

# Quelques résultats expérimentaux concernant deux approches différentes du problème de déconvolution myope

Maxime Bulo, Patrice Simard

Université de Technologie de Compiègne  
U.R.A. n° 817, Heudiasyc, B.P 649  
60206 Compiègne, Cedex

## RÉSUMÉ

Il est connu que les performances des méthodes de traitement du type déconvolution dépendent fortement d'une part de la crédibilité des hypothèses adoptées vis-à-vis du problème réel traité, et d'autre part de l'efficacité et la robustesse des techniques utilisées relativement à ces hypothèses. Le but de cet article consiste à montrer sur la base des résultats obtenus sur des signaux synthétisés et des essais réels, la supériorité des méthodes bayésiennes de déconvolution myope par rapport aux méthodes fondées sur l'identification du modèle de prédictor de Kalman pour la plupart.

## ABSTRACT

It is well-known that performance of the deconvolution methods depend strongly, on one hand of the credibility of adopted hypothesis towards the real problem, and on the other hand of the efficiency and robustness of techniques used relative of these hypothesis. The goal of this paper consist in showing over the base of results obtained on the synthetique and real signals, the superiority of Bayesian myopic deconvolution methods based on the identification of a Kalman predictor model.

## 1 Introduction

Le problème qui se pose le plus fréquemment en physique expérimentale est celui de restauration d'un objet  $\mu(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$  à partir des observations :

$$z(t) = (K\mu)(t) = \int_{\Omega} k(t, \tau)\mu(\tau)d\tau \quad (1)$$

où  $K$  est une transformation linéaire du type Radon, Convolution etc. Le noyau de cette équation intégrale représente physiquement le déplacement d'un flux d'énergie dans un milieu stimulé par une excitation initiale sous la forme d'une onde qui se propage. Lorsque ce noyau est une fonction de la différence de ces arguments  $k(t, \tau) = k(t - \tau)$  le processus d'estimation de  $\mu(t)$  est appelé de façon appropriée la déconvolution. Parmi les différentes approches envisageable de régularisation de ce problème mal-posé, les méthodes probabilistes ou les extensions stochastiques de l'équation (1) constituent le cadre privilégié des résultats qui seront présentés.

Ces méthodes consistent non seulement à introduire un terme de bruit  $b(t)$  qui résume aussi bien les erreurs de modélisation que expérimentales, mais également à considérer la propriété à restaurer  $\mu(t)$  comme la réalisation d'un processus stochastique. Souvent, dans la pratique l'onde propagée et les statistiques des processus intervenant dans (1) ne sont pas connus. On parle alors de la déconvolution myope. Dans cette article nous nous proposons de présenter et de comparer deux approches radicalement différentes de résolution de ce problème.

La première comporte les méthodes que nous appellerons issues de l'automatique et du contrôle, tandis que la deuxième englobe les méthodes dites méthodes bayésiennes d'inversion. Nous commencerons par présenter la philosophie des algorithmes classiques en provenance de l'automatique, avant d'aborder les méthodes fondées sur l'usage de la fonction de la vraisemblance généralisée. Ensuite nous allons pouvoir juger de leurs qualités en les appliquant sur des signaux synthétisés et réels.

## 2 Principes des algorithmes étudiés

L'équation (1) après l'avoir discrétisée, peut se représenter d'une manière générale par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} x_{i+1} &= \Phi x_i + \Gamma \mu_i \\ z_i &= H x_i + b_i \end{cases} \quad (2)$$

où  $\Phi, \Gamma, H$  caractérisent l'onde propagée (réponse impulsionnelle du système). De cette représentation, il est clair que le problème d'estimation de la réflectivité  $\mu(t)$  se traduit en un problème d'estimation d'un bruit dans l'équation d'état. Cela ne peut se réaliser qu'après avoir résolu le problème d'identification de l'ondelette, ensuite celui d'estimation des hyperparamètres, à savoir la variance du bruit de mesure  $R$ , et celle de réflectivité  $Q$ . L'étape d'identification peut être abordée de plusieurs manières, et nous avons retenu les techniques de corrélation. Dans cette catégorie, nous avons choisi de présenter et d'utiliser quelques algorithmes dus à Mehra



