



ESTIMATION DOPPLER RADAR NON AMBIGUË

A. Ferrari[†], C. Bérenguer[†], M. Artaud[‡]

[†] Laboratoire d'Informatique, Signaux & Systèmes - URA CNRS 1376
 Université de Nice-Sophia Antipolis - 41, Bd Napoléon III - 06041 Nice cedex
[‡] CTSN/LSA - DCN - B.P. 28 - 83800 Toulon Naval

RÉSUMÉ

ABSTRACT

Cette communication étudie l'estimation non ambiguë de la vitesse radiale des cibles détectées par un radar à impulsions cohérent. La solution proposée utilise des rafales successives à fréquence de répétition variable. Un choix particulier de ces fréquences conduit à la dérivation d'un algorithme permettant une détermination rapide du repliement de la fréquence Doppler. Une analyse théorique et par simulations des performances de l'estimation du rang d'ambiguïté en fonction de la variance sur la fréquence repliée permet enfin de valider la solution proposée.

This paper deals with non-ambiguous estimation of Doppler radial velocity in a coherent pulsed radar. The proposed solution uses bursts with multiple pulse repetition frequencies. A particular choice of these frequencies allows the derivation of an algorithm performing a fast Doppler ambiguity order estimation. A theoretical and simulation performance analysis of the estimated ambiguity order as a function of the folded frequency variance validates the solution.

1. INTRODUCTION

Dans un radar de veille Doppler à impulsions, l'estimation de la vitesse radiale d'une cible constitue un paramètre important pouvant faciliter les traitements attachés au radar. Malheureusement, cette quantité entrant en compétition avec l'ambiguïté en distance du radar, est généralement estimée de façon repliée. La solution consiste alors à utiliser des fréquences de répétition variables, [3].

La structure choisie, dans cette communication, est celle de rafales successives à fréquence de répétition variable. Les objectifs fixés sont de proposer une méthode pouvant s'appliquer à un nombre quelconque de rafales afin, entre autre, de pouvoir s'affranchir du problème de blocs aveugles introduits par l'élimination du fouillis en utilisant un nombre important de rafales et d'utiliser un algorithme rapide et performant de lever d'ambiguïté qui ne fasse pas appel à des procédures complexes de mise en correspondance.

2. ESTIMATION DU DOPPLER

2.1. Modèle du signal

Considérons un radar émettant des rafales de n_p impulsions chacune avec une fréquence de répétition pour chaque rafale que nous noterons dans la suite $F_r(k)$. La période entre deux impulsions successives pour la rafale numéro k est noté $T_r(k) = 1/F_r(k)$. Nous supposons également, dans le but de simplifier les calculs, que l'intervalle séparant la dernière impulsion de la rafale k et la première de la rafale $k+1$ est égal à $T_r(k)$. Dans toute la suite, nous supposons que la

période du bloc numéro k vérifie l'égalité suivante:

$$T_r(k) = \frac{N(k) + 1}{N(k)} \cdot T_r \quad (1)$$

où $N(k)$ désigne une suite périodique d'entiers vérifiant:

$$N(2p + 1) : \text{ est un entier positif} \quad (2)$$

$$N(2p + 2) = -N(2p + 1) \quad (3)$$

Compte tenu de la symétrie des fréquences de répétition autour de $F_r = 1/T_r$, la valeur de ce paramètre peut être choisi de façon à éviter toute ambiguïté en distance. Afin de simplifier les calculs, T_r sera choisi égal à 1.

Nous considérerons également que, compte tenu de la largeur du faisceau de l'antenne, une cible apparaît sur, au moins, $2.N_b$ rafales consécutives. On peut remarquer que, compte tenu des équations (1-3), le temps d'observation de la cible est indépendant des $N(k)$ et est égal à $2.n_p.N_b.T_r$. La période de $N(2p + 1)$ étant alors choisie égale à N_b , nous ferons l'hypothèse, sans perte de généralité, que la cible est présente sur les $2N_b$ rafales définies par les entiers $N(1), \dots, N(2.N_b - 1)$ et que:

$$N(1) < N(3) < \dots < N(2.N_b - 1) \quad (4)$$

Après démodulation cohérente, l'échantillon numéro n ($n = 0, \dots, n_p - 1$), du bloc k ($k = 1, \dots, 2N_b$) est alors modélisé par:

