



## Localisation passive à l'aide d'un réseau de dipôles de géométrie inconnue

*P. Forster* \*, *F. Martinerie* \*\*

\* Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue St-Martin, 75141 Paris Cedex 03, France.

\*\* THOMSON SINTRA ASM, 1 Av. A. Briand, 94117 Arcueil CEDEX

### RÉSUMÉ

Cet article présente une méthode de localisation en bande étroite à partir d'un réseau de géométrie inconnue constitué de dipôles acoustiques orthogonaux. Le traitement développé est à haute résolution. Il est basé sur l'algorithme ESPRIT-TLS, et il permet la localisation d'autant de sources qu'il y a de capteurs ainsi que l'estimation des fronts d'onde pour chacune des sources. Une étude de la robustesse de la méthode est aussi présentée, et les effets des imperfections des capteurs par rapport à leurs caractéristiques idéales sont analysés.

### I- INTRODUCTION

Le problème traité est celui de la localisation passive de sources ponctuelles à l'aide d'un réseau de capteurs dont la géométrie est pratiquement inconnue, les capteurs étant jetés "au hasard" dans une aire donnée. Le choix des capteurs n'est pas figé, mais ceux-ci doivent être simples, peu coûteux, et disponibles sur le marché. Dans le cadre de l'application envisagée, on pouvait alors penser utiliser des capteurs omnidirectionnels, ou des capteurs constitués de dipôles orthogonaux et d'un compas dont le principe est détaillé dans les paragraphes qui suivent.

Dans le cas de capteurs omnidirectionnels, une méthode de localisation passive a été développée par Vezzosi et Nicolas [1-5]. Cette méthode est uniquement applicable lorsque les sources sont à large bande et que leur nombre  $P$  est supérieur ou égal à trois et inférieur ou égal à la moitié du nombre  $N$  de capteurs. Leurs auteurs rapportent de bons résultats sur simulations pour un nombre de spectres intégrés par fréquence de l'ordre de 100, des sources à large bande sur environ une octave avec un rapport S/B allant jusqu'à -10 dB, et un nombre de sources ne dépassant par le quart du nombre de capteurs (soit moitié moins que la limite théorique de  $N/2$ ).

La méthode qui est décrite ci-dessous utilise des capteurs dipolaires. Elle est basée sur l'algorithme ESPRIT, et elle permet de s'affranchir des deux contraintes de la méthode de Vezzosi et Nicolas: il n'y a pas de restriction sur le nombre

### ABSTRACT

This paper presents a high resolution narrow band localization method from an array of unknown geometry consisting of orthogonal acoustic dipoles. It is based on the ESPRIT-TLS algorithm and it allows the localization of as many sources as sensors, together with the estimation of the associated wavefronts. A robustness study is also presented, and the effects of the sensors imperfections are analysed.

minimal de sources et celles-ci peuvent être à bande étroite. Le paragraphe II rappelle le dispositif d'antenne original de la méthode ESPRIT. Le paragraphe III développe la méthode proposée et montre comment l'algorithme ESPRIT s'applique à un réseau de dipôles orthogonaux. Le paragraphe IV étudie les performances asymptotiques, et le paragraphe V présente une analyse de la robustesse de la méthode. Le paragraphe VI donne des résultats de simulation.

### II- LE DISPOSITIF D'ANTENNE ORIGINAL DE LA METHODE ESPRIT

ESPRIT [6-7] est une méthode de localisation de sources en bande étroite à l'aide de deux sous-antennes de même géométrie dont l'une est la translattée de l'autre. La connaissance de la géométrie des sous-antennes n'est pas nécessaire à la mise en oeuvre de la méthode, mais le vecteur de translation  $\Delta$  qui permet de passer de l'une à l'autre doit être connu. Il faut noter qu'un tel réseau est pratiquement irréalisable dans le cadre de réseaux de capteurs jetés aléatoirement.

Désignons par  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  les observations en sortie des

deux sous-antennes, et par  $Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$  l'observation en

sortie de l'antenne complète. En présence de  $P$  sources ponctuelles de gisements  $\theta_1, \dots, \theta_P$  dans un bruit de fond spatialement blanc, la matrice spectrale  $\Gamma_{\text{esp}}(f)$  de  $Z(t)$  admet l'expression suivante:

$$\Gamma_{\text{esp}}(f) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Delta \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Delta \end{bmatrix}^* + \sigma \mathbf{I}, \quad (1)$$

Ce travail est soutenu par la DRET.



