



DECONVOLUTION AVEC CONTRAINTES EN TEMPS REEL

Noureddine SOUILAH & Gérard THOMAS

Ecole Centrale de Lyon,
Dépt. M.I.S-LAGEP URA CNRS D 1328
BP 163 69131 Ecully Cédex, France

Nous considérons ici le problème de déconvolution d'un signal dégradé par un système linéaire invariant. Afin de régulariser ce problème qui est mal posé, notre approche consiste à combiner dans un contexte bayésien l'utilisation du filtre de Kalman et l'information a priori de type déterministe sur le signal à restaurer telle que la positivité. Ces contraintes traduites sous forme de non linéarités, sont introduites dans l'observation. Le problème de déconvolution résultant est celui du filtrage de Kalman non linéaire dont l'algorithme de résolution le plus connu est celui du filtrage de Kalman étendu (FKE). A ce propos, nous proposons deux méthodes de résolution. La première est basée sur une version itérative du filtre FKE (FKEI). La seconde repose sur le filtre FKE mais dont l'état est généré par une modélisation autorégressive (AR).

Afin de montrer l'efficacité des méthodes présentées ici, deux exemples numériques sont traités et les résultats obtenus sont comparés à ceux fournis par leurs versions standards.

1. INTRODUCTION

La déconvolution est le problème qui consiste à restituer au mieux (selon un critère choisi) un signal inconnu, à partir de sa version dégradée par convolution et bruitée. Ce problème est important en traitement du signal et d'image et se rencontre dans divers domaines de la physique expérimentale, en particulier celui de la métrologie. Ses diverses applications apparaissent en restauration d'image, en imagerie médicale, radio-astronomie, sismologie et spectroscopie, etc.

En toute généralité, ce problème présente de très grandes difficultés car c'est un problème inverse mal posé au sens de Hadamard [9]. La stabilité de la solution n'est plus alors garantie [9]. L'échec des méthodes de filtrage inverse, d'inversion généralisées et du filtrage de Wiener [1], ont conduit de nombreux auteurs à utiliser les techniques de régularisation [3,5] et du filtrage optimal de Kalman [6]. Une

The problem of deconvolving a signal distorted by a linear time-invariant system is considered. In order to regularize this ill-posed problem, our approach combined in a Bayesian framework the use of the Kalman filtering and the a priori knowledge such as positivity on the restored signal. By means of nonlinearity these constraints are introduced in the observation. So the deconvolution problem becomes a nonlinear filtering one which can be solved by the most popular extended Kalman filter (EKF) algorithm. For this purpose two methods are presented here. The first one is based on the iterated extended Kalman filtering (IEKF). The second one is also based on the EKF filter but the state is generated by an AR model in order to reduce the amount computation and to allow on line restoration.

In order to illustrate the efficiency of the exposed procedures, two numerical examples are given and results obtained are compared with those provided by their standard versions.

synthèse de ces travaux a été faite par Demoment [3].

Les techniques de régularisation jouent un rôle important dans l'obtention d'une solution acceptable. Elles consistent à apporter l'information supplémentaire de type **déterministe** et/ou **statistique** sur le caractère physique de la solution et l'information **statistique** sur le bruit de mesure. Bien que les méthodes algébriques soient attractives pour l'introduction des contraintes, notamment parce qu'elles sont itératives, elles ne permettent pas de contrôler l'effet du bruit [5]. Les méthodes stochastiques ont justement l'avantage d'utiliser explicitement les paramètres stochastiques du bruit [3]. De plus, la notion d'information a priori est compatible avec l'approche bayésienne, il est donc intéressant que l'extension stochastique du problème de déconvolution se fasse dans un cadre bayésien [3]. Dans ce cas, l'information a priori est introduite sous forme de **lois de probabilités** sur le signal à restaurer et



sur le bruit [3]. Une méthode bayésienne très utilisée en restauration des signaux et des images est la méthode du maximum a posteriori (MAP) [1]. Cette méthode qui donne de bons résultats, permet d'incorporer des contraintes de bornitude (e.g., positivité) sur la solution [2] et de traiter les systèmes de dégradation variants et non linéaires [1]. Toutefois, elle a l'inconvénient d'avoir un temps de traitement et de stockage en espace mémoire très importants. La méthode récursive du filtrage optimal de Kalman permet de remédier à l'algorithmique de la méthode MAP, de s'étendre au cas de signaux non stationnaires et des systèmes variants [4]. Elle offre notamment la possibilité d'un traitement en ligne nécessaire pour l'étude des processus réels. Malheureusement, son application à la restauration de signaux s'est limitée essentiellement au cas linéaire dont l'optimalité est due à l'hypothèse de gaussienneté [3], [4]. Or celle-ci ne permet pas de prendre en compte certaines propriétés physiques du signal inconnu telle que, la positivité. En effet, il est connu que l'introduction des contraintes de type bornitude sur la solution rend l'algorithme de restauration non linéaire [5]. Cette restriction a pour conséquence l'apparition des oscillations sur le signal restauré. Le manque en algorithmes de restauration non linéaires s'explique par deux raisons. La première, est la complexité de calcul de la solution. La deuxième, est la difficulté de l'évaluation des propriétés statistiques de l'objet original à cause de la non linéarité. L'une des rares tentatives de combiner le filtre de Kalman avec la contrainte de positivité pour la restauration de signaux a été réalisée par Tugnait [10].

