



## SYNTHÈSE D'OUVERTURE EN RADIO-ASTRONOMIE : COMPARAISON D'ALGORITHMES ET RÉGULARISATION

J.L. Burdeau<sup>+</sup>, P. Esmingeaud\*, R. Prost\*

\*Laboratoire Traitement du Signal et Ultrasons, URA CNRS 1216,  
INSA Lyon Bât. 502, 20 avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne cedex - France

<sup>+</sup>INSA Lyon et INT 9, rue Charles Fourier 91011 EVRY cedex

RÉSUMÉ

ABSTRACT

Ce travail concerne le problème de la déconvolution en synthèse d'ouverture. Nous proposons d'adapter à ce problème un algorithme itératif qui incorpore une contrainte de positivité et de support par un opérateur non linéaire ainsi qu'une contrainte de régularité de l'objet reconstruit. Un paramètre de relaxation assure la convergence ou minimise, à chaque itération, une fonctionnelle positive de l'erreur. Le paramètre de régularisation est estimé par validation croisée.

Une simulation réaliste montre que dans un contexte de régularité identique l'algorithme CLEAN de Steer et al. a des performances moindres que celles de l'algorithme proposé qui, de plus, ne nécessite pas un lissage arbitraire de l'objet.

This work addresses the deconvolution problem of aperture synthesis. The adaptation of an iterative algorithm with both positivity/support constraints, incorporated by a non linear operator, and a regularity constraint on the reconstructed object is presented. A relaxation parameter is either fixed to ensure convergence or it is computed at each step in order to minimize a positive functional of the error. The regularization parameter is evaluated by cross-validation. The simulation of a realistic problem shows that for similar regularity, the reconstructed object has a better quality than the Steer et al. CLEAN restored one without the requirement of an arbitrary gaussian filtering process.

### 1. INTRODUCTION. LA SYNTHÈSE D'OUVERTURE

En radio-astronomie, un des objectifs est de reconstruire la distribution de luminosité radio d'une région du ciel afin de détecter des objets de plus en plus lointains à des résolutions très fines.

La résolution d'un radio-télescope est donnée par  $r = \lambda/D$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde observée,  $D$  le diamètre du télescope. Ainsi l'amélioration de la résolution nécessite l'augmentation de son diamètre. Des considérations mécaniques et financières limitent les diamètres des systèmes actuels. Une solution a pu être trouvée avec la mise en oeuvre d'interféromètres. Une grande antenne peut alors être synthétisée par plusieurs réflecteurs de petite dimension utilisés en mode interférométrique. La procédure consiste alors à calculer l'intercorrélation  $T_{12}(\tau)$  des signaux reçus par deux antennes  $A_1$  et  $A_2$ .  $T_{12}(0)$  représente un point de la transformée de Fourier de la brillance de la source pour les fréquences spatiales  $u_{12} = (x_1 - x_2)/\lambda$  et  $v_{12} = (y_1 - y_2)/\lambda$  où  $x_i$  et  $y_i$  représentent les coordonnées des antennes projetées sur le plan  $P$  orthogonal à la direction moyenne d'observation. Afin d'avoir un nombre suffisant de données on utilise un réseau d'antennes, chaque couple constituant une ligne de base. En utilisant au moins 3 radio-télescopes, on peut compenser les erreurs de phase introduites par l'atmosphère, cette technique est appelée fermeture de phase. Avec 4 radio-télescopes on peut s'affranchir des fluctuations d'atténuation par fermeture d'amplitude. En déplaçant les antennes et en utilisant la rotation de la Terre on va construire une image du ciel à partir de données incomplètes dans le domaine de Fourier.

Le problème de la reconstruction est un problème 'mal posé'. Pour se ramener à un problème 'bien posé' on apporte une connaissance a priori sur les solutions, cela permet de réduire l'espace des solutions admissibles.

Dans le paragraphe 2 nous modélisons la formation de l'image, puis dans le paragraphe 3 nous décrivons sommairement l'algorithme CLEAN modifié par Steer et al (la version de base de Högbom est utilisée traditionnellement par les astronomes). Dans le paragraphe 4 nous développons des algorithmes itératifs qui intègrent les informations a priori sur l'objet par des contraintes et enfin une simulation réaliste permet la comparaison des performances de ces algorithmes.