- où: -  $\mathbf{A}$  = matrice  $N \times P$  des vecteurs sources en sortie d'une sous-antenne;
- $\Sigma$  = matrice spectrale  $P \times P$  des sources;
- $\mathbf{A} = \text{diag}\{\exp(i\omega_1), \dots, \exp(i\omega_p)\}$  ;
- $\omega_p = 2\pi f \cos\theta_p \|\mathbf{A}\| / c$  ;
- $\sigma$  = densité spectrale de puissance (DSP) du bruit de fond.

A une fréquence donnée, les algorithmes de type ESPRIT fournissent la matrice diagonale  $\mathbf{\Lambda}$  (et par conséquent les gisements des sources) ainsi que la matrice  $\mathbf{A}$  des vecteurs sources à partir de la matrice spectrale  $\Gamma_{\text{esp}}(f)$ . La version Total Least Squares de ESPRIT (ESPRIT-TLS) fournit des estimées de  $\mathbf{\Lambda}$  et  $\mathbf{A}$  à partir d'une mesure de la matrice spectrale.

### III LA METHODE PROPOSEE

L'algorithme ESPRIT n'est pas applicable tel quel à un réseau de capteurs jetés aléatoirement (ou placés avec une mauvaise précision): en effet, on n'obtiendra jamais dans ces conditions un dispositif d'antennes constitués de deux sous-antennes dont l'une est la translatée de l'autre. L'utilisation de capteurs existants constitués de dipôles orthogonaux et d'un compas permet de remédier à ce problème. Le paragraphe III.1 décrit les capteurs utilisés, et le paragraphe III.2 montre comment ESPRIT s'applique à un réseau constitué de tels capteurs.

#### III.1 Description des capteurs utilisés

Le capteur utilisé est constitué de cinq hydrophones, dont un hydrophone omnidirectionnel au centre ainsi que quatre hydrophones directifs disposés en croix et référencés Nord, Sud, Est et Ouest (cf. Figure 1). Dans la mesure où ce capteur est jeté au hasard, le Nord du capteur n'est pas dirigé en général dans la direction du Nord magnétique. Les hydrophones des doublets Nord-Sud et Est-Ouest sont très proches de sorte que les déphasages liés à la propagation sont négligeables aux fréquences d'utilisation du capteur. Ces hydrophones ont une directivité intrinsèque en cosinus, et les deux hydrophones d'un doublet sont sommés en opposition de phase au niveau du capteur. Par conséquent, en présence d'une source dans le gisement  $\theta$  émettant un signal  $s(t)$ , l'observation bruitée en sortie des deux doublets s'écrit:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = s(t) \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{bmatrix},$$

où  $y(t)$  et  $z(t)$  désignent respectivement les sorties des doublets N-S et E-O,  $n_1(t)$  et  $n_2(t)$  le bruit de fond en sortie de ces mêmes doublets. On montre facilement que  $n_1(t)$  et  $n_2(t)$  sont décorrélés en bruit isotrope (sphérique ou circulaire).

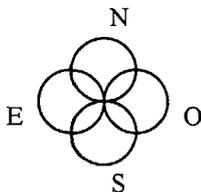


Figure 1

Le capteur comporte par ailleurs un compas qui fournit son cap  $K$  (cf. Figure 1). Grâce à cette information, celui-ci peut être orienté "électriquement" dans la direction du Nord magnétique (ou dans une direction arbitraire) en opérant une rotation d'angle  $K$  sur les données. En effet, si l'on désigne par  $\mathbf{R}(K)$  la matrice de rotation:

$$\mathbf{R}(K) = \begin{bmatrix} \cos K & -\sin K \\ \sin K & \cos K \end{bmatrix},$$

alors:

$$\mathbf{R}(K) \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = s(t) \begin{bmatrix} \cos(\theta + K) \\ \sin(\theta + K) \end{bmatrix} + \mathbf{R}(K) \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{bmatrix},$$

qui a la même structure que celle que l'on aurait si le capteur était réellement orienté dans la direction du Nord magnétique. A noter que, cette transformation étant unitaire, le bruit de fond reste décorrélé en sortie des doublets. C'est pourquoi, en sortie d'un réseau constitué de tels capteurs, on peut supposer sans nuire à la généralité que ceux-ci sont tous orientés dans la direction du Nord magnétique.

