



## REFLEXION COHERENTE ET INCOHERENTE D'UNE ONDE ACOUSTIQUE PLANE HARMONIQUE PAR UN RIDEAU DE BULLES STRATIFIE PLAN<sup>1</sup>.

François DELAVEAU\*, Michel GATULLE\*\*

\* Société AERO - 3 avenue de l'Opéra 75001 Paris - France

\*\* Commissariat à l'Énergie Atomique - Centre de Vaujours BP 7 - 77181 Courtry - France

### RÉSUMÉ

### ABSTRACT

On présente ici un modèle mathématique et numérique donnant accès aux réflexions cohérente et incohérente d'une onde acoustique harmonique par un rideau de bulles de gaz en milieu liquide.

A mathematical and numerical model is presented for the prediction of coherent and incoherent acoustic scattering from bubble layers, in a liquid medium.

Les bulles, supposées sphériques au repos mais de déformation dynamique linéaire quelconque, sont réparties en un rideau plan d'épaisseur donnée finie et d'extension latérale infinie, insonifié par une onde plane harmonique d'incidence quelconque. L'ensemble des bulles forme un système aléatoire stratifié (voir figure 1) ; la densité volumique, les positions et les tailles des bulles obéissent à une statistique donnée, dépendant a priori de l'immersion. Les champs cohérents et incohérents sont respectivement définis comme la moyenne et la variance du champ aléatoire de pression.

The bubbles are assumed to be spherical at rest, but their dynamic deformation takes into account multipolar contributions in the linear approximation. The bubble layer is plane infinite, with given thickness, and looks like a random stratified system, where bubble position and size are given by a statistical distribution, that depend of immersion only. The layer is excited by an harmonic pressure farfield .

Le modèle est établi dans les conditions les plus générales possibles, incluant en particulier le cas de fortes concentrations en gaz. Aucune hypothèse n'est faite sur l'épaisseur du rideau, ni sur l'interaction entre bulles. Toutes les déformations linéaires de celles-ci sont prises en compte, de même que les échanges de chaleur internes.

This model is developed in the greatest generality, including in particular important gaz concentrations. No hypothesis is made about the layer's thickness, neither on the process of bubbles interaction and scattering. All linear bubble deformations and multiple scattering are considered, as well as thermal conduction in the bubbles.

La méthode développée est basée sur une transformation adéquate des équations intégrales acoustiques qui utilise la configuration géométrique particulière du milieu diphasique :

The method presented in this paper introduces a mathematical transformation of the acoustic integral equation, that makes use of the particular geometrical diphasic medium configuration. The observation is "delocalized" in a plane parallel to the layer and introduces natural collective contributions of bubbles at each immersion, without any physical approximation.

Cette transformation fait apparaître des comportements collectifs des bulles de même immersion. Grâce à une hypothèse d'ergodicité sur la statistique des bulles du rideau, les propriétés diffusantes du rideau sont caractérisées par des fonctions dépendant de la seule immersion, et les grandeurs qui caractérisent le champ aléatoire réfléchi ne dépendent que de l'immersion du point d'observation, sans approximation d'ordre physique.

After this transformation, coherent and incoherent acoustic pressure waves are obtained in the form of a statistical integral equation on the thickness of the layer.

A l'issue de cette transformation, les champs cohérent et incohérent réfléchis sont donnés par la résolution d'équations intégrales portant sur l'immersion.

The general model is presented in the present paper, then we give the mathematical formulas for the coherent and incoherent reflexion coefficient. Numerical results are presented. We show that the present formalism gives the same coherent reflexion coefficient as the coherent reflexion coefficient given by Foldy's formalism, as soon as monopolar diffusion only is considered for bubbles.

On présente le cadre de la modélisation puis l'obtention des coefficients de réflexion cohérent et incohérent. On donne les résultats de quelques simulations numériques. Pour ce qui concerne le champ cohérent, on établit l'équivalence entre le formalisme de Foldy et le formalisme présenté lorsque la seule diffusion monopolaire des bulles est prise en compte.

<sup>1</sup> Travail réalisé sous contrat DRET n° 89/476



### 1. INTRODUCTION

On sait depuis plus d'un siècle que la présence de bulles de gaz en milieu liquide perturbe de manière importante la propagation des ondes acoustiques. Par ailleurs, l'étude de la propagation des ondes acoustiques en milieu diphasique a suscité de nombreuses recherches et expérimentations ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [11] etc.)

