



## RECONSTRUCTION 3D DIRECTE POUR LA TOMOGRAPHIE PAR ÉMISSION DE POSITONS AVEC MESURE DU TEMPS DE VOL

**A. Mallon et P. Grangeat**

LETI (CEA - Technologies Avancées) - DSYS - CEN/G - 85 X -  
F38041 GRENOBLE CEDEX - FRANCE

RÉSUMÉ

ABSTRACT

Les nouvelles générations de tomographes constitués de détecteurs bidimensionnels nécessitent des méthodes de reconstruction tridimensionnelles capables de prendre en compte des mesures incomplètes. Dans le cadre de la tomographie par émission de positons avec mesure du temps de vol, nous proposons une nouvelle méthode de reconstruction analytique exacte qui traite directement les mesures incomplètes. A partir de celles-ci, nous réalisons une reconstruction approchée par rétroprojection-filtrage 2D. Avec les données complètes nous obtenons une deuxième reconstruction que nous utilisons pour corriger la première. Cette méthode plus rapide est pratiquement optimale en terme de rapport signal à bruit et nous montrons qu'elle ne détériore pas la résolution spatiale, contrairement aux méthodes par estimation-reprojection.

New tomographs constituted of bidimensional detectors need reconstruction methods able to process tridimensional incomplete data. We propose a new method for positron emission tomography with time-of-flight measurement which uses directly the incomplete data opposed to the conventional one which completes it by reprojecting a first estimation. An approximate reconstruction is obtained with the incomplete data and the correction to assure an exact reconstruction is realized with the complete one. This new method is faster than the estimating-reprojecting technic and closed to optimal in term of signal to noise ratio. Furthermore, it does not disturb the spatial resolution as the other technics using incomplete data.

### 1. INTRODUCTION

Au cours des dix dernières années, l'imagerie médicale a connu un développement important lié à l'apparition de la troisième dimension. La nouvelle génération de tomographes à positon est constituée de détecteurs bidimensionnels sans collimateurs, qui mesurent également les traces d'émission obliques par rapport à l'axe du dispositif tomographique, afin d'améliorer la sensibilité des systèmes d'acquisition. Pour traiter ces données volumiques, des méthodes de reconstruction dédiées doivent être développées, qui prennent en compte le caractère tridimensionnel du problème et la présence de mesures incomplètes. En effet, la taille de l'objet à reconstruire est du même ordre de grandeur que celle du système de détection et de ce fait une partie des traces obliques passant par l'objet ne rencontrent pas la paire de détecteurs. Dans la première partie nous introduisons le problème direct, à savoir les acquisitions tomographiques 3D par émission de positons avec mesure du temps de vol. Dans un deuxième temps, nous présentons une nouvelle méthode de reconstruction exacte dont le principe est le suivant : on réalise une reconstruction analytique approchée avec les mesures incomplètes par rétroprojection filtrage 2D, et on corrige cette approximation grâce à une reconstruction réalisée à partir des mesures complètes. Dans la troisième partie, nous validons la méthode sur des données simulées. L'évaluation est effectué par rapport à trois aspects : le temps de calcul, le rapport signal à bruit et la résolution spatiale. Nous montrons ainsi la supériorité de cette méthode sur une reconstruction par estimation-reprojection, technique qui synthétise les données non mesurées par reprojection d'une première reconstruction réalisée avec les mesures complètes.