#### III-2 Localisation passive bande étroite par un réseau de géométrie inconnue constitué de dipôles orthogonaux.

La méthode proposée de localisation de sources met en oeuvre les capteurs dipolaires décrits précédemment. Elle exploite la structure particulière de la matrice spectrale, en sortie d'un réseau constitué de tels capteurs, par un algorithme de type ESPRIT.

##### III-2-1 Structure de la matrice spectrale en sortie du réseau

Considérons un réseau de  $N$  capteurs dipolaires que l'on suppose (sans nuire à la généralité) tous orientés dans la direction du Nord magnétique (cf. paragraphe III.1). Considérons alors les deux sous-antennes (notées respectivement N-S et E-O) constituées des doublets N-S et E-O (cf. Figure 2).

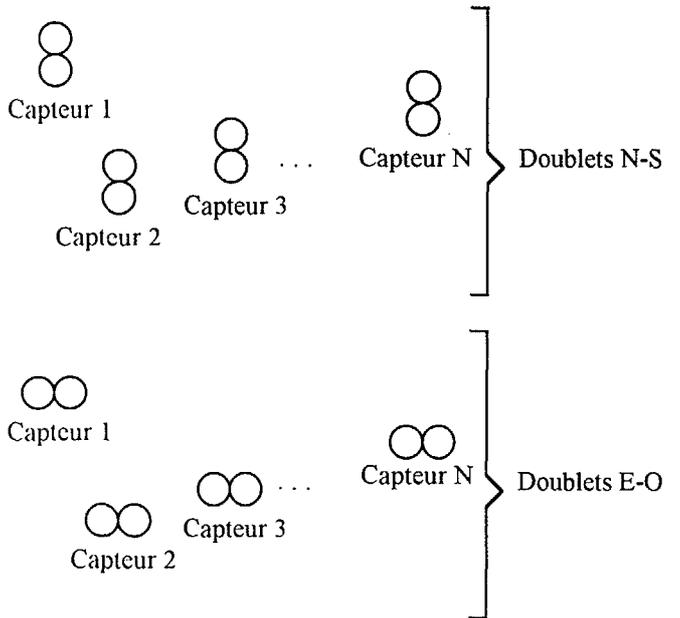


Figure 2

Ces deux sous-antennes sont physiquement au même endroit (bien qu'elles soit séparées par souci de clarté sur la figure 2) et ont bien entendu la même géométrie. A l'orientation près des doublets, qui se traduit par des puissances différentes pour les ondes reçues, ces deux sous-antennes ont donc les mêmes vecteurs sources. Posons:

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \dots, y_N(t)]^t, \quad (2-a)$$

= observation en sortie de la sous-antenne N-S,

$$\mathbf{z}(t) = [z_1(t) \dots, z_N(t)]^t, \quad (2-b)$$

= observation en sortie de la sous-antenne E-O,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix}, \quad (2-c)$$

= observation en sortie de l'antenne complète.

En présence de P sources ponctuelles en champ lointain et d'azimuts  $\theta_1, \dots, \theta_P$ , la matrice spectrale s'écrit pour un bruit spatialement blanc (ou en supposant que la distance entre capteurs est telle que le bruit est pratiquement décorrélié d'un capteur à l'autre):

$$\Gamma(f) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \Lambda_1 \\ \mathbf{A} \Lambda_2 \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} \mathbf{A} \Lambda_1 \\ \mathbf{A} \Lambda_2 \end{bmatrix}^* + \sigma \mathbf{I}, \quad (3)$$

- où: -  $\mathbf{A}$  = matrice  $N \times P$  des vecteurs sources en sortie des sous-antennes N-S et E-O;  
 -  $\Sigma$  = matrice spectrale  $P \times P$  des sources;  
 -  $\Lambda_1 = \text{diag}\{\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_P\}$  ;  
 -  $\Lambda_2 = \text{diag}\{\sin \theta_1, \dots, \sin \theta_P\}$  ;  
 -  $\sigma$  = densité spectrale de puissance (DSP) du bruit de fond en sortie d'un doublet.

