t u_1} (1 - P_D + P_D/m \gamma \sum_{i=1}^m e^{-u_i^t u_i})^{-1} dU \cdot (C^{-1})^t \mu'(x) \quad (15)$$

$$T_2 \text{ s'obtient en remplaçant le numérateur de l'intégrale par } u_1 u_2^t e^{-1/2 (u_1^t u_1 + u_2^t u_2)} \quad (16)$$

T_2 est l'intégrale d'une fonction impaire en u_1 et u_2 , donc $T_2 = 0$ si le domaine de variations de u_i est symétrique.

Si la matrice Γ est diagonale et a pour éléments diagonaux σ_i^2 et si le domaine de u_i est grand devant σ_i , T_1 s'écrit alors

$$T_1 = \alpha \sum_i [\mu_i'(x)^2 / \sigma_i^2] \quad (17)$$

Cette intégrale se calcule en limitant le domaine d'intégration à un ensemble borné, en effet, dans (15), la fonction intégrée est une matrice d'ordre r (dimension du vecteur mesures). Toutefois,

l'intégrale d'ordre $m-1$ (en u_2, \dots, u_m) est scalaire. Pour le calcul de la matrice de Fisher (8), les valeurs de m doivent être majorées : les éléments du reste de la série $S_n = P(m)/m T_1(m)$ sont majorés par $e^{-\lambda} \lambda^m / m! \frac{v^2}{2\pi (V/C)^{m-2}}$, avec $v = \text{Sup} (|C^{-1} \mu'_i(x)|)$ (18)

Par suite, si on limite l'erreur relative sur Γ_1 à 10^{-2} , le calcul nécessitera ($M=1$) de considérer des valeurs jusqu'à $m = 2, 3, 4$ pour $\lambda = 1, 2, 3$ (λ étant le nombre moyen des fausses alarmes).

On limite également les valeurs de λ en considérant des fenêtres étroites autour de la position centrale de la piste.

3.2 Intégration de mesures additionnelles

$z_1 = (z_{11}, z_{12})$ z_{11} : mesure de position
 $x = (x_1, x_2)$ z_{12} : mesure additionnelle (puissance du signal)

z_2 est souvent une variable gaussienne sous les hypothèses H_0 et H_1 (de moyennes μ_0 et $\mu_1(x)$, et de variance σ^2).

On suppose que la probabilité de détection est indépendante de l'état (du paramètre) de la cible. On peut alors calculer les intégrales T_1 et T_2 de (8). On obtient $T_1 = T_{11} + T_{12}$,

$$T_{11} = V^{2-m} \gamma^2 |C|^{-m} (\mu'(x) + \mu'_1(x))^t C^{-1} \int u_{11} u_{11}^t e^{-u_{11}^t u_{11}} (1-P_D + P_D/m \gamma \sum_{l=1}^m e^{(w - u_{11}^t u_{11})/2})^{-1} dU \cdot (C^{-1})^t \mu'(x) \quad (19)$$

$$\text{et } w = [u_{21} - (\mu_1(x) - \mu_0)^2 / \sigma^2]^2 - u_{21}^2 \quad (20)$$

et T_{12} est la même expression, en remplaçant $u_{11} u_{11}^t$ par $u_{21} u_{21}^t$.
 T_2 est encore nulle, si on peut supposer que le signal est très au dessus du seuil, de sorte que la loi tronquée est presque symétrique.

Le modèle considéré n'est valide que si seules les observations dépendent de la puissance de la source (x_2) alors que si on détecte sur l'énergie du signal, en mode cohérent ou non cohérent, le paramètre P_D dépend du paramètre x_2 (et du seuil s)

$$P_D = \int_{z_2 > s} p(z_2 / x_2) dz_2 \quad (21)$$

Le calcul de la borne dans ce cas est présenté en annexe.