$$y_n^k = x_n^k + b_n^k = a_k(f_D) \cdot \exp(j.2\pi.f_D.n.Te(k)) + b_n^k \quad (5)$$

où le terme b_n^k représente un bruit blanc issu du bruit thermique et du résidu de fouillis. Dans l'expression de x_n^k , le terme $a_k(f_D)$ représente la phase initiale du signal réfléchi



par la cible sur le bloc numéro k . En notant $A = a_1(f_D)$ l'amplitude complexe initiale, ce terme s'écrit, pour $k \geq 2$:

$$a_k(f_D) = A \cdot \exp(j.2\pi n_p . f_D) \cdot \sum_{q=1}^{k-1} T_r(k) \quad (6)$$

Décomposons maintenant f_D sous la forme suivante:

$$f_D = f_r + n_r \quad (7)$$

où n_r représente la partie entière de f_D . Compte tenu de cette notation et des égalités(1,3), on montre que:

$$x_n^k = a_k(f_r, n_r) \cdot \exp(j.2\pi . (f_r + \frac{f_D}{N(k)}) . n) \quad (8)$$

avec:

$$a_{2p+1}(f_r, n_r) = A \cdot \exp(j.2.\pi f_r n_p . 2p) \quad (9)$$

$$a_{2p+2}(f_r, n_r) = A \cdot \exp(j.2\pi f_r n_p . (2p + 1)) \cdot \exp(j.2\pi f_D . n_p / N(2p + 1)) \quad (10)$$

Notons enfin f_k la fréquence "apparente" du signal sur le bloc k . Compte tenu de (8), cette fréquence est égale à:

$$f_{2p+1} = f_r + f_D / N(2p + 1) \quad (11)$$

$$f_{2p+2} = f_r - f_D / N(2p + 1) \quad (12)$$

L'algorithme d'estimation proposé se décompose alors en deux étapes. La première consiste dans l'estimation de la fréquence f_r à partir de l'estimation de la fréquence réduite réalisée sur chacun des blocs du signal. Cette quantité est ensuite utilisée dans la seconde étape pour aboutir à une estimation de n_r .

2.2. Estimation de la fréquence réduite

D'après (11,12), la fréquence f_r est égale à la moyenne de f_{2p+1} et f_{2p+2} . Cette solution n'est cependant pas directement exploitable pour estimer f_r dans la mesure où, f_k pouvant être de module supérieur à 1, seule une valeur repliée de cette quantité peut être estimée. Nous noterons, de la même façon que pour f_D dans (7), $f_{k,r}$ la valeur repliée associée à f_k . Le problème va donc consister à relier f_r à $f_{2p+1,r}$ et $f_{2p+2,r}$. Considérons pour cela la valeur absolue de l'écart entre f_{2p+1} et f_{2p+2} :

$$|f_{2p+1} - f_{2p+2}| = 2 \cdot |f_D| / N(2p + 1) \quad (13)$$

Nous allons, par l'intermédiaire de $N(2p + 1)$, imposer à cet écart d'être toujours inférieur à $1/2$. En majorant $|f_D|$ par $1 + |n_r|$, ceci revient, compte tenu de (4), à imposer la contrainte suivante sur l'entier $N(1)$:

$$N(1) > 4(1 + n_{max}) \quad (14)$$

où n_{max} désigne la valeur absolue du nombre maximum de repliements que l'on cherche à estimer. Sous cette hypothèse, la différence du nombre de repliements pouvant exister entre f_{2p+1} et f_{2p+2} est alors au plus égale à 1. Supposons donc que l'on a, par exemple, $f_{2p+2,r} < f_{2p+1,r}$. On a alors:

- Si $f_{2p+1,r} - f_{2p+2,r} \leq 1/2$: $f_r = (f_{2p+1,r} + f_{2p+2,r})/2$

- Si $f_{2p+1,r} - f_{2p+2,r} \leq 1/2$ et $1 - f_{2p+1,r} < f_{2p+2,r}$:
 $f_r = (f_{2p+2,r} + f_{2p+1,r})/2 - 1/2$
- Si $f_{2p+1,r} - f_{2p+2,r} \leq 1/2$ et $1 - f_{2p+1,r} \geq f_{2p+2,r}$:
 $f_r = (f_{2p+2,r} + f_{2p+1,r})/2 + 1/2$

Nous désignerons dans la suite la valeur f_r obtenue à partir des valeurs repliées de $f_{2p+1,r}$ et $f_{2p+2,r}$ comme étant le centroïde des fréquences $(f_{2p+1,r}, f_{2p+2,r})$.