Une méthode souvent utilisée pour étudier les caractéristiques de la propagation en milieu diphasique consiste à rechercher des propriétés locales cohérentes équivalentes du milieu inhomogène supposé infini (voir par exemple [6], [7]). En général ces méthodes plus ou moins élaborées d'homogénéisation introduisent un certain nombre d'hypothèses ou approximations permettant de mener à bien les calculs. La validité théorique de ces approximations n'est cependant pas toujours facile à établir tant pour la propagation cohérente que la propagation incohérente. La démarche effectuée ici est radicalement différente, et utilise la géométrie particulière du problème et l'invariance statistique par translation parallèle au rideau.

La modélisation se place dans le cadre général suivant :

- les bulles sont situées dans un rideau plan, d'extension latérale infinie et d'épaisseur h donnée,
- elles sont supposées sphériques au repos, mais leur déformation dynamique, linéaire, est a priori quelconque (aucun effet non linéaire n'est pris en compte),
- leur densité volumique est quelconque sauf pour certaines simplifications dans le calcul du champ incohérent, et leur nombre, leurs positions et leurs rayons sont des quantités aléatoires de loi de probabilité donnée, fonctions de la seule immersion (cote z dans l'épaisseur du rideau),
- le rideau est insoné par une onde acoustique plane harmonique à la pulsation ω (onde d'extension infinie) d'incidence quelconque (cf figure 1), le rideau de bulles est supposé entièrement immergé : la présence d'un éventuel dioptre air/liquide en-deçà duquel se situerait le rideau de bulles est ainsi "oubliée", mais cette simplification n'est pas déterminante dans l'élaboration du modèle.

Le modèle développé ici donne accès au champ réfléchi par le rideau, champ constitué d'une composante cohérente (moyenne du champ aléatoire de pression, contenant les effets de phase entre les contributions des diffuseurs) et d'une composante "incohérente" (écart type du champ aléatoire de pression). Ces champs sont caractérisés sur un plan parallèle au plan du rideau (cf. figure 1) et hors de celui-ci.

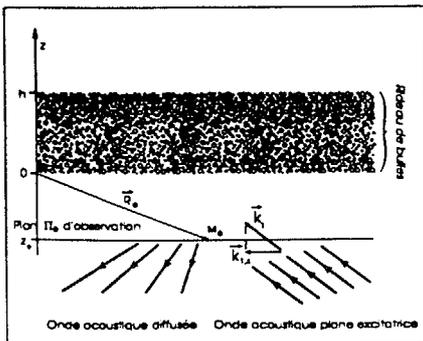


Figure 1

La dynamique de chaque bulle est décrite de manière équivalente à celle employée par exemple en [1], elle tient compte des échanges de chaleur dans le gaz (analyse thermodynamique complète) et de la tension superficielle à l'interface entre le gaz et le liquide ambiant. On utilise ainsi l'équation de continuité, l'équation d'Euler, une équation d'état et une équation thermique linéarisées pour chaque milieu, ainsi que l'équation de Laplace pour le raccordement à l'interface eau/gaz. La modélisation ignore les effets visqueux, qui pourraient être introduits sans difficulté majeure.

### 2. DIFFUSION D'UNE BULLE

Les grandeurs physiques externes (i.e dans le fluide) et internes (i.e dans le gaz), de déplacement normal à la surface de chaque bulle sont décomposés en harmoniques sphériques centrées sur la bulle : ceci conduit par exemple pour la pression

$$à une écriture du type P_l(\vec{r}) - P_0 = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=-n}^n p_n^m(l). X_n^m(\vec{r}),$$