On peut se ramener, par une transformation  $\mathbf{H}$  unitaire à un facteur près, à une structure connue de la matrice spectrale. Définissons la matrice  $\mathbf{H}$  d'ordre  $2N$  par:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & -i \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & i \mathbf{I}_N \end{bmatrix}, \quad (4)$$

où  $\mathbf{I}_N$  désigne la matrice identité d'ordre  $N$ .  $\mathbf{H}$  vérifie:

$$\mathbf{H} \mathbf{H}^* = 2 \mathbf{I}_{2N},$$

de sorte que  $\mathbf{H}$  est unitaire à un facteur près. Compte tenu de la structure (3) de  $\Gamma(f)$ , la matrice  $\mathbf{R}(f)$  définie par:

$$\mathbf{R}(f) = \mathbf{H} \Gamma(f) \mathbf{H}^*, \quad (5)$$

s'écrit en (redéfinissant de façon appropriée  $\Sigma$  et  $\sigma$ ):

$$\mathbf{R}(f) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \Lambda \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \Lambda \end{bmatrix}^* + \sigma \mathbf{I}, \quad (6)$$

- où: -  $\mathbf{A}$  = matrice  $N \times P$  des vecteurs sources en sortie des sous-antennes N-S et E-O;  
 -  $\Lambda = \text{diag}\{\exp(2i\theta_1), \dots, \exp(2i\theta_P)\}$  ;  
 -  $\theta_p$  = azimut de la p-ième source.

Ainsi, la structure (6) de matrice spectrale  $\mathbf{R}$  est formellement identique à celle (1) que l'on observerait en sortie du dispositif d'antenne de la méthode ESPRIT, à la définition près de la matrice diagonale  $\Lambda$ : dans un cas, les

arguments des termes diagonaux de  $\Lambda$  représentent des déphasages liés à la propagation des ondes entre les sous-antennes, dans l'autre cas ils représentent simplement les azimuts des sources. Les azimuts et les vecteurs sources associés peuvent donc être estimés en appliquant l'algorithme ESPRIT-TLS [6-7] à la matrice spectrale mesurée  $\hat{\mathbf{R}}(f)$  en sortie du réseau de dipôles (après "réalignement" des dipôles dans la direction du Nord magnétique comme indiqué au paragraphe III-1, puis transformation de la matrice spectrale mesurée  $\hat{\Gamma}(f)$  selon (5)).

Remarque: d'après l'expression de  $\Lambda$  dans (6), les azimuts ne peuvent être déterminés qu'à une ambiguïté de  $180^\circ$  près. Ce problème peut être résolu en utilisant l'ensemble de signaux fournis par le capteur, c'est-à-dire les signaux issus des doublets ainsi que ceux issus de l'hydrophone omnidirectionnel).

#### IV-PERFORMANCES ASYMPTOTIQUES DE LA METHODE

Les performances asymptotiques de ESPRIT-TLS ont été analysées dans [8]. On y montre que la méthode atteint asymptotiquement la borne de Cramer Rao sur les éléments de  $\Lambda$  (mais par sur ceux de  $\mathbf{A}$ ) pour le modèle (6) de la matrice spectrale dans lequel:

- les éléments de  $\mathbf{A}$  (matrice des vecteurs sources d'une sous-antenne) sont inconnus hormis les premiers éléments de chaque colonnes qui sont égaux à 1;
- les éléments de la matrice diagonale  $\Lambda$  (contenant l'information sur les azimuts) sont inconnus;
- les éléments de la matrice hermitienne  $\Sigma$  de corrélation des sources et la puissance  $\sigma$  du bruit de fond sont inconnus.

L'analyse des performances asymptotiques de la méthode proposée se réduit donc à l'évaluation de la borne de Cramer-Rao. On note par la suite  $\mathbf{D}$  la matrice  $2N \times P$  des vecteurs sources en sortie de l'antenne complète:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \Lambda \end{bmatrix},$$

et  $\mathbf{d}$  le vecteur source associé à l'antenne complète.