En pratique, on ne dispose que de valeurs estimées des fréquences $f_{k,r}$, notées $\hat{f}_{k,r}$, pour chaque bloc. On estimera alors f_r par:

$$\hat{f}_r = \frac{1}{N_b} \sum_{p=0}^{N_b-1} \text{centroïde}(\hat{f}_{2p+1,r}, \hat{f}_{2p+2,r}) \quad (15)$$

2.3. Levée de l'ambiguïté

Sous l'hypothèse de bruit blanc gaussien, l'extension, à partir du cas classique des signaux échantillonnés uniformément, du critère d'estimation par maximum de vraisemblance, [2], de la fréquence f_D est immédiate. On montre en effet que cette quantité, ou de façon équivalente l'estimation du couple (f_r, n_r) , est le maximiseur global de la fonction définie par:

$$L(f, n) = \left| \sum_{k=1}^{2N_b} \alpha_k^*(f, n) \cdot \sum_{q=0}^{n_p-1} y_q^k \cdot \exp(-j.2\pi . f . T_r(k) . q) \cdot \exp(-j.2.\pi . n / N(k)) \cdot q \right|^2 \quad (16)$$

où $\alpha_k^*(f, n)$ est donné, d'après les équations (9,10), par:

$$\alpha_{2p+1}(f, n) = \exp(j.2.\pi f n_p . 2p) \quad (17)$$

$$\alpha_{2p+2}(f, n) = \exp(j.2\pi f n_p . (2p + 1 + 1/N(2p + 1))) \cdot \exp(j.2\pi n_p . n / N(2p + 1)) \quad (18)$$

Considérons maintenant une valeur de $f = f_0$ fixée. Compte tenu de la contrainte (4) et en imposant $|n| < N(2p + 1)$, le terme $2p + 1$ de la somme (16) est égal, au n -ème point de la FFT du signal y_n^k , modulé par $\exp(-j.2\pi . f_0 . T_r(2p + 1) . q)$, et étendu de n_p à $N(2p + 1)$ points par des zéros. Le terme $2p + 2$ de cette somme s'obtient par la FFT inverse de ce même signal. Notons que la contrainte $|n| < N(2p + 1)$ est toujours vérifiée dès que l'on a (14).

Les valeurs de $L(f_0, n)$ sont ensuite obtenues en sommant ces fonctions fenêtrées par la constante définie par $\alpha_{2p+1}(f_0, n)$ pour les termes impairs et par le sinus complexe défini par $\alpha_{2p+2}(f_0, n)$ pour les termes pairs.

Compte tenu de ce résultat, la solution adoptée consiste à choisir comme estimée de n_r , que nous noterons dans la suite \hat{n}_r , le maximiseur de la fonction de la variable entière $L(\hat{f}_r, n)$ où \hat{f}_r représente l'estimation de f_r obtenue dans la section précédente. Le maximum étant obtenu en évaluant la fonction $L(\hat{f}_r, n)$ sur le domaine considéré par l'algorithme décrit plus haut.

3. ÉTUDE DES PERFORMANCES

La fréquence f_r étant estimée avec une certaine erreur, il est légitime de se demander si la solution adoptée ne va pas conduire fatalement à une erreur sur \hat{n}_r . Cette maximisation se fait cependant sur des entiers, il est donc clair



qu'une faible erreur ne va pas conduire systématiquement à une estimation erronée du repliement.

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à la qualité de l'estimation de n_r . Plus précisément, nous nous intéresserons à l'effet du choix des $N(k)$ sur \hat{n}_r et à l'influence de la variance de l'estimation de \hat{f}_r .