### 2. MODÉLISATION DE LA FORMATION DE L'IMAGE.

Soit  $X(k,l)$  la Transformée de Fourier Discrète (TFD) de la brillance de l'objet observé ( $k=0, \dots, N-1$ ;  $l=0, \dots, N-1$ ).

La fonction de transfert du système interférométrique idéal peut être définie par:

$$\begin{aligned} H(k,l) &= 0 & k,l \notin \text{une ligne de base} \\ H(k,l) &= 1 & k,l \in \text{une ligne de base} \end{aligned}$$

Un modèle plus réaliste consisterait à prendre en compte le temps d'intégration du corrélateur pour chaque ligne de base en attribuant un poids croissant avec ce temps. Cependant cette solution est très variable avec les conditions expérimentales et limiterait la portée de ce travail.

Nous modélisons les erreurs de calibration, de fermeture de phase et d'amplitude, par un bruit multiplicatif complexe sur l'image originale:



$$N_m(k,l) = \rho(k,l)e^{j\varphi(k,l)} \quad k,l \in \text{une ligne de base}$$

$$N_m(k,l) = 0 \quad k,l \in \text{une ligne de base}$$

$\varphi(k,l)$  est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance  $\sigma_\varphi^2$ .

$\rho(k,l)$  est une variable aléatoire gaussienne de moyenne unitaire et de variance  $\sigma_\rho^2$ .

La TDF de l'objet dégradé par le bruit multiplicatif s'écrit:

$$X_m(k,l) = X(k,l) \cdot N_m(k,l) \quad (1)$$

La TFD de la brillance de l'image sera définie par:

$$Y(k,l) = H(k,l) \cdot X_m(k,l) + N(k,l)$$

où  $N(k,l)$  est un bruit additif gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma_N^2$  introduit essentiellement par les circuits électroniques ( $k,l \in$  une ligne de base).

$N_m(k,l)$ ,  $N(k,l)$  satisfont les conditions de symétrie hermitique afin que leur TFD inverse soient réelles.

Dans nos simulations le rapport signal à bruit global sera évalué par:

$$\text{SNR} = 10 \log \left[ \frac{\left( \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} |Y_i(k,l)|^2 \right)}{\left( \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} |Y(k,l) - Y_i(k,l)|^2 \right)} \right] \quad (2)$$

où  $Y_i(k,l)$  serait la TFD de l'image obtenue avec un système interférométrique sans erreurs:

$$Y_i(k,l) = H(k,l) \cdot X(k,l)$$

L'image  $y(m,n)$  ( $m,n=0, \dots, N-1$ ) obtenue par synthèse d'ouverture est la TFD Inverse (TFDI) de  $Y(k,l)$ . Il vient:

$$y(m,n) = h(m,n) * x_m(m,n) + n(m,n)$$

où

- \* note la convolution circulaire 2-D

-  $h(m,n)$  est la TFDI de  $H(k,l)$  (fonction de point du système interférométrique).

-  $x_m(m,n)$  est l'objet bruité de TFD définie par (1)

L'équation de convolution peut s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$y = Hx + n \quad (3)$$

où  $y$  est la matrice colonne ( $N^2 \times 1$ ) des colonnes de l'image,  $x$  la matrice colonne ( $N^2 \times 1$ ) des colonnes de l'objet bruité  $x_m$  (bruit multiplicatif seul) et  $H$  est une matrice circulante ( $N^2 \times N^2$ ) de blocs circulants  $N \times N$ , construite avec la fonction de point  $h(m,n)$ .

Le calcul de l'objet, connaissant l'image et l'opérateur  $H$ , a une infinité de solutions, même si  $n=0$ , car  $H$  est une matrice singulière. En effet ses valeurs propres sont les coefficients  $H(k,l)$  de la fonction de transfert idéale et celle-ci possède un grand nombre de valeurs nulles. Les trous fréquentiels ne peuvent être comblés que grâce à un apport d'information a priori sur l'objet. Nous utiliserons les informations suivantes:

- le support de l'objet est borné, connu a priori. Il est dans le "lobe" à -3dB d'une antenne élémentaire du réseau, ou choisi par l'astronome.

