



RECONSTRUCTION LINÉAIRE RÉGULARISÉE EN TOMOGRAPHIE D'IMPÉDANCE ÉLECTRIQUE

Greg Shaw, Yves Goussard et Robert Guardo

École Polytechnique de Montréal, Institut de génie biomédical
C.P. 6079, Succursale A
Montréal, Québec H3C 3A7, Canada

RÉSUMÉ

Cette communication décrit une nouvelle méthode de reconstruction en tomographie d'impédance électrique. La méthode présente un compromis intéressant entre le volume des calculs et la qualité des résultats. Ces caractéristiques sont obtenues grâce à une linéarisation adéquate du problème direct, puis à l'emploi de techniques de régularisation permettant d'exprimer la solution linéairement par rapport aux observations. Les résultats obtenus sont de qualité comparable à ceux fournis par des méthodes non-linéaires itératives, mais sont obtenus à un coût calcul très inférieur.

1 Introduction

Le principe de la tomographie d'impédance électrique (TIE) est d'appliquer des sources de courant à la surface d'un milieu inconnu inhomogène, et d'utiliser les potentiels électriques résultants pour en estimer la distribution de résistivité interne. Cette technique est utilisée surtout dans les domaines de la géophysique et du génie biomédical. Deux principales difficultés lui sont associées :

(i) le problème direct, c'est-à-dire la relation entre l'objet inconnu et les observations, est non-linéaire et dépend de l'objet. De plus, la nature du problème direct fait de la reconstruction un problème *mal-posé*;

(ii) en général, l'on ne dispose que d'un petit nombre de projections, ce qui rend l'estimation de l'objet inconnu difficile et renforce le caractère mal-posé du problème de reconstruction.

L'on peut placer la plupart des méthodes de reconstruction existantes dans deux catégories : les méthodes qui s'appuient sur une résolution du problème direct par éléments finis et qui reconstruisent l'objet inconnu de manière itérative, et les méthodes qui utilisent des équations de rétroprojection découlant d'une linéarisation du problème direct. Les techniques de la première catégorie nécessitent généralement des calculs très lourds, et la convergence de la méthode des éléments finis est parfois difficile à contrôler. Quant aux méthodes de la seconde catégorie, elles nécessitent des approximations souvent grossières qui affectent négativement leurs performances. Dans l'un et l'autre cas, la nature mal-posée du problème de reconstruction est rarement prise en compte.

ABSTRACT

This communication presents a new reconstruction method for electrical impedance tomography. The method exhibits an interesting trade-off between amount of computations and quality of the reconstructions. In order to obtain such characteristics, the forward problem is adequately linearized. Then, inversion is performed using regularization techniques, so as to express the solution as a linear function of the observations. The method produces results comparable to those obtained with iterative nonlinear techniques, but at a much smaller computational cost.

Dans cette communication, nous proposons une méthode de reconstruction qui tient compte explicitement des difficultés mentionnées plus haut. Un volume de calcul limité est obtenu en employant des équations linéarisées du problème direct, mais, afin de limiter l'importance des approximations, ces équations mettent en jeu une fonction non-linéaire de la résistivité différente de celle utilisée habituellement. Une qualité satisfaisante de la reconstruction est obtenue grâce à une régularisation adéquate du problème linéarisé.

2 Linéarisation du problème direct

Nous nous plaçons sous l'hypothèse d'un milieu bi-dimensionnel circulaire, que nous supposons de rayon un sans perte de généralité. Dans un premier temps, considérons que le milieu est homogène de résistivité σ_H . Désignons par $j(\theta)$ la densité de courant à la frontière du milieu et par $v(\theta)$ le potentiel induit. θ représente une coordonnée angulaire appropriée. j et v sont périodiques et, dans la pratique, à bande limitée. Soient w et k les vecteurs de taille P contenant respectivement les coefficients complexes des développements en série de Fourier de j et v . Sous ces hypothèses, la relation entre densité de courant et potentiels à la frontière du milieu homogène est donnée par [1] :