4. BORNE SEQUENTIELLE

Le calcul de la borne globale est difficile à mener si on considère des durées d'observation importantes, car les phénomènes ne sont plus stationnaires. Si on considère la phase de poursuite, avec les méthodes usuelles de filtrage prédictif, du type filtre de Kalman avec choix déterministe des mesures [3], ou du type PDAF (Probabilistic Data Association Filter, [4]), avec une approche Bayésienne, les résultats précédents ne s'appliquent pas.

Une caractéristique commune aux deux méthodes citées est d'être des estimateurs récursifs, sans mémoire dans le sens où l'information passée est résumée dans la moyenne et la variance estimées. Pour des processus Markoviens (filtrage de Kalman linéaire), il s'agit de la forme récursive de l'estimateur optimal, ce qui n'est pas le cas en poursuite de cibles avec fausse alarme. La loi de l'état du processus, conditionné par les observations, est une loi mélange, dont les composantes sont les différentes trajectoires possibles. Dans le modèle de filtrage classique avec

bruit gaussien, il s'agit d'un mélange gaussien. Cela introduit naturellement un modèle paramétrique des observations et de l'état estimé. On considère les estimateurs \hat{X}_k de X_k , vérifiant

$$\hat{X}_k = \phi(Z_k, \hat{X}_{k-1}, \hat{P}_{k-1}) \quad (22)$$

l'hypothèse faite dans le calcul du PDAF, que la loi de l'état prédit est gaussienne correspond à maximiser l'entropie, dans la classe des estimateurs vérifiant (22). En effet, la loi de X_{k-1} sachant

$$\hat{X}_{k-1} = E(X_{k-1} / Z_{k-1}, \hat{X}_{k-2}, \hat{P}_{k-2}) \quad (23)$$

$$\text{et } \hat{P}_{k-1} = \text{VAR}(X_{k-1} / Z_{k-1}, \hat{X}_{k-2}, \hat{P}_{k-2}) \quad (24)$$

maximise l'entropie lorsqu'elle est normale, de moyenne \hat{X}_{k-1} et de variance \hat{P}_{k-1} .

Le PDA n'est toutefois pas un maximum d'entropie, car la loi des mesures est une loi mélange, et dans le cas non gaussien l'estimateur bayésien ne coïncide pas avec le maximum d'entropie. Par contre, l'état estimé est asymptotiquement du maximum de vraisemblance, lorsqu'on observe des valeurs successives de Z_k , car la moyenne du mélange est une loi symétrique monomodale, et sa covariance atteint donc la borne du problème considéré. Cette covariance est

$$P_k^* = \text{VAR}(\hat{X}_k / \hat{X}_{k-1}, \hat{P}_{k-1}) \quad (25)$$

et on montre aisément que

$$P_k^* = E(P_k) \quad (26)$$

$$\text{avec } P_k = \text{VAR}(\hat{X}_k / Z_k, \hat{X}_{k-1}, \hat{P}_{k-1}) \quad (27)$$

et s'obtient donc comme l'espérance de la covariance du PDAF, l'espérance étant prise sur Z_k .

Ce résultat est directement lié à la normalité de la loi des mesures, et n'est donc plus vérifié dans le cas non gaussien.

On peut noter que le calcul numérique de cette espérance est présenté dans [4], comme une approximation pour évaluer analytiquement les performances du filtre.

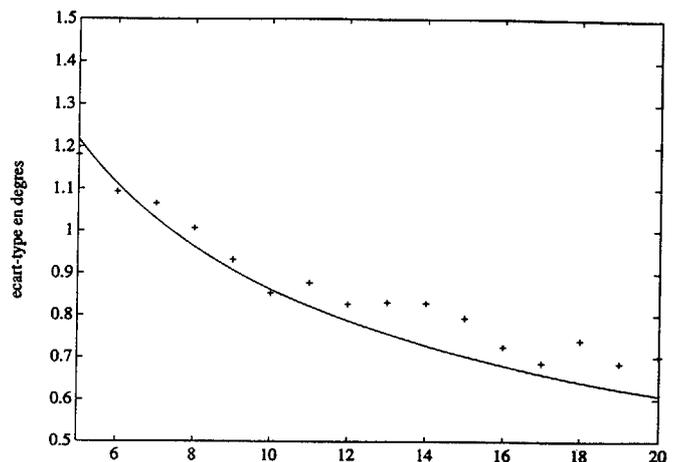
Le raisonnement peut se généraliser au cas d'une mémoire finie, mais les calculs deviennent très vite complexes.