### 2. MODÉLISATION DU PROBLÈME DIRECT

Le but de la tomographie par émission de positons (PET) est d'obtenir la distribution volumique de l'activité d'un traceur émetteur de positon injecté dans le patient. L'acquisition est réalisée par détection en coïncidence des deux photons issus de l'annihilation du positon avec un électron du milieu. En tomographie conventionnelle, on obtient pour chaque trace une mesure qui est la somme des émissions le long de cette droite. En tomographie avec mesure du temps de vol, on mesure la différence entre les temps de parcours respectifs des deux photons depuis le lieu d'annihilation jusqu'aux détecteurs. Pour un système de détection parfait, l'événement détecté avec cette mesure supplémentaire pourrait être directement replacé dans le volume objet sans algorithme de reconstruction. Mais l'incertitude sur une telle mesure est supérieure à la résolution souhaitée. Elle est représentée par un processus gaussien unidimensionnel le long de la droite d'acquisition, centré sur l'abscisse fournie par la mesure du temps de vol (figure 1)[1]. Cette gaussienne représente la densité de probabilité sur la localisation du lieu d'émission. La résolution considérée est de 300 picosecondes. Elle correspond à une largeur à mi-hauteur de 4.5 cm pour la gaussienne. L'ensemble des traces d'acquisition pour une direction donnée est appelée histoprojection, par analogie avec la projection de la tomographie conventionnelle.

Nous considérons un système de détection constitué d'une paire de détecteurs plans pouvant tourner autour du patient. On repère l'axe de rotation ou direction axiale par l'axe z. Les plans orthogonaux à cet axe sont nommés plans transverses. Un point du volume à



reconstruire est repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \alpha, z)$ . La direction d'acquisition est repérée par le vecteur unitaire  $\hat{u}$  de colatitude  $\theta$  et de longitude  $\varphi$ . (figure 1)

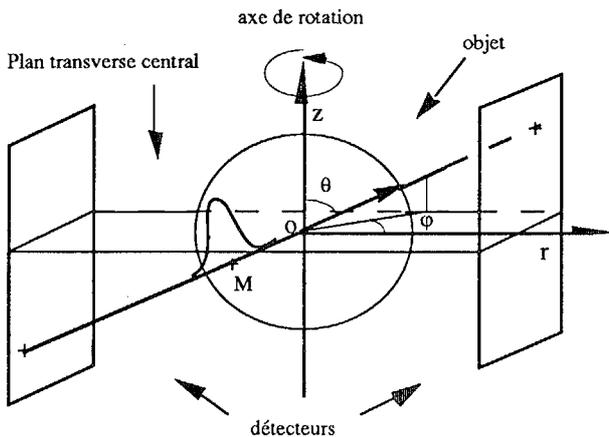


Figure 1. : Géométrie d'acquisition.

Le vecteur  $\vec{OM}$  est désigné par  $\vec{x}$  et sa projection dans le plan transverse par  $\vec{x}_\perp$ . On définit analytiquement l'histoprojection comme l'intégrale le long de la droite d'acquisition de la fonction  $f$  pondérée par la gaussienne de mesure :

$$p(\hat{u}, \vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x} - l\hat{u}) \frac{\exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma} dl = f(\vec{x}) * g(\hat{u}, \vec{x}) \quad (1)$$

$$\text{avec } g(\hat{u}, \vec{x}) = \delta^2(\vec{x}_\perp) \frac{\exp\left(-\frac{(\hat{u} \cdot \vec{x})^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

La taille de l'objet à reconstruire est du même ordre de grandeur que celle des détecteurs. De ce fait, lorsque la direction de mesure est oblique, une partie des traces d'acquisition ne rencontre pas les détecteurs. C'est pourquoi on parle de mesures incomplètes. On définit une colatitude limite, appelée également angle d'acceptance, qui détermine l'ensemble des directions d'acquisition des mesures complètes :

$$\Omega_l = \{ \hat{u}(\varphi, \theta), \varphi \in [0; 2\pi] \text{ et } \sin\theta \geq \sin\theta_l \} \quad (2)$$

Selon la taille de l'objet, ces données ne représentent que 20 à 40% des mesures. La prise en compte des mesures incomplètes introduit une variation spatiale au niveau de l'acquisition, mais la perte en sensibilité occasionnée par leur rejet serait trop importante pour qu'on les néglige. On peut par contre considérer que cette variation spatiale se limite à la seule direction axiale. Ainsi on définit des coupes transverses  $C(\theta_j)$  de l'objet constituées des plans transverses donc la colatitude limite d'acquisition est  $\theta_j$ .