Tse et al [3], et Mahalanabis et al. [4]. Ces corrélations peuvent être celles des observations ou celles des innovations. Le premier algorithme [2] utilise la fonction d'autocorrélation des observations pour estimer les coefficients  $a_i$  du polynôme caractéristique de la matrice de transition  $\Phi$  à l'aide des équations de Yule-Walker généralisées pour le cas d'une matrice de Hankel. On peut résumer cet algorithme par l'enchaînement des étapes suivantes :

### Algorithme 1

- calcul des coefficients  $a_i$  du polynôme caractéristique de  $\Phi$ . Pour cela on calcule d'abord l'autocorrélation  $r$  de  $z$  pour des retards  $k = 0, \dots, 2n$  où  $n$  est l'ordre du modèle. Ensuite on construit la matrice de Hankel  $Y$  à partir du vecteur  $[r_1, r_2, \dots, r_{2n-1}]$ . Enfin, on calcule  $a$  par  $a = Y^{-1}[r_{n+1}, r_{n+2}, \dots, r_{2n}]^t$
- calcul de la variance du bruit de mesure par  $R = (1/a_1) \sum_{k=1}^{n+1} a_{i+1} r_i$  avec  $a_{n+1} = 1$
- calcul du vecteur  $\Gamma$  par la résolution couplée de  $PH^t = G$  et de l'équation de Lyapunov  $P = \Phi P \Phi^t + \Gamma \Gamma^t$

où  $P$  est la matrice de covariance du vecteur d'état. Bien que cet algorithme permette un calcul en ligne des coefficients  $a_i$ , il a été démontré que son efficacité était limitée au cas autorégressif pur. Une façon de contourner la difficulté consiste à s'autoriser un retard de lissage. Par ailleurs, ce même algorithme peut être amélioré en évaluant la matrice  $\Gamma$  et la covariance du bruit à l'aide d'un prédicteur de Kalman de la forme suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}_{i+1/i} &= \Phi[\hat{x}_{i/i-1} + K\nu_i] \\ z_i &= H\hat{x}_{i/i-1} + \nu_i \end{cases} \quad (3)$$

Le principe de ce deuxième algorithme [1], est similaire à celui des techniques de blanchissement, et consiste à utiliser la séquence d'innovation, en optimisant le gain de Kalman, de façon à la rendre blanche. L'avantage de cet algorithme par rapport au premier est qu'il est moins sensible aux erreurs d'estimation en raison de la nature moins corrélée de l'innovation par rapport à l'observation. De plus il nécessite moins de paramètres à estimer, et notamment on n'a pas besoin d'estimer la variance du bruit d'état (de la séquence recherchée).

### Algorithme 2

- démarrer avec un gain de Kalman  $K_0$  et filtrer les observations utilisant le modèle du prédicteur (2) avec  $K = K_0$
- calculer l'autocorrélation de la séquence d'innovation  $c$  et tester sa blancheur
- si  $\nu$  n'est pas blanche, réactualiser le gain du filtre de Kalman par :

$$K_1 = K_0 + \begin{bmatrix} H\Phi & & & \\ H\Phi(I - K_0H)\Phi & & & \\ \vdots & & & \\ H[\Phi(I - K_0H)]^{n-1}\Phi & & & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \vdots \\ \hat{c}_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

où  $\hat{c}$  est l'autocorrélation normalisée de  $\nu$

- répéter la même procédure jusqu'à ce que  $\nu$  soit blanche

Enfin le dernier algorithme du à Tse et Weinert [3] et repris beaucoup plus tard par Mahalanabis et al. [4], reprend le formalisme précédent, en tirant parti d'un théorème permettant d'obtenir une solution itérative du gain de Kalman, de la covariance du vecteur d'état et de la variance d'innovation. Il peut être résumé à chaque itération par l'ensemble des étapes présentées ci-dessous.