- la brillance de l'objet est une grandeur positive.

- l'objet est "lisse" mais le degré de régularité n'est pas connu a priori. Si  $D$  est un opérateur de mesure de rugosité (filtre passe-haut) nous avons  $\|Dx\|^2 \leq r^2$ .

Compte tenu que nous allons reconstruire l'objet dégradé par le bruit multiplicatif, les hypothèses de support borné et de positivité ne restent vraies que pour un bruit multiplicatif faible.

### 3. L'ALGORITHME CLEAN

Dans la version CLEAN de Högbom on suppose que l'objet est constitué d'un ensemble de sources ponctuelles, Steer et al. [1] considèrent des objets constitués d'amas de sources ponctuelles ce qui permet d'accélérer considérablement la vitesse de convergence et la qualité de l'objet reconstruit. Nous y avons ajouté une contrainte de support borné. Une description sommaire de cet algorithme est donnée ci-dessous.

On initialise l'objet reconstruit à zéro et le résidu (erreur sur l'image reconstruite) avec l'image originale. A chaque itération on conserve les points de l'image du résidu situés au-dessus d'un niveau fixé arbitrairement (niveau de contour). Après multiplication par un facteur d'échelle ces points sont ajoutés à ceux déjà retenus aux itérations précédentes afin de reconstruire l'objet. Ce dernier est alors convolué avec la fonction de point du radiotélescope pour obtenir une image qui sera soustraite à l'image de départ. L'image résiduelle obtenue est utilisée à l'itération suivante. Le processus s'arrête quand les points restants n'ont plus un niveau suffisant. L'objet reconstruit est alors lissé par un filtre à réponse impulsionnelle gaussienne puis on lui ajoute l'image résiduelle.

### 4. ALGORITHMES ITERATIFS AVEC CONTRAINTES.

Nous proposons l'utilisation d'une méthode de régularisation. L'espace des solutions admissibles est réduit en fixant les contraintes suivantes:

$$\|Hx - y\|^2 \leq \|n\|^2 \quad \text{et} \quad \|Dx\|^2 \leq r^2$$

L'énergie du bruit ainsi que la régularité (rugosité) ne sont pas connus a priori. Miller a montré que la solution de (3) au sens des moindres carrés qui satisfait les contraintes ci-dessus est celle qui minimise:

$$\|Hx - y\|^2 + \lambda \|Dx\|^2$$

où  $\lambda$  est le paramètre de régularisation. Ce paramètre contrôle le compromis entre le degré de régularité de l'objet et la proximité aux données. D'après Miller:

$$\lambda = \|n\|^2 / r^2$$

et l'approximation  $x^+$  de  $x$  est solution des équations normales:

$$(H^T H + \lambda D^T D) x^+ = H^T y$$

posons

$$Ax^+ = z \quad (4)$$

avec  $A = H^T H + \lambda D^T D$  et  $z = H^T y$

La solution de (4) existe si  $A$  est inversible, c'est-à-dire si  $D$  a un inverse borné. Dans ce cas  $A$  est définie positive dans l'espace des solutions admissibles.

Dans notre application la matrice  $D$  est une matrice circulante de blocs circulants de façon à conserver cette propriété de  $A$ .

Nous supposons, dans un premier temps, que le paramètre  $\lambda$  est connu.

Nous résolvons (4) à l'aide d'un algorithme itératif [2] avec contraintes dites "dures" de la forme:

$$x^{(n)} = Cx^{(n-1)} + \mu^{(n)}V^{(n)}$$

où  $C$  est un opérateur de contrainte, variant non linéaire, forçant à zéro les composantes de  $x^{(n-1)}$  en dehors du support de  $x$  ainsi que celles qui sont négatives. On vérifie facilement qu'il s'agit d'un opérateur de projection sur l'ensemble convexe des objets positifs à support borné. C'est donc un opérateur non expansif.