3.1. Plan fréquence réduite/nombre de repliements

Une fois \hat{f}_r calculée, l'estimation de n_r est, bien entendu, liée à l'allure de la courbe $L(\hat{f}_r, n)$. Un point essentiel pour évaluer l'influence de \hat{f}_r et des $N(k)$ va donc résider dans l'étude de la "surface" définie par $L(f, n)$. Cette étude se fera, de façon identique à l'étude du noyau de Dirichlet pour le cas classique du périodogramme, pour un signal sans bruit et de fréquence $f_D = 0$.

En remplaçant y_q^k par 1 dans (16), $L(f, n)$ s'écrit :

$$L(f, n) = \left| \sum_{k=1}^{2N_b} \alpha_k^*(f, n) \cdot W^*(f \cdot T_r(k) + n/N(k)) \right|^2 \quad (19)$$

où $W(f)$ désigne le noyau de Dirichlet. La surface $L(f, n)$ est ainsi constituée par une somme pondérée de noyaux de Dirichlet centrés, dans le plan (f, n) , sur des droites d'équation :

$$f = -n/(1 + N(2p + 1)) \quad (20)$$

$$f = -n/(1 - N(2p + 1)) \quad (21)$$

Une difficulté essentielle pour le développement de cette expression provient bien entendu de la prise en compte des relations entre les phases initiales du signal entre chaque bloc, celles-ci se traduisant par des "interférences" entre les noyaux. Afin de simplifier les calculs, nous supposons donc que n_p est suffisamment grand pour que la largeur du lobe central de chaque noyau soit faible par rapport à la distance séparant les noyaux. Dans la mesure où cette condition est vérifiée, on a :

$$L(f, n) \approx \sum_{k=1}^{2N_b} |W(f \cdot T_r(k) \pm n/N(k))|^2 \quad (22)$$

Le lien existant entre la variance de \hat{f}_r et la variance de \hat{n}_r apparaît clairement dans la figure (1) qui représente l'allure de $L(f, n)$. Ainsi, plus $|\hat{f}_r|$ est grand, plus les maxima de $L(\hat{f}_r, n)$ sont loin de 0 et donc plus l'erreur sur n_r "risque" d'être grande. Cette interprétation permet également de motiver l'utilisation de plusieurs fréquences de répétition. En effet, pour une même variance de \hat{f}_r et pour un nombre de points total constant ($2N_b n_p$ constant), l'ajout de blocs avec des $N(k)$ inférieurs va avoir pour effet de "délocaliser" vers l'extérieur les maxima de $L(f, n)$. Ceci ayant pour conséquence une diminution du "risque" d'erreur sur l'estimation de n_r . On peut aussi remarquer que lorsque les $N(k)$ tendent vers l'infini, les pentes des droites définies par (20,21) tendent vers 0. Les centres des noyaux vont alors se confondre rendant impossible la levée d'ambiguïté. Soulignons que ce résultat est immédiat à partir des définitions (1,3) des périodes d'échantillonnage et de la valeur de l'intervalle entre deux blocs. Il apparaît donc clairement que les $N(k)$ doivent avoir des valeurs les plus faibles possible tout en continuant de vérifier la contrainte (14).

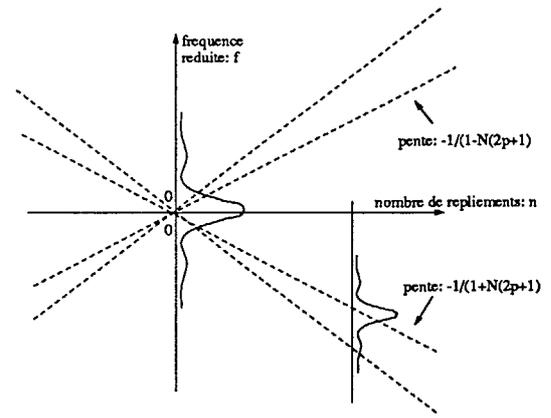


Figure 1: Illustration du plan $L(f, n)$.