$$w_H = -\frac{1}{\sigma_H} D^{-1} k \quad (1)$$

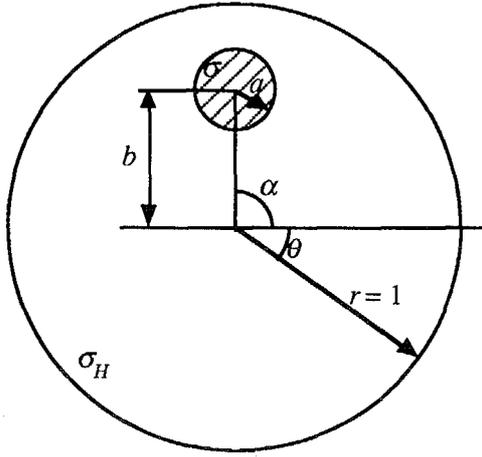


Figure 1: Géométrie du milieu utilisée pour établir les équations linéarisées du problème direct.

où $D = \text{diag}\{i\}, 1 \leq i \leq P$. Supposons maintenant que le milieu comporte une inhomogénéité de résistivité σ , circulaire, de rayon a et centrée au point de coordonnées polaires (b, α) (voir figure 1). La relation entre densité de courant et potentiels à la frontière du milieu devient alors [1] :

$$\mathbf{w} = -\frac{1}{\sigma_H} (\mathbf{I} - \mu \mathbf{T} \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{I} + \mu \mathbf{T} \mathbf{D}) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{k}, \quad (2)$$

où $\mu \triangleq (\sigma_H - \sigma) / (\sigma_H + \sigma)$ et où les éléments de la matrice \mathbf{T} sont donnés par :

$$t_{mn} = -\frac{1}{n} b^{m+n} e^{i(m-n)\alpha} \sum_{p=1}^{\min(m,n)} C_{p-1}^{m-1} C_p^n (a/b)^{2p}. \quad (3)$$

Supposons que la taille et la résistivité de l'inhomogénéité soient telles que le terme $\mu a^2 \ll 1$. Les termes d'ordre supérieur de la somme du second membre de (3) peuvent être négligés. En définissant la matrice \mathbf{U} par :

$$u_{mn} = -b^{m+n-2} e^{i(m-n)\alpha}, \quad (4)$$

\mathbf{w} prend la forme approchée suivante :

$$\mathbf{w} \approx -\frac{1}{\sigma_H} (\mathbf{D}^{-1} + 2\mu a^2 \mathbf{U}) \mathbf{k}. \quad (5)$$

Le premier terme du second membre de (5) représente les coefficients de Fourier de v pour un milieu homogène (voir (1)), et le second terme la perturbation induite par l'inhomogénéité. On peut donc écrire :

$$\mathbf{w} - \mathbf{w}_H = -\frac{2\mu a^2}{\sigma_H} \mathbf{U} \mathbf{k}. \quad (6)$$

L'équation ci-dessus permet d'établir la relation matricielle linéaire approchée liant les observations à la résistivité d'un milieu inconnu. En effet, par transformation de Fourier inverse, (6) peut être mise sous la forme :

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{S} \boldsymbol{\mu}, \quad (7)$$

où le vecteur $\Delta \mathbf{v}$ contient des valeurs échantillonnées de la différence entre les potentiels induits par j dans les milieux inhomogène et homogène. Considérons maintenant

qu'un milieu inhomogène inconnu est échantillonné sur un réseau cartésien régulier. En supposant que chaque pixel est de résistivité uniforme, qu'il produit une perturbation identique à celle induite par une inhomogénéité circulaire de même surface et de même résistivité, et en appliquant le principe de superposition, on déduit de (7) que :

$$\Delta \mathbf{v}_p = \mathbf{S}_p \mathbf{x}, \quad (8)$$

où le vecteur \mathbf{x} contient les valeurs de μ de chaque pixel. L'équation ci-dessus est valable pour une configuration donnée de la densité de courant à la frontière du milieu, soit pour une *projection*. En faisant varier la forme du courant d'excitation, on obtient plusieurs projections de l'objet inconnu. La relation correspondante devient :