Le coefficient de relaxation  $\mu^{(n)}$  ainsi que  $V^{(n)}$  sont calculés de façon à:

- a) assurer la convergence  
on prendra

$$V^{(n)} = z - ACx^{(n-1)}$$

alors

$\mu^{(n)} = \mu = \text{constante}$  et  $0 < \mu < 2\|A\|^{-1}$  (Th de Bialy)  
nous avons choisi

$$\mu = 1 / \max(|H(k,l)|^2 + \lambda|D(k,l)|^2)$$

Cet algorithme est alors équivalent à celui proposé dans [3]

- b) minimiser une fonctionnelle positive de l'erreur[2]

$$J^{(n)} < J^{(n-1)} \quad \text{avec } J^{(n)} = 1/2 \varepsilon^{(n)T} A \varepsilon^{(n)}$$

avec

$$\varepsilon^{(n)} = x - x^{(n)}$$

alors[3]

$$\mu^{(n)} = \frac{V^{(n)T} E_C^{(n-1)}}{V^{(n)T} A V^{(n)}}$$

$$V^{(n)} = E_C^{(n-1)}$$

où  $E_C^{(n-1)}$  est l'erreur observable à l'étape (n-1).

$$E_C^{(n-1)} = z - ACx^{(n-1)}$$

Le paramètre de régularisation est estimé, avant le calcul itératif, par le minimum d'un estimateur de la fonction de validation croisée[3] [4] [5] :

- a) fonction de validation croisée généralisée:

$$V_1(\lambda) = \frac{\|y - Hx^+\|^2}{(\text{trace}(I - HH^*))^2}$$

avec

$$x^+ = H^+y \quad \text{et} \quad H^+ = A^{-1}H$$

$I$  est la matrice unitaire.

Dans le domaine de Fourier  $V_1(\lambda)$  se ramène à:

$$V_1(\lambda) = \frac{1/N^2 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} |Y(k,l)|^2 G^2(k,l)}{\left( \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} G(k,l) \right)^2}$$

$$\text{avec } G(k,l) = \frac{\lambda|D(k,l)|^2}{|H(k,l)|^2 + \lambda|D(k,l)|^2}$$

Cet estimateur suppose que le bruit sur les données est additif, gaussien et blanc. Il ne s'est pas révélé très efficace dans notre application. Nous avons préféré utiliser les approximations suivantes.

- b) Minimum de l'erreur quadratique

$$V_2(\lambda) = \|y - Hx^{(n)}\|^2$$

où  $x^{(n)}$  est obtenue par les algorithmes précédents (n fixé a priori).

- c) Estimateur heuristique de la validation croisée généralisée

$$V_3(\lambda) = \frac{\|y - Hx^{(n)}\|^2}{\|\delta - H\delta^{(n)}\|^2}$$

$\delta^{(n)}$  est l'objet estimé à l'itération n qui donnerait une image ponctuelle  $\delta$ .

## 5. SIMULATIONS ET RESULTATS.

La figure 1 représente la fonction de transfert  $H(k,l)$  du système interférométrique. Nous avons simulé un objet  $64 \times 64$  d'intérêt en radioastronomie représenté sur la figure 2. Sa régularité est mesurée par un opérateur  $D$  de type Laplacien. L'écart type du bruit additif est de 20%, l'écart type du bruit de phase est de  $5^\circ$  et celui du bruit d'amplitude de 1%. Il en résulte un rapport signal à bruit calculé à partir de la formule (2) de 13,3dB. L'image obtenue par synthèse de Fourier est donnée par la figure 3. Elle donne une représentation de l'objet à faible résolution.

Le traitement par l'algorithme CLEAN décrit dans le paragraphe 3 conduit à une estimation de l'objet représentée sur la figure 4a après 29 itérations (arrêt automatique de l'algorithme lorsque la décroissance relative de l'erreur est de  $10^{-4}$ ). Le support choisi est idéal puisque c'est un rectangle dans lequel s'inscrit l'objet. L'estimation de l'objet ainsi obtenu est plus irrégulière que celle de l'objet initial. Dans le meilleur des cas l'astronome pourra espérer lisser cet objet avec une gaussienne telle que la régularité finale soit identique à celle de l'objet initial (en pratique ceci est impossible). Il obtiendra alors l'objet estimé de la figure 4b auquel on a ajouté la carte résiduelle.