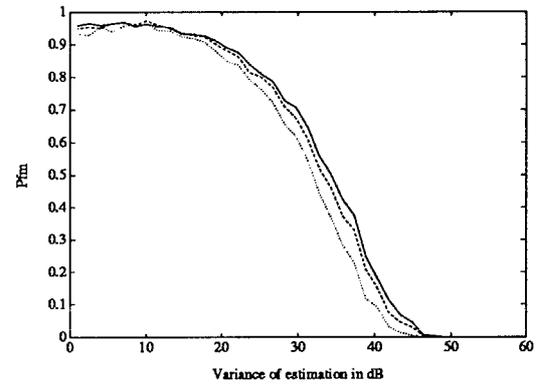


Figure 2: Courbes expérimentales P_{fm} en fonction de $1/\sigma_f^2$ exprimé en dB. (—): $N_b = 1, N(1) = 70, n_p = 24$; (---): $N_b = 2, N(1) = 20, N(3) = 70, n_p = 12$; (- · -): $N_b = 3, N(1) = 10, N(3) = 20, N(5) = 70, n_p = 8$;

3.2. Probabilité de fausse mesure du repliement

L'approche simple, que nous avons proposée dans la section précédente, a permis de mettre en évidence, sans toutefois le quantifier précisément, le lien existant entre une erreur sur l'estimation de f_r et une erreur sur l'estimation de n_r . Cette section est consacrée à une évaluation précise de la probabilité d'erreur sur l'estimation du nombre de repliements en fonction de la variance sur l'estimée de f_r , ce que nous appellerons "probabilité de fausse mesure".

Nous ferons, comme précédemment, l'hypothèse simplificatrice que le signal est non bruité et que le Doppler est nul. Nous supposons donc que \hat{f}_r est une variable aléatoire Gaussienne à moyenne nulle et de variance σ_f^2 . Cette hypothèse se justifie par le fait que \hat{f}_r est obtenue par combinaison linéaire des $f_{k,r}$ qui sont des variables aléatoires que l'on peut supposer indépendantes et à moyenne nulle.

Nous définissons alors la probabilité de fausse mesure à l'ordre n pour $n > 0$, que nous noterons $P_{fm}(n)$, par la probabilité que $L(\hat{f}_r, n)$, ou $L(\hat{f}_r, -n)$, soit supérieur à $L(\hat{f}_r, 0)$. Soulignons que cette quantité ne constitue pas, bien entendu, la probabilité pour que n , ou $-n$, soit estimé à la place de 0. D'autre part, ces variables n'étant pas

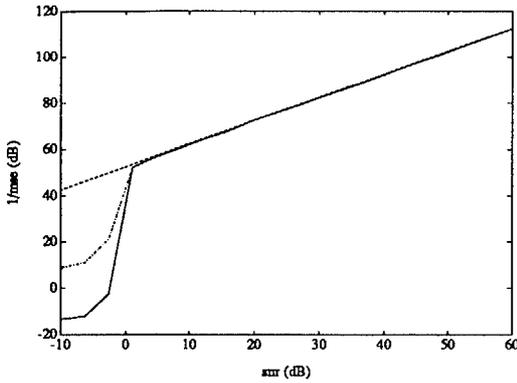


Figure 3: Courbe d'erreur quadratique moyenne pour f_r et f_D en fonction du rapport signal sur bruit. $N_b = 1$, $n_p = 24$, $N(1) = 20$. (—): f_D ; (---): f_r ; (···): Borne de Cramer Rao pour un sinus complexe de 24 points.

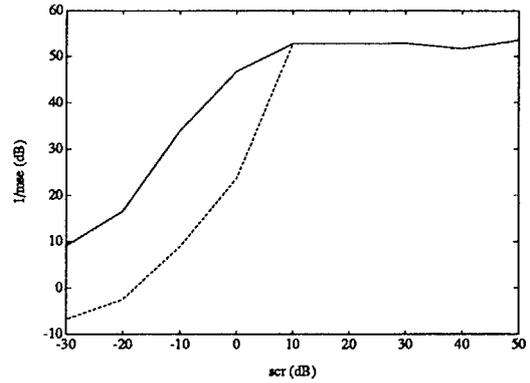


Figure 4: Courbe d'erreur quadratique moyenne pour f_r et f_D en fonction du rapport signal sur fouillis, pour un rapport signal sur bruit blanc de 100dB et $N_b = 1$, $n_p = 24$, $N(1) = 20$. (—): f_D ; (---): f_r .

indépendantes, il est délicat de déterminer une expression reliant ces différentes quantités entre elles.

Le calcul de $P_{fm}(n)$ nécessite, compte tenu de l'expression de $L(f, n)$, la résolution d'un système fortement non linéaire afin de déterminer les différents intervalles pour lesquels l'inégalité définissant cette probabilité est vérifiée.