Le volume à reconstruire est donc divisé en  $(2 \cdot NC - 1)$  coupes parallèles au plan  $(O, x, y)$  (figure 2). La coupe centrale est repérée par l'indice 0. On considère que l'objet est centré dans le système d'acquisition. Les coupes d'indices respectifs  $i$  et  $-i$  sont symétriques par rapport au plan central et on leur attribue le même angle d'acceptance  $\theta_j$ . Les angles d'acceptance sont donc repérés entre les indices 0 à  $NC-1$ . Les deux coupes extrêmes définissent l'angle d'acceptance minimum. De ce fait, l'angle  $\theta_{NC-1}$  est l'angle d'acceptance des directions complètes et est appelé  $\theta_{cm}$ . On note également  $\theta_{im}$  l'angle d'acceptance maximale des directions incomplètes, soit l'angle d'acceptance correspondant à la coupe numérotée 0,  $\theta_0$ .

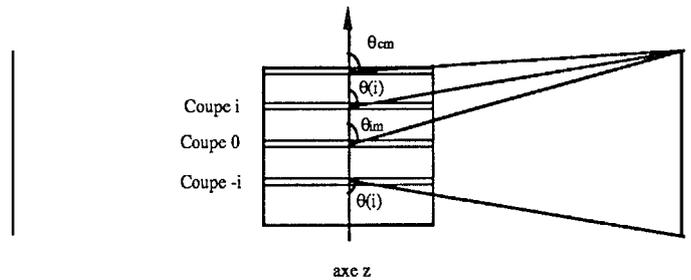


Figure 2. : Découpe du volume en tranches de colatitude constante.

### 3. MÉTHODE DE RECONSTRUCTION

#### 3.1. Etat de l'art

Nous nous plaçons dans le cadre des méthodes de reconstruction analytiques. Avec des mesures complètes, elles peuvent toutes s'exprimer sous la forme d'une rétroprojection des histoprojections filtrées. La classe des filtres de reconstruction est de dimension infinie puisque le problème est surdéterminé, mais il existe un filtre unique optimal d'un point de vue statistique [5]. Les mesures incomplètes, par contre, ne peuvent être traitées par filtrage-rétroprojection car elles posent un problème qui varie spatialement. Deux approches sont utilisées couramment : en tomographie position où on dispose de suffisamment de données pour reconstruire, on utilise généralement une première reconstruction pour estimer les données non mesurées par reprojection[4]; en tomographie conique où toutes les mesures sont incomplètes, on réalise une reconstruction approchée par filtrage unidimensionnel-rétroprojection [3]. Defrise a retenu et amélioré cette approche en tomographie position. Il modélise l'erreur introduite lors de la reconstruction approchée avec les mesures incomplètes et la corrige avec une reconstruction réalisée avec les mesures complètes [2]. C'est cette approche que nous avons retenue et généralisée au temps de vol. Les mesures incomplètes ne le sont que suivant la direction axiale. On peut donc leur appliquer un filtre transverse. Nous effectuons avec les histoprojections incomplètes une reconstruction par rétroprojection-filtrage bidimensionnel transverse qui ne peut être exacte. Celle-ci sera corrigée par sommation d'une reconstruction dite de correction obtenue avec les mesures complètes.

#### 3.2. Principe de la méthode de reconstruction

On définit la rétroprojection pondérée par la fonction  $w(\hat{u})$  par l'intégrale suivante :

$$rp(\vec{x}, \Omega) = \int_{\Omega} p(\vec{x}, \hat{u}) * w(\vec{x}, \hat{u}) d\hat{u} \quad (3)$$

où  $\Omega$  représente l'ensemble des directions d'acquisition. On nomme  $rp(\vec{x}, \theta_j)$  l'image rétroprojetée des acquisitions de colatitude  $\theta_j$ . La reconstruction approchée consiste en deux opérations : une rétroprojection pondérée par la fonction  $g_n$  ainsi définie :

