



## Dualité Mumford-Shah / Canny-Deriche et segmentation progressive d'images

Antonin Chambolle

CEREMADE, Université de Paris-Dauphine, place de Lattre de Tassigny, 75775 Paris CEDEX 16, France

### RÉSUMÉ

Des calculs simples permettent d'établir que les filtres optimaux proposés par Deriche il y a quelques années pour détecter des bords sur une image sont liés à certains problèmes variationnels de segmentation d'images, tels que celui de Mumford et Shah. Ceci conduit à présenter une nouvelle manière d'implémenter ces filtres ; à titre d'application, une méthode itérative de segmentation et restauration d'images basée sur les deux formalismes est proposée.

### ABSTRACT

Simple algebra shows that the optimal filters for edge detection proposed by Deriche a few years ago are closely related to some variational methods in image segmentation, such as Mumford and Shah's problem. This leads to a new approach for implementing those filters; as an application we propose an iterative image segmentation and restoration method based on both theories.

## 1 Approche en dimension un

**Formulation mathématique** En dimension un, le modèle de "barre fragile" (weak rod) de Blake et Zisserman [BZ87] pour régulariser un signal en essayant de détecter et préserver ses discontinuités ainsi que celles de sa dérivée consiste à minimiser, pour un signal donné  $g$  :

$$\int_{\Omega} \mu^4 u'^2 + \lambda^2 u^2 + (u - g)^2 dx + \beta |Z_D| + \beta' |Z_{D'}| \quad (1)$$

sur toutes les fonctions  $u$  régulières sur  $\Omega \setminus (Z_D \cup Z_{D'})$ ,  $Z_D$  étant l'ensemble des discontinuités de  $u$  et  $Z_{D'}$  celui des discontinuités de sa dérivée. L'origine de ce problème remonte à un article de Geman et Geman introduisant une approche probabiliste de la restauration d'images. Mumford et Shah ont transposé ce premier travail dans un cadre continu pour essayer d'appliquer les techniques usuelles du calcul variationnel. De nombreux auteurs ont cherché par la suite des algorithmes de résolution de ce genre de problème (on peut citer outre ceux déjà mentionnés, Azencott, Geiger, Girosi, Yuille...), mais aucune méthode à ce jour ne permet d'obtenir avec certitude (en dimension supérieure à un) le minimum de la fonctionnelle (1) — ou plutôt de ses équivalents discrets —.

Si on oublie la partie non convexe  $\beta |Z_D| + \beta' |Z_{D'}|$  — nous ne traiterons plus, dans cet article, de  $Z_{D'}$  — et qu'on étend le domaine  $\Omega$  à la droite réelle, la solution de (1) est donnée par :

$$u = g * \phi \quad \text{où} \quad \hat{\phi}(k) = \frac{1}{1 + \lambda^2 k^2 + \mu^4 k^4}. \quad (2)$$

Lorsque  $\lambda = \sqrt{2}\mu$ ,  $\hat{\phi}$  s'écrit  $1/(1 + \mu^2 k^2)^2$  et

$$\phi(x) = \frac{\alpha}{4} (1 + \alpha|x|) e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha = \frac{1}{\mu}; \quad (3)$$

sinon on pose :

$$\nu_1^2 = \frac{1}{2} \{ \lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 4\mu^4} \} \quad \text{et} \quad \nu_2^2 = \frac{1}{2} \{ \lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - 4\mu^4} \}$$

si  $\lambda > \sqrt{2}\mu$ , avec  $\nu_1, \nu_2 > 0$ ; et

$$\nu^2 = \frac{1}{2} \{ \lambda^2 + i\sqrt{4\mu^4 - \lambda^4} \}$$

si  $\lambda < \sqrt{2}\mu$ , avec  $\Re(\nu) > 0$  (puis  $\nu_1 = \nu$ ,  $\nu_2 = \bar{\nu}$ ); il vient alors :

$$\phi(x) = \frac{1}{2(\nu_1^2 - \nu_2^2)} \left\{ \nu_1 e^{-\frac{|x|}{\nu_1}} - \nu_2 e^{-\frac{|x|}{\nu_2}} \right\}; \quad (4)$$

ce qui s'écrit encore, dans le cas complexe (avec  $1/\nu = \alpha + i\omega$ ) :

$$\phi(x) = \frac{\alpha^2 + \omega^2}{4} e^{-\alpha|x|} \left\{ \frac{1}{\omega} \sin \omega|x| + \frac{1}{\alpha} \cos \omega x \right\} \quad (5)$$