Suite à nos travaux antérieurs [8] et ceux des références [7,10], nous proposons dans ce présent papier, deux méthodes de restauration **avec contraintes** (multiples) basées sur deux **versions non linéaires** du filtrage de Kalman [4]. L'algorithme de résolution le plus utilisé est celui du filtrage de Kalman étendu (FKE). Or il est connu que celui-ci peut diverger lorsque les conditions initiales sont mal choisies. Nous proposons pour remédier à cela deux méthodes de résolution. La première utilise une version itérative du filtre FKE (FKEI) bien connue pour sa stabilité et ses performances au sens de l'erreur moyenne quadratique (EMQ) [4]. La seconde

est une version rapide du filtre FKE obtenue grâce à une modélisation autorégressive de l'état. Elle permet donc de réduire le volume de calculs et d'avoir un traitement en ligne de la restauration. Nous supposons ici que le signal à restaurer vérifie certaines propriétés physiques, telle que la **positivité**.

Nous exposons le principe de ces méthodes aux paragraphes 2 et 3. Au paragraphe 4, nous présentons quelques résultats significatifs obtenus en simulations et nous concluons enfin au paragraphe 5.

2. Restauration des signaux avec contraintes utilisant le filtre FKEI:

Le modèle d'observation discret est donné par:

$$y_k = \sum_{i=k-P+1}^k u_i h_{k-i+1} + b_k; \text{ pour } k = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

où h est la réponse impulsionnelle de longueur P et u l'entrée inconnue qu'on cherche à estimer.

On choisit une non linéarité pour traduire la contrainte de **positivité**, cette non linéarité est placée dans l'observation de la représentation dans l'espace d'état choisie conformément à Demoment et al. [6]:

$$x_{k+1} = x_k \quad (2)$$

$$y_k = {}^t C_k f(x_k) + b_k \quad (3)$$

avec

$$x_k = {}^t \{x_1 \quad \dots \quad x_N\} \quad (4)$$

$${}^t C_k = \{0 \dots 0 h_P \dots h_1 0 \dots 0\} \quad (5)$$

y_k et b_k : observation et bruit de mesure scalaires. b_k est supposé blanc gaussien et indépendant de l'état initial x_0 . $f(\cdot)$ est une fonction positive non linéaire.

Le signal restauré est dans ce cas $f(\hat{x}_k)$ où \hat{x}_k est l'estimée du vecteur d'état (i.e., signal d'entrée) obtenue par le filtre FKEI. L'une des non linéarités utilisée est définie ci-dessous [10]:

$$\begin{aligned} f(v) &= 0 & \forall v < \beta \\ f(v) &= v & \forall v > \beta \\ f(v) &= \frac{(v+\beta)^2}{4\beta} & \forall v \in [-\beta; \beta] \end{aligned} \quad (6)$$

où β est un scalaire très petit devant 1, qui permet d'éviter les singularités.



3. Restauration des signaux avec contraintes basée sur le filtrage de Kalman étendu rapide (FKER):

On choisit la représentation d'état suivante:

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k v_k; \forall k > 0 \quad (7)$$

$$y_k = {}^t C_k f(x_k) + b_k \quad (8)$$

$$\text{où: } F_k = \begin{pmatrix} & & a^T \\ \dots & \dots & \dots \\ I_{(p-1) \times (p-1)} & : & 0_{(p-1) \times 1} \end{pmatrix} \quad a^T = [a_1, a_2, \dots, a_p]$$

$$G_k = {}^t \{1, 0, \dots, 0\}$$

Les coefficients a_i et la variance du bruit générateur du modèle AR (qui représente le signal inconnu), peuvent être estimés par une procédure de type maximum de vraisemblance ou moindres carrés classiques à partir d'un signal prototype [11].