Les éléments de  $\Sigma$  et  $\sigma$  sont généralement des paramètres de nuisance dans la mesure où l'on cherche à estimer la position des sources et éventuellement les vecteurs sources associés. Soit alors  $\mathbf{g} = [g_1 \dots g_L]^t$  le vecteur contenant l'ensemble des L paramètres inconnus par source (compte non tenu des éléments de  $\Sigma$ ) et notons  $g_p$  la valeur de  $\mathbf{g}$  pour la p-ième source. Posons:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_P \end{bmatrix}, \quad (7)$$

le vecteur d'ordre PL contenant les paramètres inconnus des P sources, et notons:

$$\mathbf{D}^{(1)} = \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial g_1} \end{pmatrix}_{g_1} \dots \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial g_L} \end{pmatrix}_{g_1} \dots \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial g_1} \end{pmatrix}_{g_P} \dots \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial g_L} \end{pmatrix}_{g_P} \right]$$

la matrice  $2N \times LP$  des dérivées premières des colonnes de  $\mathbf{D}$  par rapport aux paramètres inconnus. On montre alors que la borne de Cramer Rao  $\mathbf{V}$  sur  $\mathbf{G}$  est donnée par:



$$\mathbf{v}^{-1} = \frac{2K}{\sigma} \Re \left[ \left[ \left( \Sigma + \sigma (\mathbf{D}^* \mathbf{D})^{-1} \right)^{-1} \Sigma \right]^t \otimes \mathbf{1}_L \mathbf{1}_L^t \right] \circ (\mathbf{D}^{(1)*} \Pi^\perp \mathbf{D}^{(1)}) \quad (8)$$

où : -  $\mathbf{1}_L$  est le vecteur de dimension L dont les composantes sont égales à 1;

-  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker;

-  $\circ$  désigne le produit de Hadamard;

-  $\Pi^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{D} (\mathbf{D}^* \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^*$ ;

- K désigne le nombre de spectres intégrés.

On peut alors montrer, à partir de l'expression (8) le résultat suivant.

**Résultat:** Pour des sources orthogonales (sources séparées de plus du  $2\theta_3$  du réseau), les azimuts estimés sont asymptotiquement non-corrélés. L'écart type en degrés sur

l'azimut  $\theta$  vaut  $\frac{40}{K^{1/2}} \frac{\sqrt{NS/B+1}}{NS/B}$ , où S/B est le rapport signal sur bruit de fond par dipôle (lorsque le dipôle est dirigé dans la direction de la source).

Ce résultat montre que, si l'on bénéficie bien d'un gain de N en rapport S/B, la précision de la localisation est limitée en partie par le  $\theta_3 = 40^\circ$  des capteurs dipolaires.

#### V- ROBUSTESSE DE LA METHODE

La méthode décrite au paragraphe III s'appuie sur les caractéristiques idéales des capteurs dipolaires et du compas:

- les dipôles N-S et E-O sont orthogonaux et possèdent des directivités en cosinus;
- pour chaque capteur, les signaux issus des dipôles N-S et E-O sont en phase;
- les compas des capteurs fournissent leur cap.

En pratique, ces caractéristiques idéales sont seulement approchées, et une analyse de perturbation permet d'évaluer les effets des imperfections des capteurs.

Soit  $\Delta \mathbf{R}$  l'erreur sur la matrice spectrale exacte due aux imperfections des dipôles et des compas, et  $\Delta \mathbf{G}$  l'erreur qui en résulte sur le vecteur  $\mathbf{G}$  défini par (7) contenant les PL paramètres inconnus. Alors, au premier ordre en  $\Delta \mathbf{R}$ , on a:

$$\Delta \mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}, \quad (9)$$

où : -  $\mathbf{F}$  est la matrice d'ordre L définie par:

$$2 \Re \left[ \left[ (\mathbf{D}^* \mathbf{D})^{-1} \otimes \mathbf{1}_L \mathbf{1}_L^t \right] \circ (\mathbf{D}^{(1)*} \Pi^\perp \mathbf{D}^{(1)}) \right];$$

-  $\mathbf{H}$  est le vecteur d'ordre PL de composantes:

$$H_i = 2 \Re \left[ \text{tr} \left[ \Delta \mathbf{R} \tilde{\mathbf{S}}^2 \mathbf{D} (\mathbf{D}^* \mathbf{D})^{-1} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial G_i} \Pi^\perp \right] \right];$$

-  $\tilde{\mathbf{S}}$  est la pseudo inverse la matrice signal  $\mathbf{D} \Sigma \mathbf{D}^*$ .