P<sub>0</sub> étant la pression à l'équilibre,  $\vec{r}$  le vecteur entre le point d'observation M et le centre de la bulle d'indice l, et  $X_n^m(\vec{r})$  l'harmonique sphérique d'indices n,m (cf [9]). Après élimination de certaines variables (composantes sphériques de p et T), on montre que les composantes sphériques de la pression interne (resp. externe) à chaque bulle sont reliées à chaque ordre sphérique n avec celles de la vitesse normale par un coefficient multiplicatif  ${}^i\beta_n$  (resp.  ${}^e\beta_n$ ) de transfert multipolaire "interne" (resp. "externe"). Ces deux relations de transfert contiennent toute l'information sur la dynamique intrinsèque de la bulle<sup>1</sup>. Ces relations s'écrivent<sup>2</sup> :

$$\text{pour } -n \leq m \leq n \quad {}^i\beta_n = \frac{{}^i u_n^m(a)}{{}^i p_n^m(a)}, \quad {}^e\beta_n(a) = \frac{{}^e u_n^m(a)}{{}^e p_n^m(a)} \quad (1)$$

$${}^i\beta_n = \frac{(\gamma_2 - 1)\chi_2 \omega}{Z_2 c_2^2} \left[ \frac{x_q j_{n+1}(x_q)}{x_1 j_n(x_q)} + i \left( \frac{x_1}{2n+3} - \frac{n}{x_2'} \right) \right] \quad (2)$$

$${}^e\beta_n(a) = \frac{{}^i\beta_n}{1 - [2 - n(n+1)] {}^i\beta_n \sigma / (i\omega a^2)} \quad (3)$$

### 3. DIFFUSION DU RIDEAU STRATIFIE

A l'aide des relations ci-dessus et en utilisant en équations intégrales classiques de l'acoustique harmonique, on montre alors que le champ de pression en tout point est caractérisé par

<sup>1</sup> Dans [1], Prosperetti considère la seule diffusion monopolaire (les bulles vibrent en restant sphériques). Si l'on ne retient que le transfert monopolaire (m = n = 0), la modélisation adoptée ici est tout à fait équivalente à la viscosité près.

<sup>2</sup> l'indice 1 se rapporte au fluide extérieur, l'indice 2 au gaz, c<sub>1</sub> et c<sub>2</sub> désignent la célérité du son dans l'eau et dans le gaz,  $\vec{k}_1$  désigne le nombre d'onde incident, k<sub>1</sub> = ω/c<sub>1</sub> son module, k<sub>2</sub> = ω/c<sub>2</sub> le module du nombre d'onde dans le gaz j<sub>n</sub> désigne la fonction de Bessel sphérique d'ordre n, σ désigne la tension superficielle, ω la pulsation, a le rayon de la bulle considérée, Z<sub>1</sub> et Z<sub>2</sub> sont les impédances acoustiques (adiabatiques) du liquide et du gaz ; x<sub>1</sub> = k<sub>1</sub>a, x<sub>2</sub> = k<sub>2</sub>a, x<sub>q</sub> = k<sub>q</sub>a, avec k<sub>q</sub> = e<sup>iπ/4</sup>(ω/χ<sub>2</sub>)<sup>1/2</sup>. χ<sub>2</sub> et γ<sub>2</sub> = C<sub>p</sub>/C<sub>v</sub> se rapportent au gaz et sont respectivement la diffusivité thermique et le rapport des capacités calorifiques à pression et volume constant.

les valeurs des composantes de la décomposition sphérique de pression sur les bulles<sup>3</sup> :

$$P_d(\vec{R}_0) = \sum_{\text{bulles } l} \sum_{\substack{n \geq 0 \\ m = -n, \dots, n}} x_1(l) {}^3Z_n^m(k_1 \vec{r}_l) p_n^m(l) \quad (4)$$

$$[i j_n(x_1(l)) + Z_1 \beta_n^m(l) j_n(x_1(l))]$$

Enfin, en faisant tendre le point d'observation  $M_0$  vers chaque bulle  $l_0$  du rideau, on obtient à l'aide de l'expression ci-dessus un système linéaire vérifié par les composantes sphériques  $p_n^m(l)$  de la pression sur chaque bulle  $l$  (le nombre de composantes sphériques et le nombre de bulles sont infinis). Ce système est écrit ci-dessous sous une forme condensée (pour toute bulle  $l_0$  et tout couples  $(n,m)$  ;  $n \geq 0, -n \leq m \leq n$ )

$$\sum_{\text{bulles } l} \sum_{\substack{p \geq 0, \\ q = -p, p}} M_{np}^{mq}(l, l_0) p_p^q(l) = p_0 S_n^m(l_0) \quad (5)$$

$M_{np}^{mq}(l, l_0)$  contient le coefficient de transfert  $\epsilon \beta_{n,l}$  de la bulle  $l$ , les propriétés diffusantes des bulles  $l$  et  $l_0$ , les couplages entre les bulles  $l$  et  $l_0$  et rend compte des phénomènes de diffusion multiple, tandis que  $S_n^m(l_0)$  fait intervenir les propriétés diffusantes de la bulle  $l_0$ .