$$g_n(\vec{x}, \hat{u}) = \frac{e^{-\frac{(\vec{x} \cdot \hat{u}(-\theta, \varphi))^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (4)$$

et un filtrage 2D par le filtre suivant :

$$H_c(v_r, \theta) = \pi e^{-2(\sigma\pi v_r \sin\theta)^2} I_0(2(\sigma\pi v_r \sin\theta)^2) \quad (5)$$

où  $v_r$  est la fréquence radiale et  $I_0$  la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0. La fonction de pondération a été ainsi déterminée pour deux raisons. D'une part, elle permet de séparer la réponse

impulsionnelle du système acquisition-rétroprojection en deux termes, l'un dépendant uniquement de la direction transverse et le second de la direction axiale. D'autre part, elle est proche de la fonction de pondération qui assure une reconstruction optimale en 2D en terme de rapport signal à bruit [8]. Le filtre appliqué à chaque coupe est l'inverse de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle transverse du système acquisition-rétroprojection. Ainsi, cette reconstruction n'est erronée que suivant la seule direction axiale. Le système acquisition-rétroprojection-filtrage 2D est linéaire et invariant spatialement par coupe. L'entrée est l'image à reconstruire et la sortie la première reconstruction approchée nommée image 1. On peut donc calculer la fonction de transfert correspondante et ainsi modéliser l'erreur de reconstruction :

$$MTF_1(v_z, \theta) = \frac{\text{erf}(2 \sigma \pi v_z \sin \theta_1)}{2 \sigma \sqrt{\pi} v_z} \quad (6)$$

Cette erreur varie en fonction de l'angle d'acceptance et donc de la coupe. Nous avons tracé ses variations en fonctions de la hauteur  $z$  et de l'angle d'acceptance (figure 3).

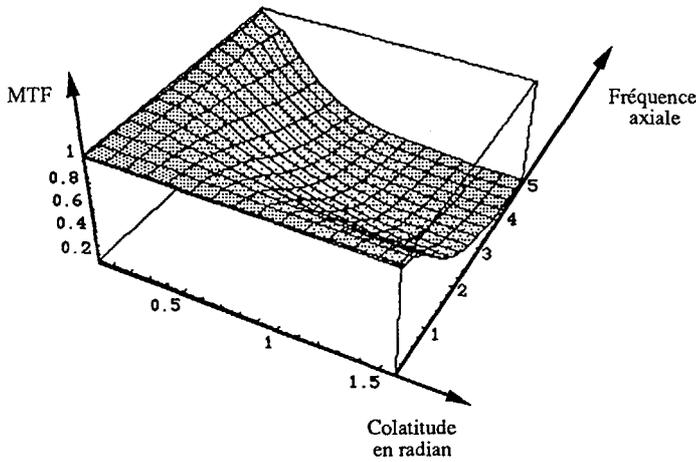


Figure 3. : MTF de la reconstruction approchée.

Plutôt que d'appliquer une procédure de déconvolution avec variation spatiale, on réalise une convolution de correction sur les données complètes. Les mesures complètes permettent une reconstruction exacte que l'on nomme image 2. Le filtre optimal en terme de rapport signal à bruit est défini par la formule suivante [6]:

$$H_w(\vec{v}, \theta, \varphi) = \frac{G(\vec{v}, \theta, \varphi)}{\iint_{\Omega} G^2(\vec{v}, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi + \frac{Ff_n(\vec{v})}{FTf(\vec{v})}} \quad (7)$$

où  $Ff_n$  est la densité spectrale de puissance (DSP) du bruit d'acquisition, supposée indépendante de la direction et  $FTf$  la DSP de la fonction d'activité. Cette méthode de reconstruction est une déconvolution multi-images avec le filtre de Wiener. La MTF d'une reconstruction exacte, si on ne tient pas compte des fonctions de régularisation, vaut 1 dans la bande de fréquences correspondant au système d'acquisition. On définit le filtre correcteur à appliquer à la reconstruction exacte par :

$$MTF_1 + H_{cor} MTF_2 = 1 \quad \text{donc } H_{cor} = (1 - MTF_1) / MTF_2 \quad (8)$$