Nous avons résolu ce problème en dérivant une approximation de $P_{fm}(n)$ à partir du développement limité au second ordre d'un majorant de cette quantité, [1]. Si on note:

$$L_s(\hat{f}_r, n) = a_0(n) + a_1(n) \cdot \hat{f}_r + a_2(n) \cdot \hat{f}_r^2 + o(\hat{f}_r^3)$$

$$L(\hat{f}_r, 0)^{1/2} = b_0 + b_2 \hat{f}_r^2 + o(\hat{f}_r^3)$$

cette approximation, notée $P_{fm}^\dagger(n)$, est alors donnée par:

$$P_{fm}^\dagger(n) = \text{Prob}(|\hat{f}_r| > f_r^*) \quad (23)$$

$$= 1 - \text{erf}(f_r^*/\sigma_f \cdot \sqrt{2\pi}) \quad (24)$$

où f_r^* est la plus petite abscisse des deux intersections entre les paraboles définies plus haut.

Ces résultats théoriques ont été confirmés par simulation. Ainsi, la courbe de la figure (2) a été obtenue à partir de 1000 réalisations de \hat{f}_r pour chaque valeur de σ_f^2 envisagée. Cette courbe est en parfait accord avec celle obtenue à partir des expressions analytiques précédentes. De plus, elle confirme les conclusions de l'analyse faite dans la section précédente.

Les courbes obtenues mettent en évidence un seuil au-dessus duquel la probabilité de fausse mesure du repliement devient "quasi-nulle". L'existence de ce seuil, qui se situe aux environs de 50dB, est essentielle. En pratique, on essaiera de se situer au-dessus de ce seuil lors de l'estimation de la fréquence repliée pour assurer une estimation correcte de f_D .

4. SIMULATIONS

La figure (3) présente une courbe d'erreur quadratique moyenne pour l'estimation de f_D et f_r . Les fréquences ambiguës $\hat{f}_{k,r}$ ont été estimées par l'algorithme "min-norm", [2], avec une longueur de prédicteur de 8. La courbe présente deux zones distinctes:

- Pour un rapport signal à bruit inférieur à 0dB les performances de la méthode sont mauvaises. La fréquence repliée est mal estimée et l'erreur sur le repliement devient très grande.
- Pour un rapport signal à bruit supérieur à 0dB, la P_{fm} devient nulle et la variance d'estimation sur f_D est due uniquement à l'erreur d'estimation sur la fréquence repliée. A titre de comparaison, la borne de Cramer-Rao pour une longueur de signal de 24 points (longueur d'un bloc) est donnée : la méthode d'estimation de f_D atteint cette borne dès 0dB.

Il est important de remarquer que la valeur du seuil mis en évidence sur cette courbe correspond au seuil observé dans la partie précédente. En effet, pour un rapport signal à bruit de 0dB, $1/\sigma_f^2$ vaut environ 50dB. Ainsi, dès que f_r est correctement estimée, le nombre de repliements correct est obtenu par l'algorithme de levée d'ambiguïté qui reste insensible au bruit au-dessus de 0dB.

La figure (4) représente la courbe d'erreur quadratique moyenne obtenue dans un contexte voisin de la réalité. Dans ce cas, un signal de fouillis corrélé en case distance a été additionné à y_n^k . Celui-ci a ensuite été blanchi par un algorithme de gradient stochastique, [4], permettant à la fois d'utiliser les références "bruit seul" entourant la cible et de rattraper les sauts dans la fréquence d'échantillonnage à la transition des rafales.

5. RÉFÉRENCES

- [1] A. Ferrari, C. Bérenguer and G. Alengrin. *Doppler Ambiguity Resolution Using Multiple PRF*. Soumis à *IEEE Transactions on AES*.
- [2] S. M. Kay. *Modern Spectral Estimation*. Signal Processing Series. Prentice Hall, 1987.
- [3] A. Ludloff and M. Minker. Reliability of Velocity Measurement by MTD Radar. *IEEE Transactions on AES*, 21(4):522-528, July 1985.
- [4] Algorithmes Adaptatifs et Soustraction de Bruit. Numéro spécial *Traitement du Signal*, 6(5), 1989.