L'expression (9) permet ainsi de prévoir, pour des perturbations données des caractéristiques des dipôles, le biais qui en résulte sur les azimuts. Considérons par exemple les perturbations réalistes suivantes:

- les compas mesurent le Nord magnétique à  $\pm 5^\circ$  près;

- les dipôles sont orthogonaux à  $\pm 1^\circ$  près;
- le déphasage entre les signaux issus des dipôles est au plus de  $15^\circ$ ;
- l'écart de la directivité de chaque dipôle par rapport à sa valeur théorique est de  $\pm 1$ dB.

Pour une antenne de 10 capteurs, le biais qui en résulte sur l'azimut d'une source de rapport S/B variant de +20 dB à -20 dB est de l'ordre du degré.

#### VI- SIMULATIONS

L'objet de la simulation qui suit est de montrer la validité de la méthode. Elle reprend, en bande étroite avec des capteurs dipolaires et un rapport S/B plus élevé, un exemple proposé dans [3]. Le réseau comporte N=16 capteurs jetés au hasard selon une loi uniforme dans un carré de côté 40, où l'unité de longueur est la longueur d'onde à la fréquence d'échantillonnage. P=4 sources sont présentes, de gisements  $\theta_1 = 10^\circ, \theta_2 = 20^\circ, \theta_3 = 40^\circ, \theta_4 = 60^\circ$ . La fréquence normalisée du traitement vaut 0.25 et le nombre de spectres intégrés est égal à 150. Le rapport S/B par dipôle vaut -3 dB, le bruit est isotrope circulaire et la corrélation spatiale du bruit de fond est prise en compte dans la simulation (bien que le bruit soit supposé spatialement blanc dans le traitement). Les résultats du traitement montre que l'erreur quadratique moyenne estimée sur 100 tirages indépendants est égale à environ  $0.7^\circ$  pour chacune des sources.

#### VII- CONCLUSION

La localisation passive de sources à bande étroite peut être effectuée en appliquant l'algorithme ESPRIT-TLS à **une antenne de géométrie totalement inconnue** dont les capteurs comportent deux dipôles orthogonaux et un compas. Pour une antenne de 16 capteurs, un rapport S/B par dipôle et par source de -3 dB et environ 100 spectres intégrés, la précision d'estimation des azimuts est meilleure que le degré. Les résultats d'une analyse détaillée de la robustesse montrent par ailleurs que, pour des perturbations réalistes des caractéristiques des capteurs, les biais qui en résultent sur les azimuts restent faibles.

#### Références:

- [1] "Localisation de sources ponctuelles avec une antenne de géométrie inconnue", P. Nicolas et G. Vezzosi, GRETSI 85, pp. 331-337
- [2] "Estimation of phase angles from the cross-spectral matrix", G. Vezzosi, IEEE-ASSP, June 1986, pp. 405-422
- [3] "Time delay estimation using an eigenstructure based spectral method", G. Vezzosi and P. Nicolas, 25th Conf. on Decision and Control, pp. 949-952
- [4] "Extension des méthodes à haute résolution au cas d'une antenne de géométrie inconnue", G. Vezzosi, Lab. Trait. du Signal, Université de Rennes I
- [5] "Une méthode fréquentielle pour l'estimation des temps de retard. Application à la localisation de sources ponctuelles avec une antenne de géométrie inconnue", G. Vezzosi, Lab. Trait. du Signal, Université de Rennes I
- [6] "A subspace rotation approach to signal parameter estimation", A. Paulraj, R. Roy and T. Kailath, Proc. of the IEEE, July 1986, pp. 1044-1045
- [7] "ESPRIT-Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques", R. Roy and T. Kailath, IEEE-ASSP, July 1989, pp. 984-995
- [8] "Performance analysis of the total least squares ESPRIT algorithm", B. Ottersten, M. Viberg and T. Kailath, IEEE-ASSP, May 1991, pp. 1122-1135