Si on considère que  $MTF_2$  vaut 1 dans la bande passante,  $H_{cor}$  est défini pour chaque coupe par :

$$H_{cor}(v_z, \theta) = 1 - \frac{\text{erf}(2 \sigma \pi v_z \sin \theta_1)}{4 \sigma \sqrt{\pi} v_z \sin \theta_1} \quad (9)$$

Il est appliqué successivement pour toutes les colatitudes à l'image 2 et la coupe correspondant à la colatitude considérée est sommée à l'image 1. On obtient ainsi une deuxième reconstruction exacte, l'image 3. On dispose de deux reconstructions exactes d'un point de vue analytique  $I_2$  et  $I_3$ . Mais l'émission est un processus aléatoire et donc bruitée. Afin de déterminer la reconstruction optimale en terme de rapport signal à bruit, on estime la variance d'une image  $I_f$  obtenue par sommation pondérée des deux précédentes. L'organigramme de la reconstruction totale est présenté sur la figure 4.

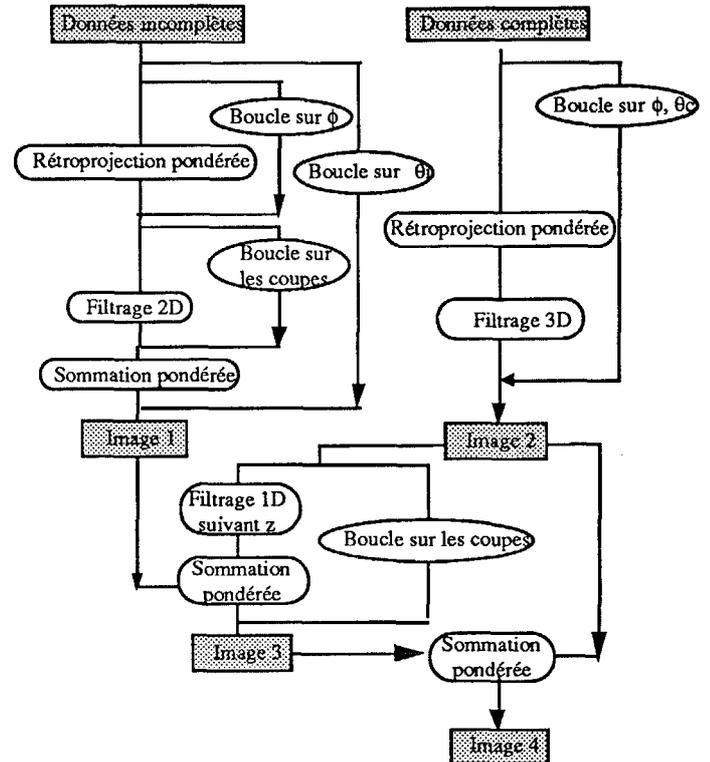


Figure 4. : Organigramme.

### 3.3. Optimisation statistique

On choisit d'estimer la variance de l'image comme celle au centre d'une sphère d'activité uniforme. On définit une fonction de pondération  $a_i$  qui dépend de la coupe puisque le nombre de mesures varie en fonction de celle-ci :

$$I_f = a_i I_2 + (1 - a_i) I_3 \quad \text{donc } I_f = a_i I_1 + ((1 - a_i) \delta + a_i h_{cor}) * I_2 \quad (10)$$

On considère que les deux termes de la somme (données complètes et données incomplètes) sont indépendants.

$$\text{Var}(I_f) = a_i^2 \text{Var}(I_1) + \text{Var}(((1 - a_i) \delta + a_i h_{cor}) * I_2) \quad (11)$$