### Algorithme 3

- mise à jour de la variance de la séquence d'innovation par  $\eta_i = r_0 - HP_iH^t$
- mise à jour du gain par  $K_i = (r - \Phi P_i H^t) \eta_i^{-1}$
- mise à jour de la matrice de covariance du vecteur d'état par  $P_{i+1} = \Phi P_i \Phi^t + K_i \eta_i K_i^t$

En ce qui concerne les méthodes bayésiennes, les caractéristiques de la réflectivité traduites par l'intermédiaire d'une loi de probabilité **a priori** retiennent une solution par maximum **a posteriori**. La combinaison de l'information a priori qui vient s'ajouter à l'information apportées par les données permet d'obtenir à l'aide de la règle de Bayes la loi a posteriori de la solution. Différentes solutions du problème de ce point de vue bayésien sont alors envisageables selon que l'on maximise cette loi a posteriori par rapport à la solution, ou que l'on utilise l'estimation en moyenne conditionnelle ou celle minimax.

Selon la représentation choisie pour le système, on distingue deux grandes familles de déconvolution myope. Les méthodes dues à Kormylo et Mendel [5] dans lesquelles le modèle est du type ARMA, et les méthodes dues à Goussard et Demoment [6] dans lesquelles il s'agit d'un modèle du type MA dégénéré. On trouvera une description détaillée de ces algorithmes dans [5, 6].

## 3 Application sur des signaux test et réels

Afin de tester les performances des algorithmes évoqués dans la section précédente, il convient tout d'abord d'analyser leurs comportements sur des signaux de type test générés conformément aux hypothèses de départ. Pour ce faire nous avons synthétisé le signal à déconvoluer par la convolution de l'ondelette de Kramer avec une séquence Bernoulli-Gaussienne de paramètre  $\lambda = 0.05$ , l'ensemble étant noyé dans un bruit de distribution gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_b^2 = 0.001331$ . Le signal ainsi fabriqué possède un rapport signal à bruit de 10db.

Sur la figure 1 sont présentés les résultats obtenus par le premier algorithme. En haut nous avons juxtaposé l'ondelette estimée (trait en pointillée) avec l'ondelette de Kramer (trait en continu). En dessous apparaît la réflectivité estimée par un lissage d'intervalle fixe (trait en continu). Les vrais événements sont indiqués par des ronds. La variance du bruit de mesure obtenue par cette méthode est  $\sigma_b^2 = 0.005$ . On observe une estimation plus au moins acceptable malgré une très mauvaise estimation de l'ondelette. Ceci est du à la nature très informative de la séquence d'innovation fournie



par le filtre de Kalman, qui est du à son tour à une composante très impulsive de l'ondelette de Kramer. Ces résultats se détériorent rapidement lorsque l'ondelette devient de moins en moins riche spectralement [7].

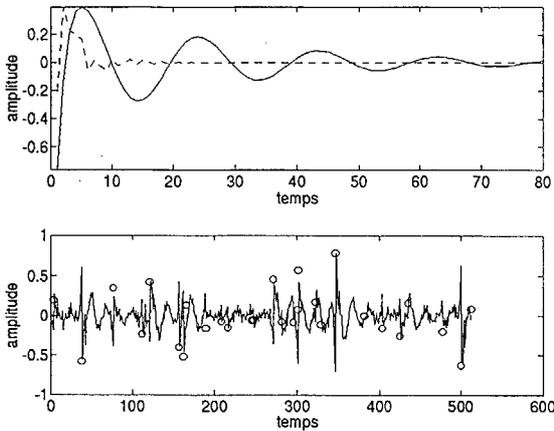


Figure 1

La figure 2 présente les résultats obtenus par le deuxième et troisième algorithme respectivement, utilisant les mêmes paramètres que ceux fournis par le premier algorithme. On constate comme la théorie le prévoit de meilleures performances par rapport au premier algorithme. Le deuxième algorithme de Mehra (figure 2 en haut) se comporte légèrement mieux que celui de Tsè et Wienert.

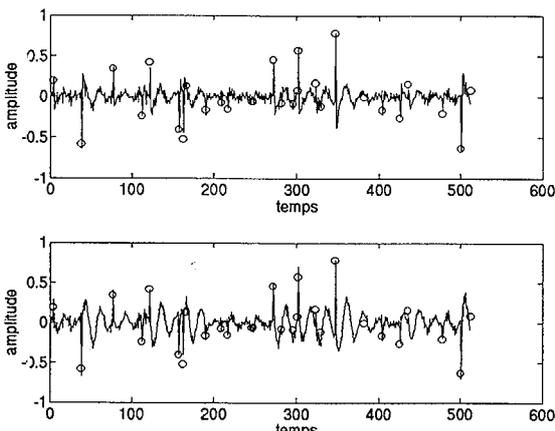


Figure 2

Les figures 3 et 4 vont permettre d'observer le comportement des méthodes bayésiennes dans le même cas que précédemment (cas myope). La figure 3 montre l'estimation de l'ondelette après huit , et seize itérations respectivement (courbes en pointillé).