Les traitements, pour un support et un test d'arrêt identiques à ceux de CLEAN, à l'aide des algorithmes définis au paragraphe 4 en a) et b) donnent de meilleurs résultats. L'algorithme b) offre une vitesse de convergence beaucoup plus rapide que l'algorithme a) sans surcoût significatif de calcul à chaque itération. L'image obtenue avec b) est représentée sur la figure 5 (14 itérations). L'estimateur utilisé pour la validation croisée est l'estimateur  $V_3(\lambda)$ .

L'erreur quadratique finale obtenue par l'algorithme b) est inférieure de 37% à celle de CLEAN. L'aspect général de l'objet est mieux reconstruit par l'algorithme b), les artefacts locaux sont plus faibles.

## 6. CONCLUSIONS

Dans cette étude l'objet reconstruit comporte toujours une erreur due au bruit de phase et d'amplitude. Il serait nécessaire d'incorporer l'algorithme de déconvolution dans une boucle d'autocalibration qui corrige ces erreurs [6]. Une nouvelle itération sur l'objet permettrait une meilleure estimation car les hypothèses de positivité et de support borné seraient mieux vérifiées. Bien que ces hypothèses ne soient pas totalement vérifiées l'algorithme b) donne des meilleurs résultats que l'algorithme CLEAN de Steer qui est l'une des versions les plus avancées.



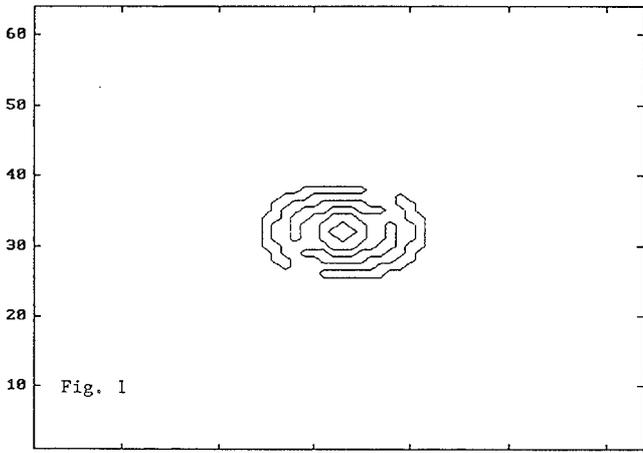
Ce travail est réalisé dans le cadre du programme ULTIMATECH du CNRS et du GDR 134, GRECO CNRS TDSI groupe GT5.

Nous remercions Mr S.Guilloteau (IRAM Grenoble) pour ses conseils dans le choix des objets et des valeurs numériques.