5. SIMULATIONS

On présente le résultat de la borne globale, pour des mesures d'angle, avec un modèle de mouvement rectiligne uniforme.

Les hypothèses sont : écart type des mesures angulaires $\sigma = 1^\circ$, densité de fausses alarmes $\tau = 0,2$ par degré, $P_D = 0,9$.

On compare ce résultat avec une méthode d'initialisation de pistes décrite dans [5] (essais sur 20 tirages Monte Carlo), pour un nombre de récurrences k variant de 5 à 20. On a représenté sur la figure 1 l'écart-type sur l'estimation de la position angulaire initiale de la cible pour la borne de (8) et (9), et pour l'algorithme d'initialisation de pistes de [5] avec mesures d'angle seules.





6. CONCLUSION

Le premier résultat présenté ici concerne le calcul de la forme générale de l'information de Fisher pour le problème de poursuite de pistes en présence de fausses alarmes (une ou plusieurs pistes). L'expression générale est ensuite appliquée aux cas de mesures de positions seules, et au cas de mesures complémentaires. L'expression est identique formellement à la borne en trajectographie de [6]. Le second résultat est l'expression de la borne pour les algorithmes sans mémoire. Celle-ci établit un lien direct avec les méthodes de poursuite bayésiennes du type PDA.

7. REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier le C.E.R.D.S.M. et la D.R.E.T. pour avoir soutenu des études sur la poursuites de pistes, en collaboration avec THOMSON-SINTRAS ASM, de 1988 à 1991.

8. REFERENCES

- [1] A. Borovkov " Statistique mathématique " Editions Mir, 1986.
- [2] M. Zakai, J. Ziv " Lower and upper bounds on optimal filtering error of certain diffusion processes " *IEEE Trans. on Information Theory*, IT-18, pp 325-331, Mai 1972.
- [3] R. A. Singer, J. J. Stein " An Optimal Tracking Filter for Processing Sensor Data of Imprecisely determined origin in Surveillance Systems " *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pp 171-175, Dec 1971.
- [4] T. E. Fortmann, Y. Bar Shalom, M. Scheffe, S. Gelfand " Detection Thresholds for Tracking in Clutter - a connection between Estimation and Signal Processing " *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol 30, Mars 1985.
- [5] S. Prosperi " New Passive Tracking Algorithms using Power Information with application to Passive Sonar " *Proceedings of the IEEE int. Conf. ASSP*, Toronto, Mai 1991.
- [6] C. Jauffret, Y. Bar Shalom " Track Formation with Bearing and Frequency Measurements in the presence of False Detections " *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Nov 1990.

9. ANNEXES

A1 Calcul de la matrice de Fisher (une cible)

$$F_x = E [Q (m, Z/x)], \text{ avec}$$

$$Q (m, Z) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln p (m, Z/x) \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln p (m, Z/x) \right]^t$$

$$F_x = \sum_{m=0}^{+\infty} P (m) E [Q (Z/x, m)] = \sum_{m=0}^{+\infty} P (m) \int_Z \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_H P (H) p (Z/x, m, H) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{H'} P (H') p (Z/H') \right]^t}{p (Z/x, m)} dZ$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} P (m) \sum_{H, H'} P (H/m) P (H'/m) \int_Z \frac{\frac{\partial}{\partial x} [p (Z/x, m, H)] \frac{\partial}{\partial x} [p (Z/x, m, H')]^t}{p (Z/x, m)} dZ$$

où H, H' sont dans $\{H_0, H_1, \dots, H_m\}$, et

$$P (H_0) = 1 - P_D ; p (Z/x, m, H_0) = p_0 (Z) = \prod_{j=1}^m p_0 (z_j)$$

$$P (H_i) = P_{D/m} ; p (Z/x, m, H_i) = p_i (z_i/x, m) \prod_{j \neq i} p_0 (z_j)$$

en désignant par p_i la lois des mesures associées à la source, et par p_0 la loi des fausses alarmes.