#### 4. TRAITEMENT STATISTIQUE

Si les équations ci-dessus résolvent formellement le problème posé, il convient maintenant d'effectuer un traitement statistique susceptible de donner directement accès aux diffusions cohérentes et incohérentes réfléchies. La méthode de résolution adoptée ici est étroitement liée à la structure géométrique et statistique du rideau de bulles, et met à profit une hypothèse d'ergodicité qui peut s'énoncer ainsi :

"Considérer toutes les configurations possibles des bulles (en position et en taille) en un point  $M$  fixé du plan  $\Pi$  (extérieur au rideau) équivaut à observer un rideau de configuration donnée mais aléatoire (suivant les lois de probabilité suivie par les positions et les rayons au repos des bulles) à partir de tous les points  $M$  de ce même plan  $\Pi$ ".

Cette délocalisation de l'observation du champ diffusé est la clé du problème et suggère de manière naturelle l'utilisation de la transformée de Fourier spatiale bidimensionnelle dans tout plan parallèle au plan du rideau<sup>4</sup>. Ceci conduit de manière

<sup>3</sup>  ${}^3Z_n^m$  désigne l'harmonique sphérique scalaire ondulatoire de Hankel première espèce (voir [9]),  $\vec{R}_0$  désigne le vecteur entre le point d'origine  $O$  et le point d'observation  $M_0$ . Toutes les autres quantités se rapportent à la bulle  $l$  :  $\vec{r}_l$  désigne le vecteur entre le centre de la bulle  $l$  et le point d'observation  $M_0$ ,  $a_l$  le rayon de la bulle  $l$ , et  $x_1(l) = k_1 a_l$  etc.

<sup>4</sup> Cette approche présente certaines similarités avec les développements effectués par Rino [10],[11], mais la décomposition de Fourier bidimensionnelle des champs acoustiques n'est effectuée ici qu'à l'extérieur du rideau, aucun diffuseur ne devant être coupé par le plan d'observation : notre démarche diffère ainsi de celle proposée par Rino, en conduisant à une résolution globale du problème qui ne nécessite pas l'introduction d'opérateurs de diffusion de Fourier au sein du rideau.

naturelle à un réarrangement formel des bulles qui fait apparaître que le rideau réagit couche par couche, et non plus bulle par bulle. De plus, cette hypothèse d'ergodicité permet d'accéder par des intégrations spatiales aux moments d'ordre 1 et 2 des grandeurs aléatoires qui traduisent le comportement statistique collectif des "bulles d'une même couche". A partir de la formulation (4) du champ de pression, un raisonnement infinitésimal permet d'obtenir chacune de ces composantes de Fourier bidimensionnelles sous la forme d'intégrale de fonctions inconnues, qui contiennent les contributions collectives (cohérente ou incohérente) de l'ensemble -aléatoire- des bulles dont les centres sont dans une couche d'épaisseur infinitésimale  $\delta h$  caractérisée par sa cote  $z$  dans le rideau. Ces fonctions vérifient elles-mêmes deux équations intégrales (couplées) sur l'immersion  $z$ , obtenues à partir du système linéaire (5) et les réarrangements des bulles mentionnés plus haut. Dans ces réarrangements il apparaît que chaque composante de Fourier bidimensionnelle de la pression diffusée sur le plan d'observation  $\Pi_0$  (et plus généralement chaque composante de Fourier d'une grandeur physique caractérisant la diffusion d'une couche) s'écrit sous la forme générale suivante ( $\vec{k}_{1x}$  est la projection de  $\vec{k}_1$  sur  $\Pi_0$ ,  $\vec{K}$  est la variable de Fourier parallèle à  $\Pi_0$ ) :

$$P_d(\vec{K}, M_0) = 4. \pi^2 P_{dc}(\vec{k}_{1x}, z_0) \delta(\vec{K} - \vec{k}_{1x}) + D(\vec{K}, z_0) \quad (6)$$

L'écriture (6), classique dans l'étude de la réflexion par des structures planes aléatoires traduit, d'une part la cristallisation d'une partie de l'énergie réfléchi sur la composante spectrale  $P_{dc}(\vec{k}_{1x}, M_0)$  (composante cohérente), conformément aux lois de Descartes, et d'autre part l'existence d'une énergie diffuse répartie continûment sur toutes les composantes du spectre spatial (composante incohérente).