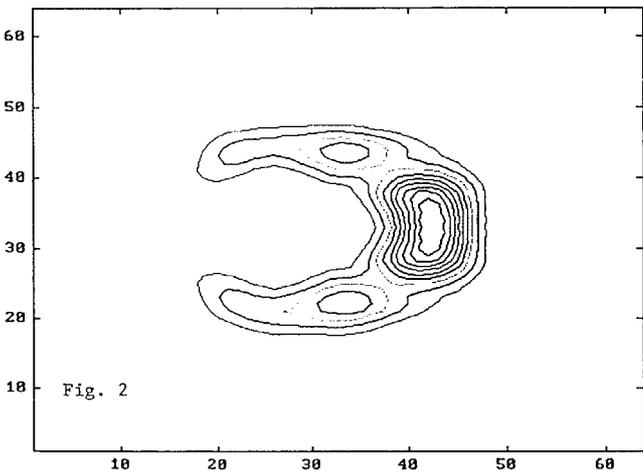
**7.REFERENCES**

- [1] D. G. Seer, P. E. Dewdney, M. R. Ito, "Enhancement to the deconvolution algorithms Clean" *Astron. Astrophys.* Vol. 137, P. 159-165, 1984.
- [2] R. Prost, R. Goutte, "Discrete constrained iterative deconvolution algorithms with optimised rate of convergence", *Signal Processing*, Vol. 7, n°3, p.209-230, 1984.
- [3] A. K. Katsaggelos, J. Biemond, R. W. Shafer, R. M. Mersereau, "A regularized iterative image restoration algorithm", *IEEE Trans. on signal Processing*, Vol. 39, n°4, p.914-929, 1991.
- [4] M. P. Galatsanos, A. K. Katsaggelos, "Methods for choosing the regularization parameter and estimating the noise variance in image restoration and their relations", *IEEE Trans. on image Processing*, Vol.1 ,n°3, p.322-336, 1992.
- [5] G. Demoment, "Image reconstruction and restoration: Overview of common estimation problems", *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing*, Vol.37, P.2024-2036, 1989.
- [6] A. Lannes, "Remarkable algebraic structures of phase-closure imaging and their algorithmic implication in aperture synthesis", *J. Opt. Soc. Am.*, Vol.7, n°3, p. 500-512, 1990.

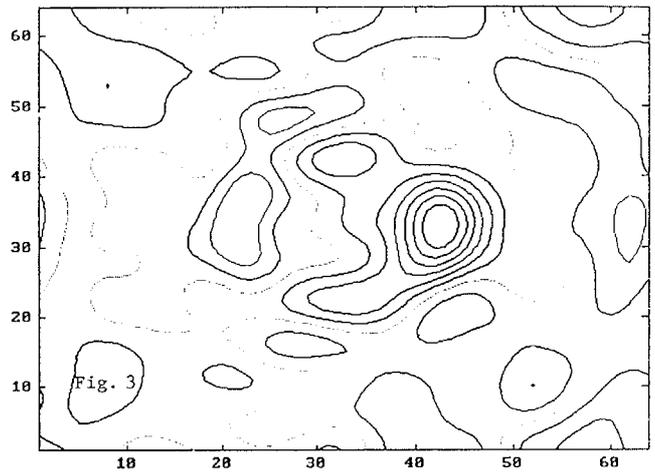
fonction de transfert



objet initial



image



objet reconstruit par CLEAN -non lissé-

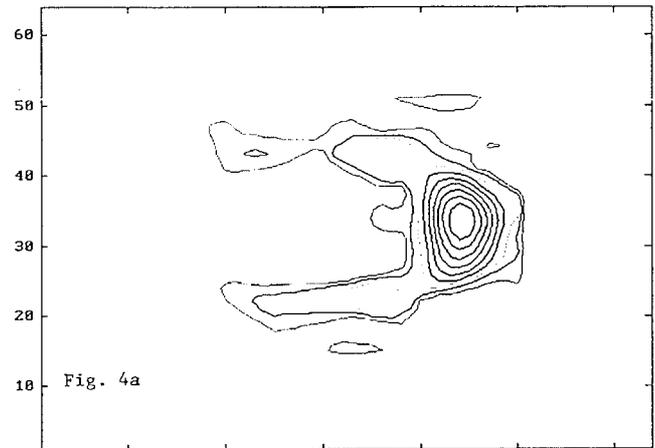
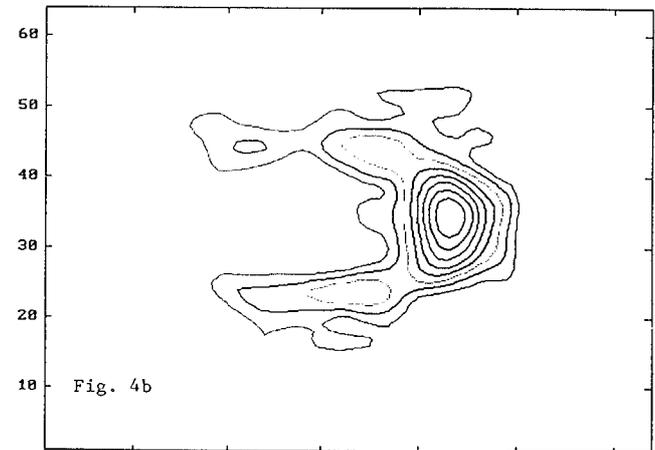


image lissée par une gaussienne + carte résiduelle



objet reconstruit par l'algorithmne itératif avec contraintes b)