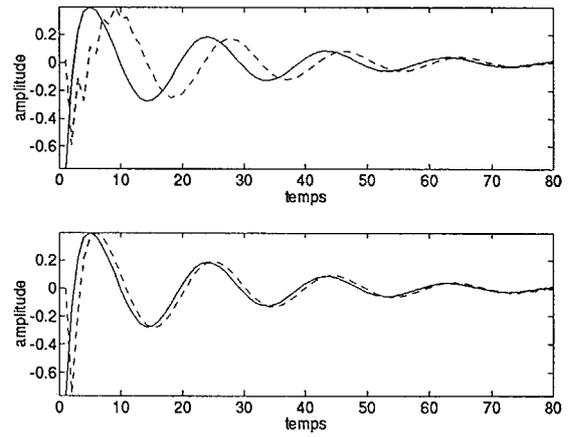


Figure 3

Ensuite, la figure 4 représente la restauration de la réflectivité correspondant aux estimations précédentes de l'ondelette. On observe assez bien le phénomène des dédoublement de pics, surtout sur les premières itérations, et la détection des pics d'une amplitude relativement faible. On note la disparition des dédoublements dès que l'ondelette a convergé. Il faut également noter que les valeurs initiales utilisées pour les hyperparamètres ont été choisies très éloignées des valeurs réelles.

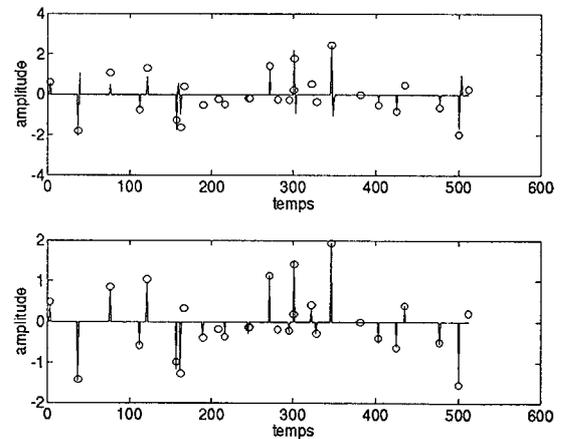


Figure 4

Nous avons également cherché à déconvoluer des signaux réels obtenus par échographie ultrasonore d'un bloc d'acier comportant des défauts simulés par des trous. Il s'agit donc de détecter la présence d'un petit trou situé à différents niveaux de profondeur du matériau. Le phénomène physique associé à ce type d'expérimentation est en réalité en désaccord avec l'hypothèse d'invariance de l'ondelette [8]. Mais lorsque l'ondelette initiale ne se modifie pas trop dans le type d'acier correspondant à notre cas, les méthodes bayésiennes conviennent assez bien comme nous pouvons le constater sur les figures ci-après.