Les équations intégrales stochastiques portant sur les fonctions inconnues se scindent ainsi en deux après l'introduction des moments des grandeurs aléatoires caractérisant la diffusion des couches du rideau. Les expressions complètes sont complexes mais pour la contribution monopolaire des bulles, prépondérante dans nos applications (le taux d'air étant faible), on obtient les coefficients de réflexion cohérent et incohérent<sup>5</sup> sous une forme se prêtant à une analyse physique :

$$R_c(z_0) = \frac{2\pi}{k_1 k_{1x}} \int_{z=0}^h e^{ik_{1x}(z-z_0)} A(z) dz \quad (7)$$

$$[R_i(z_0)]^2 = \frac{1}{2\pi k_1 k_{1x}} \int_{z=0}^h \frac{\langle |\alpha(z)|^2 \rangle}{n(z) \langle \alpha(z) \rangle^2} |A(z)|^2 dz \quad (8)$$

$n(z)$  est la densité des bulles à la cote  $z$ ,  $\alpha(z)$  caractérise la diffusion des bulles à la cote  $z$ , et  $A(z)$  est obtenue par la résolution d'une équation intégrale en immersion, non reproduite ici, dans laquelle interviennent des noyaux où apparaissent les propriétés diffusantes moyennes des bulles situées à la cote  $z$ , notamment la transmission et la rétrodiffusion des bulles d'une même couche. Dans le cas pratique ou les propriétés diffusantes des couches sont lentement variables avec l'immersion (devant le champ lui-

<sup>5</sup> On montre en écrivant le vecteur de Pointing que l'énergie totale diffusée par le rideau, traversant une surface unité à la cote  $z_0$ , est la somme de deux contributions, l'une cohérente et l'autre incohérente. Le coefficient de réflexion cohérent (resp. incohérent) est défini comme le rapport entre l'énergie cohérente (resp. incohérente) et l'énergie incidente traversant cette surface.



même, qui est très rapidement atténué),  $A(z)$  et le champ de pression cohérent vérifient une équation différentielle du type Helmholtz avec un nombre d'ondes équivalent identique à celui obtenu par Foldy [6]. Enfin, la formule (8) montre que dans le cas de contributions monopolaires seules, la contribution incohérente au champ diffusé par une bulle dépend de la seule excitation cohérente. La résolution est ensuite numérique (voir les figures illustratives ci-dessous pour des bulles identiques de rayon  $a=110 \mu\text{m}$  — résonance monopolaire des bulles environ à 30 kHz, un rideau de hauteur  $h=0,1\text{m}$ , et un taux d'air de 0,01%).

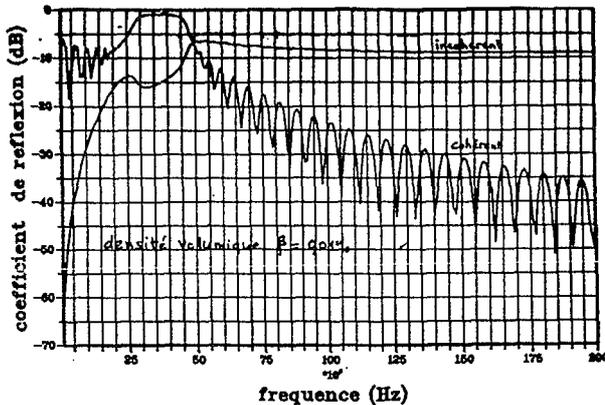


figure 2 : Variation fréquentielle des coefficients de réflexion cohérent et incohérent (incidence normale).