$$\mathbf{y} = \mathbf{S} \mathbf{x}, \quad (9)$$

où les vecteurs $\Delta \mathbf{v}_p$ et les matrices \mathbf{S}_p ont été concaténés respectivement dans \mathbf{y} et \mathbf{S} . Notons que l'équation ci-dessus correspond à une mesure des potentiels par rapport à une référence commune, ce qui peut poser des difficultés pratiques. Cependant les relations régissant d'autres procédés expérimentaux (par exemple, mesure de différences de potentiels entre électrodes adjacentes) se déduisent de (9) par des transformations linéaires simples.

Comme toute technique de linéarisation, la procédure décrite ci-dessus comporte des approximations, dont la plus criante est sans doute celle qui consiste à appliquer le principe de superposition pour passer de (7) à (8) car on néglige ainsi les interactions non-linéaires entre différentes zones inhomogènes. Cependant, notre approche se distingue des techniques classiques (par exemple [2, 3]) par au moins deux points : (i) L'on aboutit directement à des équations portant sur la *différence* entre potentiels induits dans les milieux inhomogène et homogène, et non pas sur le *rapport* de telles quantités. Les potentiels induits pouvant être très faibles, il en résulte une meilleure robustesse aux erreurs de mesure. (ii) L'équation linéarisée porte sur la quantité μ et non pas sur la log-résistivité. La différence est peu importante lorsque les inhomogénéités sont de faible amplitude. Toutefois, contrairement à ce qui se produit pour les approches classiques, nos développements restent valides pour des inhomogénéités de forte amplitude et de surface petite par rapport à celle du milieu (voir 2) et (3)). De plus, d'après notre expérience pratique, la technique de linéarisation présentée ici fournit des résultats acceptables même en dehors de son domaine de validité théorique, comme par exemple en présence d'inhomogénéités de forte amplitude et de taille importante.

3 Méthode de reconstruction

Il s'agit maintenant d'inverser les équations linéarisées du problème direct, c'est à dire de résoudre :

$$\mathbf{z} = \mathbf{S} \mathbf{x} + \mathbf{n}. \quad (10)$$

L'équation ci-dessus diffère de (9) par la présence du bruit d'observation additif \mathbf{n} , que l'on suppose blanc, identiquement distribué, de moyenne nulle et de variance r^n .

En raison du caractère mal-posé du problème direct, une solution de (10) au sens des moindres carrés ne fournit pas



de résultats acceptables, et il est nécessaire de régulariser. Comme l'un de nos objectifs est d'obtenir une méthode de faible complexité numérique, nous nous limitons à une régularisation au sens de Tikhonov [4], qui conduit à une forme de la solution à la fois explicite et linéaire par rapport aux observations. Cette solution est obtenue par minimisation du critère suivant :

$$J = (z - Sx)^T(z - Sx) + \lambda(x - x_\infty)^T K(x - x_\infty), \quad (11)$$

où λ , x_∞ et K désignent respectivement le coefficient de régularisation, une solution *a priori* et une matrice définie positive. La solution est classiquement donnée par :

$$\hat{x} = x_\infty + (S^T S + \lambda K)^{-1} S^T (z - Sx_\infty). \quad (12)$$

Le choix de λ , x_∞ et K a une influence critique sur le résultat. Ici, l'on sélectionne la solution *a priori* selon :

$$x_\infty = \beta K^{-1} S^T z. \quad (13)$$

Notons que x_∞ s'interprète comme une solution rétroprojetée pondérée du problème de reconstruction. Or les solutions de ce type présentent un caractère doux, et cet *a priori* de douceur permet de contrebalancer la variance excessive des solutions non régularisées. Soulignons aussi que x_∞ dépend des observations, et donc que notre technique diffère des méthodes classiques de régularisation. Cependant, de telles approches *guidées par les données* ont déjà été employées en traitement d'image et ont produit des résultats intéressants [5].