4. RESULTATS

Nous présentons deux exemples de simulation numériques illustrant nos méthodes. Nous appelons ces exemples, exemple 1 et 2. Dans l'exemple 1 (fig. 1), le signal d'entrée qui possède un spectre large bande est fortement dégradé par le système linéaire de dégradation. Ce dernier représente un filtre passe-bas qui atténue les fréquences supérieures à la fréquence de coupure. Ce qui explique l'apparition des oscillations sur le signal restauré si aucune contrainte n'est appliquée (fig 2.A). L'exemple 2 (fig. 3) est un exemple de signaux lisses utilisés pour tester l'efficacité de la méthode FKER. La fonction donnée par (6) a été choisie pour satisfaire la contrainte de positivité. Afin de tester la robustesse de ces méthodes, nous avons ajouté aux exemples 1 et 2 un bruit de rapport signal à bruit (SNR) égale à 20 db. L'aptitude de ces méthodes à remédier aux oscillations est mis en évidence par comparaison aux résultats obtenus par leurs versions linéaires. La figure 2 montre les résultats obtenus sans contrainte (A) et avec contrainte au bout de deux itérations (B) à l'aide de la méthode FKEI sur l'exemple 1. Ceux obtenus par la méthode FKER (B) et sa version linéaire (A) sur l'exemple 2 sont illustrés sur la figure 4.

Les tableaux I et II comparent respectivement les performances de la méthode FKEI et de FKER par rapport à leurs versions linéaires, en termes de l'EMQ et de l'amélioration du rapport signal à bruit (SNRa), pour différentes valeurs de SNR.

5. CONCLUSION

Nous avons exposé deux procédures de déconvolution avec contraintes utilisant le filtrage de Kalman étendu. L'utilisation de fonctions non linéaires placées dans l'observation en vue de garantir certaines informations a priori sur le signal à restaurer telle la positivité a permis de remédier aux effets du mauvais conditionnement de l'opérateur de convolution et du bruit. Les deux méthodes proposées ici possèdent de meilleures performances en termes de l'EMQ et de l'amélioration du rapport signal à bruit. La version itérative (FKEI) permet notamment de mieux lisser le signal restauré au plus en deux itérations, d'améliorer le gain en SNR et de s'appliquer sur une grande classe de signaux d'entrées. La méthode FKER réduit le volume de calculs grâce à l'utilisation d'une modélisation AR et permet une restauration en ligne du signal d'entrée. Cette méthode offre la possibilité d'utiliser diverses contraintes. En effet, bien que les résultats présentés ici portent seulement sur la contrainte de positivité, nous avons montré au cours de nos travaux que cette méthode est capable de satisfaire d'autres contraintes, en particulier celle de niveau de bornes d'amplitudes qui contribue efficacement à l'extrapolation de la largeur de bande. Toutefois, cette méthode donne de bons résultats surtout sur des signaux lisses.

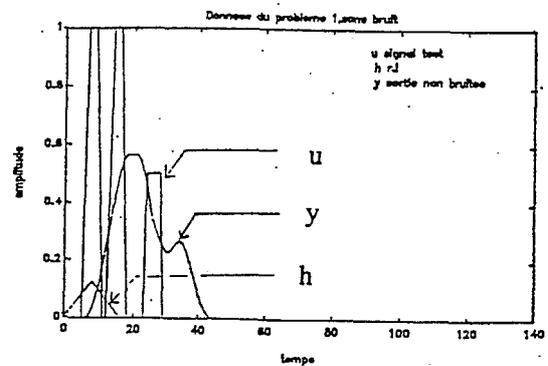


Fig 1. Signaux synthétiques de l'exemple 1

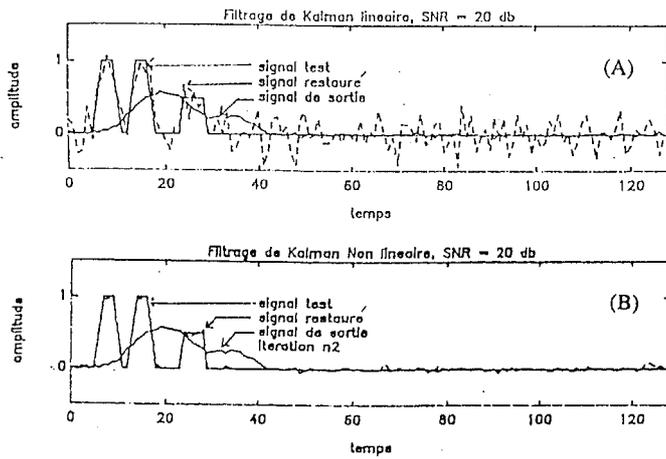


Fig 2. Résultats de restaurations obtenus sur l'exemple 1 (SNR = 20 db). (A) sans contrainte. (B) méthode FKEI