La variance de la reconstruction approchée est approximée par la variance d'une reconstruction 2D dont la formule a été ainsi définie par Tomitani [8] :

$$\text{Var}_1 = (C_1 \cdot \tau) / (d \cdot n_i) \quad (12)$$

où  $\tau$  est la largeur à mi-hauteur de la gaussienne de mesure,  $d$  le diamètre de la sphère émettrice,  $n_i$  le nombre d'événements mesurés par voxel pour la coupe  $i$  et  $C_1$  une constante. La variance du second terme est approximée par la variance d'une reconstruction par filtrage de Wiener [6] :

$$\text{Var}_2 = (K_1(\theta_0) \tau) / (d n_c) \quad (13)$$

Ainsi l'expression de la variance finale est donnée par la formule suivante :



$$\text{Var}(I_f) = a_i^2 (C_1 \tau) / (d n_i) + (1 - a_i)^2 (K_1(\theta_0) \tau) / (d n_c) \quad (14)$$

$K_1(\theta_0)$  et  $C_1$  sont à peu près égales lorsque  $\theta_0$  reste inférieur à  $20^\circ$  (différence inférieure à 5%). Cette expression est maximale pour :

$$\alpha(i) = \frac{n_i}{n_c + n_i} \quad (15)$$

Nous avons retenu cette formule comme fonction de pondération.

#### 4. VALIDATION - RÉSULTATS

Nous avons implémenté cette méthode sur une station de travail sparc II (Sun) ainsi que la méthode par estimation-reprojection [6]. Nous présentons ainsi nos résultats en comparaison avec ceux obtenus avec cette dernière. Nous étudions dans un premier temps la stabilité de la méthode en présence de données bruitées et montrons la similarité des deux techniques. Dans un deuxième temps nous étudions la résolution spatiale.

##### 4.1. Aspects informatiques

Les tests ont été réalisés pour des volumes  $64^3$ . Les pas d'échantillonnage angulaire sont  $2,8^\circ$  suivant la longitude et  $1,15^\circ$  suivant la colatitude. Le système d'acquisition considéré mesure des histoprojections complètes pour des colatitudes variant de  $88,85^\circ$  à  $91,15^\circ$  uniquement. Des mesures incomplètes sont acquises pour des colatitudes variant de  $84,5^\circ$  à  $95,5^\circ$ . Les temps de reconstruction sont les suivants :

	Temps de reconstruction	Place mémoire
Reconstruction avec mesure complètes	2h 40mn	8 Mword
Estimation-reprojection	9h 20mn	8 Mword
Reconstruction directe	5h50	8 Mword

Table 1. : Informations informatiques

La méthode directe permet un gain de temps d'environ 30%.

##### 4.2. Etude de la variance

Nous avons réalisé des reconstructions sur des données simulées sans régularisation (fenêtre d'apodisation) afin de calculer la variance théorique des méthodes. Le fantôme utilisé est une sphère centrée d'activité uniforme. Le bruit d'acquisition est poissonien. Nous avons tracé sur la figure 5 les variations de la variance par coupe pour une image reconstruite par la méthode directe (Rec\_dir) et une image reconstruite par la méthode par estimation-reprojection (Est\_repro).

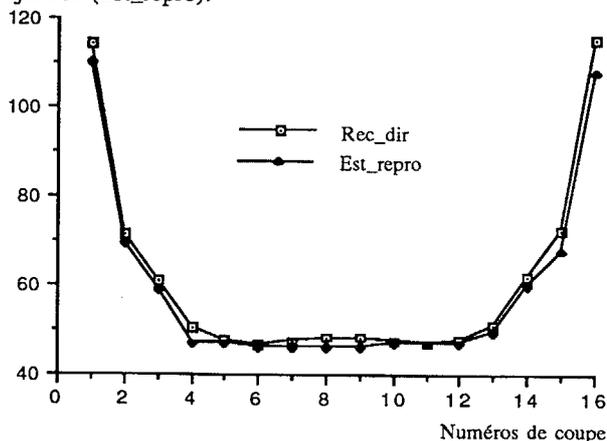


Figure 5. : Variance par coupe des reconstructions.