En dérivant  $\phi$  on obtient dans chaque cas :

$$(4') : \frac{1}{2(\nu_1^2 - \nu_2^2)} \text{signe}(x) \left( e^{-\frac{|x|}{\nu_2}} - e^{-\frac{|x|}{\nu_1}} \right) \quad [\lambda > \sqrt{2}\mu];$$

$$(5') : -\frac{(\alpha^2 + \omega^2)^2}{4\alpha\omega} e^{-\alpha|x|} \sin \omega x \quad [\lambda < \sqrt{2}\mu];$$

$$(3') : -\frac{\alpha}{4} x e^{-\alpha|x|} \quad [\lambda = \sqrt{2}\mu].$$

Dans les deux derniers cas on retrouve exactement les filtres de Deriche [Der87], en particulier le cas extrême  $\lambda = \sqrt{2}\mu$  est, du point de vue de la détection de bords, son filtre optimal (au sens de Canny [Can86]).

Un autre cas fondamental est le cas limite où  $\mu = 0$  (et  $\beta' = 0$ ) dans (1) : on retombe sur le problème variationnel de Mumford et Shah [MS85] ("weak string model" dans [BZ87]), à savoir minimiser :

$$\int_{\Omega} \lambda^2 u'^2 + (u - g)^2 dx + \beta |Z_D| \quad (6)$$

Cela correspond à la limite  $\nu_1 = \lambda$ ,  $\nu_2 = 0$  dans (4)-(4') :

$$\phi(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}; \quad \phi'(x) = -\frac{1}{2\lambda^2} \text{signe}(x) e^{-\frac{|x|}{\lambda}}; \quad (7)$$

et donne un filtre relativement irrégulier : en particulier il n'est pas certain qu'un saut trop bruité du signal  $g$  ne donne pas lieu à la détection de plusieurs discontinuités. En revanche, ce filtre permet de localiser avec une précision infinie les discontinuités isolées (relativement au paramètre d'échelle  $\lambda$ ) et son implémentation variationnelle est très simple.

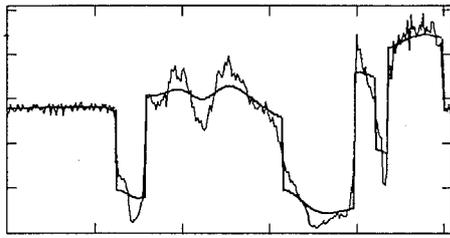


FIG. 1 - Un signal et une version plus régulière.

**Un exemple d'application** Par un algorithme de programmation dynamique dû à Mumford et Shah on peut obtenir la solution exacte du problème (6) — ceci est présenté dans un paragraphe de [Cha93]—. Mais on montre aussi facilement que les discontinuités isolées — relativement au paramètre d'échelle  $\lambda$  — de cette solution correspondent exactement aux extrema de la dérivée de la fonction régularisée  $g * \phi$  (solution de (6) pour  $\beta$  grand).

Ceci permet d'envisager un algorithme approximatif de minimisation de (6), consistant à répéter cette minimisation pour un ensemble de sauts  $Z_D$  fixé, et à ajouter à chaque fois à  $Z_D$  une discontinuité au point de maximum de la dérivée de la solution  $u$  qu'on vient de calculer. (On s'arrête lorsque l'énergie (6) ne diminue plus; le choix du paramètre  $\beta$  est bien sûr ici fondamental). La figure 1 montre le résultat d'un tel algorithme. Comparé à la solution exacte du problème (cf figure 2), on constate que seules les structures de petites dimensions sont affectées (ici une "marche descendante" a disparu).