$$\text{Par suite, } F_x = \sum_{m=0}^{+\infty} P (m) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{P_D^2}{m^2} \int_Z \frac{\frac{\partial}{\partial x} [h (z_i)] \frac{\partial}{\partial x} [h (z_j)]^t}{p (Z/x, m)} dZ, \text{ avec } h (z_i) = \frac{p_i (z_i/x, m)}{p_0 (z_i)}$$

En considérant les cas $i = j$ et $i \neq j$, on obtient (8). En outre,

$$P (m) = (1 - P_D) I (m) + P_D I (m-1),$$

où I est la loi du nombre de fausses alarmes.

A2 Matrice de Fisher dans le cas de deux cibles

$$F_x = \frac{P_{D1}^2 (1 - P_{D2}^2)}{m} [I (1,0,1,0) + (m-1) I (1,0,2,0)] + \frac{P_{D2}^2 (1 - P_{D1}^2)}{m} [I (0,1,0,1) + (m-1) I (0,1,0,2)] + 2 \frac{P_{D1} (1 - P_{D1}) P_{D2} (1 - P_{D2})}{m} [I (1,0,0,1) + (m-1) I (1,0,0,2)] + \frac{(m-1) P_{D1} (1 - P_{D1}) P_{D2}^2}{m^2} [I (1,2,0,1) + I (1,2,0,2)] + \frac{(m-1) P_{D2} (1 - P_{D2}) P_{D1}^2}{m^2} [I (1,2,1,0) + I (1,2,2,0)] + \frac{(m-1) (m-2) P_{D1}^2 P_{D2}^2}{m^3} [I (1,2,2,3) + I (1,2,3,2) + I (1,2,1,3) + I (1,2,3,1)] + \frac{(m-1) (m-2) (m-3) P_{D1}^2 P_{D2}^2}{m^3} I (1,2,3,4)$$

$$\text{avec } I (i, j, k, l) = \int_Z \frac{\frac{\partial}{\partial x} [h (z_i, z_j)] \frac{\partial}{\partial x} [h (z_k, z_l)]^t}{p (Z/x, m)} dZ$$

A3 Cas de mesures de puissance des signaux reçus

On peut reprendre le calcul de la matrice de Fisher, sans l'hypothèse que P_D est dépendant de x.

$$\frac{\partial}{\partial x} [P (H/m) p (Z/x, m, H)] = P (H/m) \frac{\partial}{\partial x} [p (Z/x, m, H)] + p (Z/x, m, H) \frac{\partial}{\partial x} [P (H/m)]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P (H_0) = -P_D, \frac{\partial}{\partial x} P (H_i) = P_{D/m} \quad (i \neq 0)$$

$$\text{et } P_D = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_2 > s} p (z_2/x_2) dz_2$$

On obtient alors pour F_x , outre le second membre de (8), deux termes supplémentaires, à savoir, I_{11} et I_{12} étant les analogues de T_1 et T_2 en remplaçant la dérivée de h par la fonction elle-même. Le premier de ces termes est :

$$\sum_{H, H'} P (H) P (H')^t \int_Z p (Z/x, m, H) p (Z/x, m, H') \cdot [p (Z/x, m)]^{-1} dZ = \left(\frac{I_{11}}{m} + \frac{(m-1) I_{12}}{m} \cdot \frac{2}{m} \int_Z \frac{h (z_1) p_0^2 (Z)}{p (Z/x, m)} + \int_Z \frac{p_0^2 (Z)}{p (Z/x, m)} \right) P_D P_D^t$$