Cette figure montre que la méthode par estimation-reprojection donne des résultats très légèrement meilleurs, mais la différence est peu significative.

##### 4.3. Etude de la résolution spatiale

Dans un deuxième temps nous avons étudié la résolution spatiale. Le problème des méthodes par estimation-reprojection se situe à ce niveau : la procédure de reprojection détériore la résolution spatiale [6]. Nous avons choisi un fantôme non bruité constitué de 5 cylindres de même taille que les détecteurs, d'activité uniforme. Nous avons tracé par coupes la corrélation entre l'image reconstruite et une image parfaite (figure 6). Les valeurs sont exprimées en pourcentage.

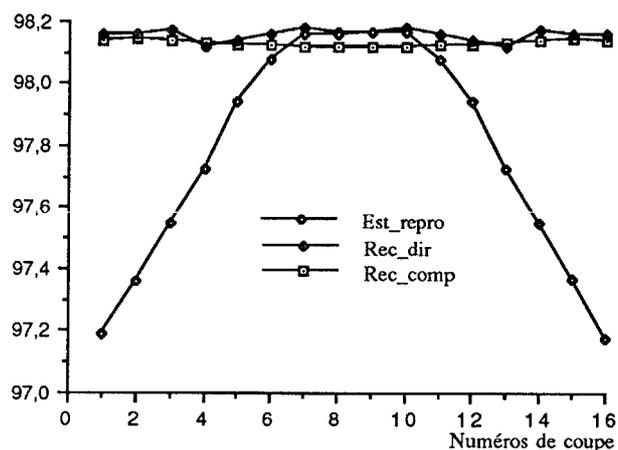


Figure 6. : Fonctions de corrélation.

La corrélation se dégrade lorsque l'on s'éloigne de la coupe centrale pour la méthode par reprojection alors qu'elle reste constante pour la deuxième méthode et semblable à celle d'une reconstruction réalisée avec les mesures complètes uniquement.

#### 5. CONCLUSION

Nous avons présenté une méthode de reconstruction exacte qui utilise toutes les données mesurées directement, c'est-à-dire sans les compléter par reprojection. Les premiers résultats présentent deux avantages principaux : la méthode est plus rapide et produit des reconstructions dont la résolution spatiale est supérieure à celle de la méthode par estimation sans amplifier le bruit.

- [1] Campagnolo R. 1980 Utilisation de la technique de temps de vol pour l'amélioration de l'imagerie en tomographie par positons, *Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble*
- [2] Deprise M., Townsend D. and Clack R. 1992 Favor : a fast reconstruction algorithm for volume imaging in PET, *Conference Record of the I.E.E.E. 1992 Medical Imaging Conference*.
- [3] Feldkamp A., Davis L. C. et Kress J. W. 1984 Practical cone-beam algorithm, *J. Opt. Soc. Am. A* Vol. 1, N° 6/June
- [4] Kinahan P. E and Rogers J. G. 1989 Analytic 3D image reconstruction using all detected events, *I.E.E.E. Trans. Nucl. Sci.*, Vol 36, N°1.
- [5] Mallon A. and Grangeat P. 1992 Three dimensional PET reconstruction with time-of-flight measurement, *Phys. Med. Biol.* 37 717-729.
- [6] Mallon A., Grangeat P. and Thomas P. X. 1992 Comparison between three-dimensional positron emission tomography with and without time-of-flight measurement, *Conference Record of the I.E.E.E. 1992 Medical Imaging Conference*.
- [7] Snyder D. L. et Politte D. G. 1983 Image reconstruction from list-mode data in an emission tomography systems having time-of-flight measurements *I.E.E.E. Trans. Nucl. Sci.*, Vol. 30, N°3
- [8] Tomitani T. 1981 Image reconstruction and noise evaluation in photon time-of-flight assisted positron emission tomography *I.E.E.E. Trans. Nucl. Sci.*, Vol. 28, N°6