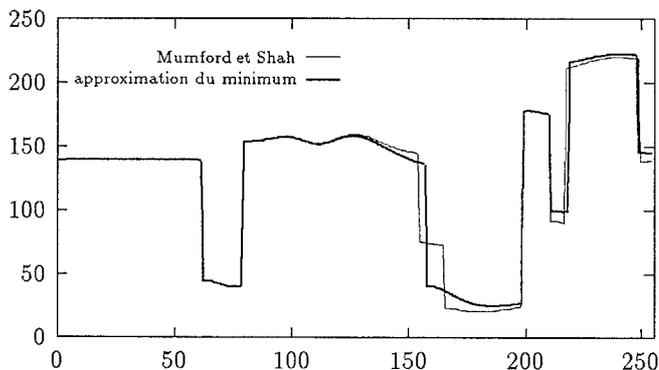


FIG. 2 - comparaison avec la vraie solution de (6) [ $\Omega = [0, 255]$ ,  $\lambda = 15$ ,  $\beta = 10000$ ].

## 2 Généralisation en dimension supérieure

**Extension des filtres** La manière la plus naturelle d'étendre ces filtres en dimension deux (ou plus) est de considérer le problème variationnel correspondant :

$$\int_{\Omega} \mu^4 |L(d^2 u)|^2 + \lambda^2 |\nabla u|^2 + (u - g)^2 dx \quad (8)$$

où  $L$  est une transformation linéaire. Si on prend par exemple dans (8)  $\lambda = \sqrt{2}\mu$  et  $L(d^2 u) = \Delta u$ , on trouve une version isotrope du filtre optimal de Deriche. Si  $\phi$  est le filtre 1D, donné par la formule (2), cela correspond à construire un filtre 2D  $\psi$  à l'aide de la relation :

$$\psi(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left( \hat{\phi} \left( |\vec{k}| \right) \right) \quad (\text{avec } |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}), \quad (9)$$

(où  $\mathcal{F}$  désigne l'opérateur de transformée de Fourier ( $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ ), et  $\vec{k}$  le vecteur d'onde).

Pour plus de simplicité, et donc de rapidité de calcul, Deriche préfère utiliser un produit tensoriel et pose  $\psi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$ . La généralisation (9) est *a priori* meilleure, puisque qu'une image invariante par translation dans une direction  $\vec{v} \perp \vec{u}$ , qu'on peut donc écrire  $g(x, y) = \gamma(\xi)$ ,  $\xi = (x, y) \cdot \vec{u}$  étant la coordonnée dans la direction  $\vec{u}$ , sera filtrée exactement comme le signal unidimensionnel  $\gamma$ :  $(\psi * g)(x, y) = (\phi * \gamma)(\xi)$ . Dans le cas du produit tensoriel ceci n'est vrai que lorsque  $\vec{u}$  est (0,1) ou (1,0).

**Applications** *Filtrage de Deriche isotrope, sur des domaines quelconques.* Le filtre décrit ci-dessus est très simple à implémenter, sur n'importe quel domaine  $\Omega$ , en discrétisant et en résolvant le problème variationnel associé. On remarque que, lorsque  $\mu = \sqrt{2}\lambda$ , si on note  $\psi_2$  le filtre donné par (9) — soit  $\psi_2(x, y) =$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{1 + 2\mu^2 |\vec{k}|^2 + \mu^4 |\vec{k}|^4} \right\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(1 + \mu^2 |\vec{k}|^2)^2} \right\},$$

on a  $\psi_2 = \psi_1 * \psi_1$  où  $\psi_1(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ (1 + \mu^2 |\vec{k}|^2)^{-1} \right\}$ . Ce filtre correspond à la partie convexe du problème variationnel de Mumford et Shah:

$$f = g * \psi_1 \Leftrightarrow f = \arg \min_u \int_{\Omega} \mu^2 |\nabla u|^2 + (g - u)^2. \quad (10)$$