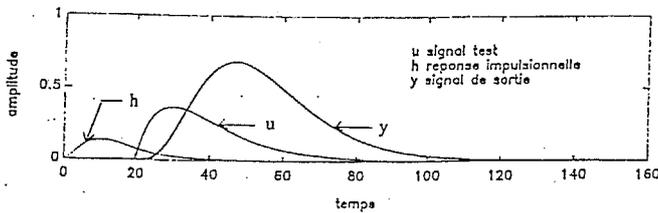


Fig 3. Signaux synthétiques de l'exemple 2.

| SNR (db) | EMQ linéaire | SNRa linéaire | EMQ FKEI | SNRa FKEI |
|----------|--------------|---------------|------------------------|-----------|
| 30 | 0.0085 | 8.81 | 1.566×10^{-4} | 26.14 |
| 20 | 0.0107 | 7.80 | 4.456×10^{-4} | 21.60 |
| 10 | 0.0149 | 6.35 | 0.0015 | 16.26 |

Tableau I : Comparaison des performances numériques obtenues par la méthode FKEI et sa version linéaire pour différentes valeurs de SNR sur l'exemple 1

| SNR (db) | EMQ linéaire | SNRa linéaire | EMQ FKER | SNRa FKER |
|----------|-------------------------|---------------|------------------------|-----------|
| 30 | 3.1967×10^{-4} | 17.22 | 7.160×10^{-5} | 23.72 |
| 20 | 4.7742×10^{-4} | 15.48 | 2.159×10^{-4} | 18.94 |
| 10 | 9.8958×10^{-4} | 12.32 | 4.314×10^{-4} | 15.90 |

Tableau II : Comparaison des performances numériques obtenues par la méthode FKER et sa version linéaire pour différentes valeurs de SNR sur l'exemple 2

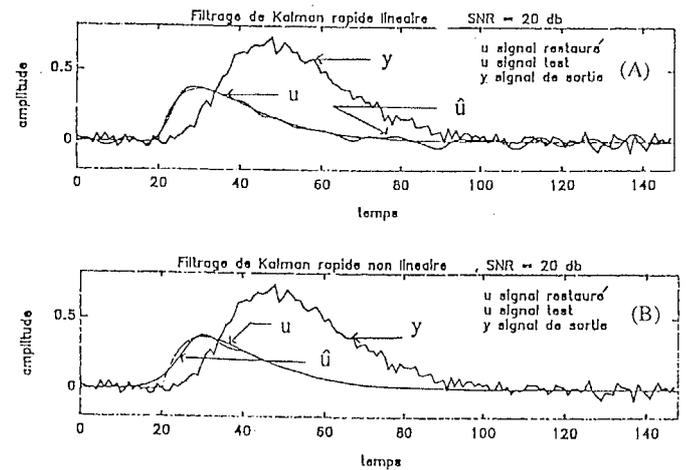


Fig 4. Résultats obtenus sur l'exemple 2 (SNR = 20 db). (A) méthode linéaire. (B) méthode FKER

Références

[1] Andrews H.C. and Hunt B.R., "Digital Image Restoration", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1977

[2] Commenges D., "The Deconvolution Problem: Fast Algorithms Including the Preconditioned Conjugate-Gradient to Compute a MAP Estimator", IEEE Trans. AC, vol.29, 1984, pp.229-243.

[3] Demoment G., "Image Reconstruction and Restoration: Overview of Common Estimation Structures and Problems", IEEE Trans. ASSP, vol.37, 1989, pp.202-2036

[4] Gelb A., "Applied Optimal Estimation", MIT. Press, 1974.

[5] Katsaggelos A.K., Biemond J., Schafer R.W. and Mersereau R.M., "A Regularized Iterative Image Restoration Algorithm", IEEE. Trans. ASSP, Vol.39, 1991, pp.914-929

[6] Saint-Felix D., Du X.C. and Demoment G., "Image deconvolution using 2-D non causal fast Kalman filter", in Proc. IEEE ICASSP, Tokyo (JAPAN), 1986, pp.2455-2458

[7] Schafer R.W., Mersereau R.M. and Richards M.A., "Constrained Iterative Restoration Algorithms", Proceedings of IEEE, Vol.69, 1981, pp.432-450

[8] Thomas G. and Souilah N., "Use of penalty function or Lagrangian multipliers for constrained deconvolution", in Proc. IEEE ICASSP, Albuquerque (USA), 1990, pp.1559-1562

[9] Tikhonov A.N. and Arsenine V.Y., "Solution of Ill-Posed Problems", New York: Halsted, 1977.

[10] Tugnait J.K., "Constrained signal restoration via iterated extended Kalman filtering", IEEE Trans. ASSP, Vol.33, 1985, pp.472-475

[11] Zhou Y., Chellappa R. & Bekey G., "Estimation of Intramuscular EMG Signals from Surface EMG Signal Analysis", in Proc. IEEE ICASSP, Tokyo (JAPAN), 1986, 1805-1808.