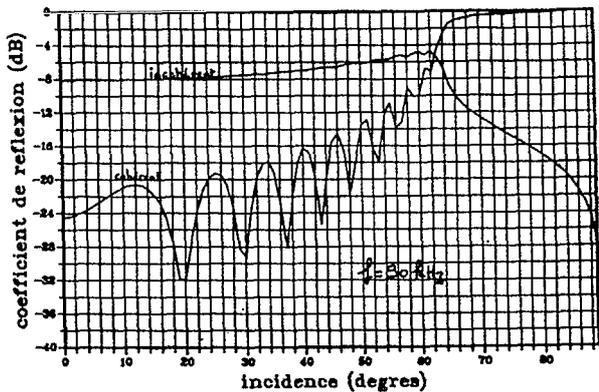


figure 3 : Variation angulaire des coefficients de réflexion (loin de la résonance monopolaire)

L'analyse des formules et des résultats numériques montre que :

1. La réflexion cohérente obtenue avec les contributions multipolaires est numériquement identique à celle que donne le formalisme de Foldy (théorie de milieu effectif), malgré les hypothèses restrictives inhérentes à l'élaboration de ce dernier. Ce point a été confirmé analytiquement lorsque seule la diffusion monopolaire est prise en compte. Il semble donc que les contributions aux ordres  $n \geq 1$  (qui sont en bande étroite) puissent être négligées: même avec de fortes densités de bulles, les monopoles seuls suffisent à rendre compte de la réflexion cohérente quasi totale (leurs effets en bande large s'accroissent avec le taux d'air).

2. Les coefficients de réflexions cohérent et incohérent sont finis. Par ailleurs, la variance du champ de pression a été évaluée et présente une dépendance logarithmique en fonction de la surface insonée.

3. L'onde incidente pénètre très peu dans le rideau.

4. Le rapport entre énergie cohérente et énergie incohérente réfléchies est fonction de la fréquence et de l'angle d'insonation : la comparaison d'un modèle théorique avec des résultats expérimentaux (par exemple ceux figurant en [8]) doit donc être effectuée avec précautions.

## 5. CONCLUSIONS - PERSPECTIVES

Le point clé du présent modèle est l'invariance statistique de la répartition des diffuseurs au moins localement sur une direction. Il peut être étendu à des configurations plus réalistes :

- . introduction d'un dioptre (même rugueux),
- . autres formes de diffuseurs (au moyen de l'introduction d'une matrice de diffusion non diagonale)
- . autres formes de nuages de diffuseurs,
- . insonation bornée,
- . matrice solide,
- . ondes électromagnétiques ou optiques (peintures, SER radar etc.).

Le modèle permet le calcul des énergies transmises, une compréhension fine des mécanismes de diffusion multiple et enfin des comparaisons avec les résultats d'expérimentations calibrées.

## Références :

- [1] A. PROSPERETTI, L.A. CRUM, K.W. COMMANDER : Non linear bubble dynamics. JASA Vol. 83 n° 2 p. 502 (1988).
- [2] A.J. RUDGERS : Analysis of thermoacoustic wave propagation in elastic media. JASA Vol. 88 n° 2 p. 1078 (1990).
- [3] Etude d'un revêtement de masquage à inclusions sphériques. Etude DRET/G6, marché 89/351, rapport final AERO PA/1692 (avril 1990).
- [4] M. LAX : Multiple scattering of waves. Reviews of Modern Physics. Vol. 23 n° 4 p. 287 (1951).
- [5] M. LAX : Multiple scattering of waves. II : the effective field in dense systems. Physical Review. Vol. 85 n° 4 p. 621 (1952).
- [6] L.L. FOLDY : The multiple scattering of waves. I : General Theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. Physical Review. Vol. 67 n° 3 et 4 p. 107 (1945).
- [7] Y. GERVAIS : La génération du bruit par conduction thermique, II Emission des sources multipolaires. Acustica. Vol 70 p. 247-257 (1990).
- [8] O. GERARD : Propagation acoustique dans un milieu diphasique eau-bulles d'air. Facteurs de réflexion et de transmission d'un rideau de bulles. Thèse de l'Université d'Aix-Marseille II - 1991.
- [9] L. ROBIN : Fonctions sphériques de LEGENDRE et fonctions sphéroïdales (tome 1, 2 et 3). GAUTHIER-VILLARS (1957).
- [10] C.L. RINO, H.D. NGO, K.A. HAYCOCK : A spectral Domain method for multiple Scattering in discrete random media. IEEE Transaction on antennas and propagation vol 38 n°7 Juillet 1990.
- [11] C.L. RINO, H.D. NGO : Low frequency acoustic scatter from subsurface bubble clouds. JASA Vol 90 n°1 Juillet 1991.