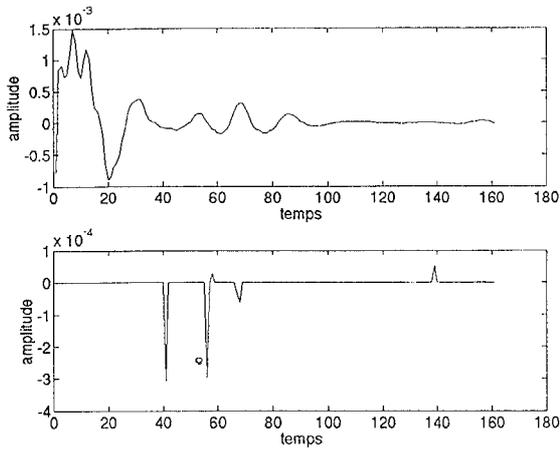


Figure 5

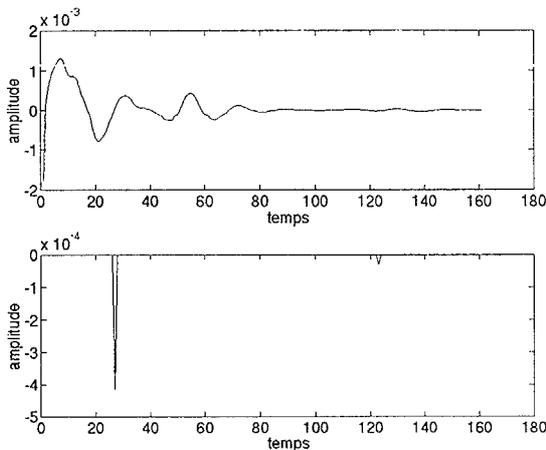


Figure 6

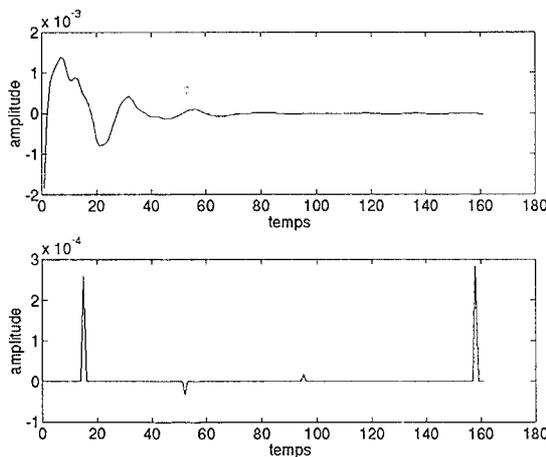


Figure 7

Les figures 5 à 7 montrent le signal mesuré (en haut) et le résultat de la déconvolution (en bas) correspondant respectivement aux trous situés à 2.75, 2.25, et 1.75 mm de la surface. Le détecteur utilisé était celui à erreur de prédiction. Ce que l'on observe, est que tous les événements sont détectés sans ambiguïtés depuis une profondeur de 2.75mm. Les résultats les plus intéressants sont évidemment ceux correspondant aux mesures sur des défauts à 2.25 et 1.75 mm de profondeur pour lesquels il existe un large chevauchement avec la fin de l'écho d'interface.

## 4 Conclusions

Dans cet article nous avons voulu comparer deux approches différentes du problème de déconvolution myope sur des signaux test et réels. A partir des résultats obtenus, la supériorité des méthodes bayésiennes est manifeste. Elles offrent dans des conditions correspondant à une ondelette qui ne se modifie pas trop lors de sa propagation, des qualités de résolution intéressantes, et permettent une prise en compte de la phase. Evidemment ces bons résultats s'obtiennent avec des temps de calcul supérieures. Les résultats sont d'autant meilleurs que la richesse spectrale est importante.

## Bibliographie

- [1] R.K. Mehra. On the identification of variances and adaptive kalman filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-15(2):175-184, avril 1970.
- [2] R.K. Mehra. On-line identification of linear dynamic systems with applications to kalman filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-16(1):12-21, february 1971.
- [3] E. Tse and H.L. Weinert. Structure determination and parameter identification for multivariable stochastic linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-20(5):603-613, october 1975.
- [4] A.K. Mahalanabis, S. Prasad, and K.P. Mohandas. A fast optimal deconvolution algorithm for real seismic data using kalman predictor model. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, GE-19(4):216-221, october 1981.
- [5] J.M. Mendel. *Optimal Seismic Deconvolution. An Estimation-Based Approach*. Academic Press, 1983.
- [6] Y. Goussard. Myopic deconvolution using a generalised likelihood approach. *LSS Internal Report Number GPI-89/05*, pages 1-50, 1989.
- [7] M. Bulo. Problèmes inverses en traitement du signal. étude, mise en œuvre et comparaison de différents algorithmes de déconvolution. applications au contrôle non destructif par ultrasons. *Thèse de Doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne*, page chap.6, 1992.
- [8] L. Vivet and G. Demoment. Evaluation de quelques méthodes de déconvolution en contrôle non destructif. *Douzième Colloque GRETSI - Juan-Les-Pins*, septembre 1989.