Ainsi, en résolvant deux fois ce problème simple (une fois avec  $g$ , la deuxième avec le résultat obtenu  $u^1 \simeq \psi_1 * g$ ), ce qui revient à chaque fois à inverser une matrice très creuse, on obtient plus ou moins<sup>1</sup> le filtrage cherché. Il est important de noter que l'invariance par rotation de ce filtrage, quoique meilleure que celle du filtrage de Deriche classique, dépend fortement de la manière de discrétiser le laplacien — sur 5 ou 9 points par exemple — pour résoudre (10).

*Segmentation progressive d'images.* Une application de cette

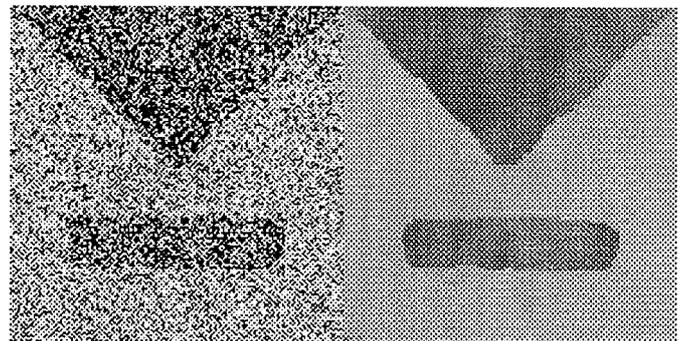


FIG. 3 - une image bruitée (70% des pixels ont été aléatoirement modifiés) et l'image restaurée, régulière par morceaux.

méthode de filtrage est un algorithme de segmentation progressive et itérative où les bords "sûrs" sont enlevés peu à peu du domaine original  $\Omega$ , de sorte qu'aucune régularisation n'est effectuée à travers ces bords. Il s'agit d'une généralisation de l'algorithme décrit en dimension un. Les figures 3, 4, 5 et 6

<sup>1</sup>"plus ou moins", car l'équivalence (10) n'est vraie en toute rigueur que lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^2$ .



illustrent ce procédé. A chaque étape, les bords de l'image filtrée  $u(x, y)$  sont calculés comme étant les passages par zéro de la fonction

$$d^2u(\nabla u, \nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y},$$

évaluée en chaque pixel. Ces passages par zéro correspondent en effet exactement aux extrema de  $|\nabla u|^2$  dans la direction du gradient. Les dérivées de  $u$ ,  $\nabla u$  et  $d^2u$ , sont estimées — en tenant compte des discontinuités déjà marquées — en prenant systématiquement des différences centrées lorsqu'aucun bord n'empêche de le faire. Les passages par zéro ne sont retenus que lorsque le module du gradient lui-même est supérieur à un certain seuil, que l'on peut faire décroître en cours d'exécution.

On pourrait sans problème chercher à suivre ces bords pour améliorer leur détection, par exemple par une technique de "seuillage par hystérésis". Les résultats présentés dans cet article n'ont pas fait appel à ce genre de méthode.



FIG. 4 - Une image, et la même image bruitée avec un bruit gaussien d'écart-type 20 (pour des valeurs de 0 à 255).

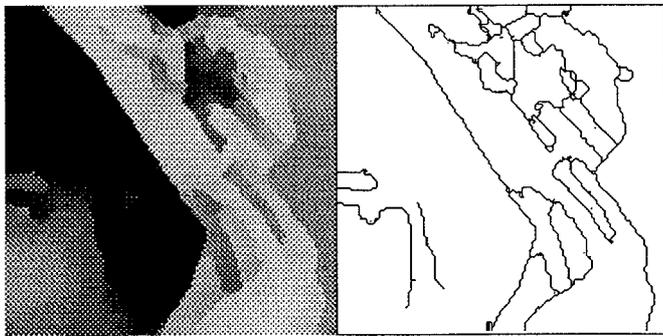


FIG. 5 - L'image bruitée reconstruite et les bords.

**Autres développements** De nombreuses variations peuvent être imaginées à partir de ces idées simples. Il devrait être intéressant par exemple d'étudier un filtrage de type Deriche avec paramètre d'échelle variable.  $\lambda$  (et  $\mu$ ) pourrait dépendre non seulement de la quantité de bruit, mais aussi par exemple du contraste local de l'image, ou de l'amplitude du gradient, estimé après un premier lissage à  $\lambda$  uniforme. Cette dernière possibilité a en réalité déjà été explorée par Charbonnier, Blanc-Féraud et Barlaud [CBFB92], et conduit à un algorithme à la fois simple et performant de restauration (cf figure 7).

<sup>2</sup>Ici la "bonne tenue" des bords et surtout des coins est surtout due à la discrétisation sur 5 points du laplacien : une meilleure discrétisation donnerait un résultat plus "isotrope" et des coins plus arrondis.

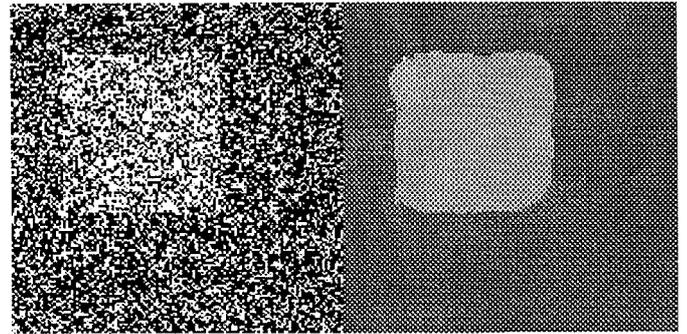


FIG. 6 - Un carré blanc sur fond noir très fortement bruité, et la reconstruction après détection des bords.

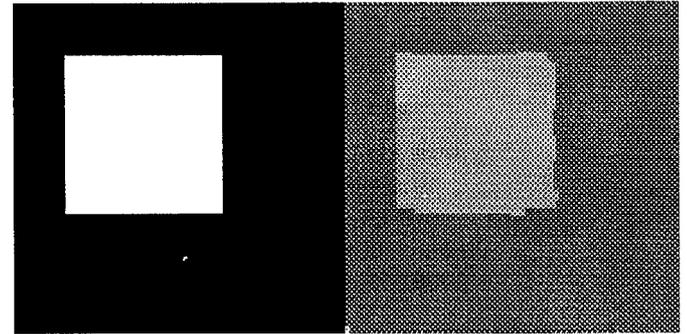


FIG. 7 - Le carré blanc sur fond noir original, et la reconstruction par une méthode inspirée de [CBFB92] à partir de la version bruitée de la figure 6<sup>2</sup>.

## Références

- [CBFB92] Pierre Charbonnier, Laure Blanc-Féraud and Michel Barlaud An adaptive reconstruction method involving discontinuities *Rapport de recherche 92-61*, Laboratoire I3S, Université de Nice-Sophia Antipolis, France. Nov. 1992.
- [BZ87] Andrew Blake and Andrew Zisserman. *Visual Reconstruction*. MIT Press, 1987.
- [Can86] John Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Trans. PAMI*, 8(6):679-698, 1986.
- [Cha93] Antonin Chambolle. Thèse: *Analyse mathématique de trois problèmes de reconstruction visuelle*. CEREMADE, Université de Paris-Dauphine, 75775 Paris Cedex 16, France, 1993.
- [Der87] Rachid Deriche. Using Canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector. *Internat. J. Comp. Vision*, pages 167-187, 1987.
- [MS85] David Mumford and Jayant Shah. Boundary detection by minimizing functionals, I. In *Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, San Francisco*, 1985. (also *Image Understanding*, 1988).