Le coefficient β est un facteur d'échelle dont la valeur peut être déterminée par des considérations de conservation d'énergie. En négligeant le terme de bruit, on a :

$$x_\infty = \beta K^{-1} S^T Sx. \quad (14)$$

En supposant que x soit la réalisation d'un bruit blanc de variance unité, et en imposant que l'énergie de x_∞ soit égale à celle de x , il vient immédiatement :

$$\beta = \left(\frac{N}{\text{trace}\{S^T S K^{-2} S^T S\}} \right)^{1/2}, \quad (15)$$

où N désigne le nombre de pixels de l'objet.

Examinons maintenant le choix de la matrice de régularisation K . Pour des raisons de simplicité, nous nous restreignons à des matrices diagonales et le choix le plus simple consiste à prendre $K = I$. Mais les résultats correspondants sont de mauvaise qualité et présentent de fortes oscillations au voisinage de la frontière du milieu, là où pourtant l'information apportée par les observations est la plus importante. Ce comportement s'explique par la structure de la matrice de covariance de l'estimée lorsque λ tend vers l'infini, donc lorsque \hat{x} tend vers x_∞ . D'après (13), celle-ci est donnée par :

$$\text{var}\{\hat{x}\} = r^n \beta^2 S^T S, \quad (16)$$

et correspond, à un facteur d'échelle près, à l'inverse de matrice de covariance de la solution des moindres carrés (obtenue pour $\lambda = 0$). Cette inversion explique le comportement décrit ci dessus. Pour y remédier, on se propose de choisir K telle que :

$$\text{diag}\{K\} = \text{diag}\{S^T S\}, \quad (17)$$

où pour une matrice M , $\text{diag}\{M\}$ désigne le vecteur formé par ses éléments diagonaux. Toujours d'après (13), lorsque λ tend vers l'infini, on a :

$$\text{diag}\{\text{var}\{\hat{x}\}\} = \frac{r^n \beta^2}{\text{diag}\{S^T S\}}, \quad (18)$$

ce qui conduit à une variance faible là où l'information apportée par les observations est importante, comme désiré.

Enfin, il est nécessaire de spécifier la valeur du paramètre de régularisation λ . Plutôt que de recourir à des méthodes empiriques, λ est estimé à partir des données observées à l'aide d'une méthode de validation croisée généralisée (VCG) [6]. Des travaux antérieurs [7] ont en effet montré que la VCG présente une meilleure robustesse que les estimateurs du maximum de vraisemblance. La valeur optimale λ_{VCG} est celle qui minimise le critère J_{VCG} suivant :

$$J_{VCG}(\lambda) \triangleq \frac{Nu^T u}{(\text{trace}\{I - A(\lambda)\})^2}, \quad (19)$$

$$u \triangleq z - S\hat{x}(\lambda), \quad (20)$$

$$A(\lambda) \triangleq S(S^T S + \lambda K)^{-1} S^T. \quad (21)$$

La définition ci-dessus assure que J_{VCG} présente un minimum. Cependant, la détermination précise de celui-ci est délicate puisque l'on doit résoudre un problème d'optimisation non-linéaire. Ici, dans la mesure où l'image reconstruite est peu sensible à de faibles changements de λ , l'on ne cherche pas à effectuer une minimisation complète de J_{VCG} . L'on se contente d'échantillonner le domaine de variation usuel de λ , et de calculer à l'avance puis de stocker les matrices A correspondantes, ce qui permet ensuite un calcul rapide de J_{VCG} pour les valeurs de λ considérées. Cette technique permet donc la minimisation du critère sur un sous-ensemble discret des valeurs possibles du paramètre de régularisation.

4 Résultats

La méthode décrite aux deux chapitres précédents a été testée sur des signaux simulés et réels. Pour en illustrer les performances, nous présentons deux résultats de simulation. Ceux-ci ont été obtenus dans les conditions suivantes : le dispositif expérimental comportait 16 électrodes permettant l'injection de courant et la mesure des potentiels induits, ce qui fournit 104 mesures indépendantes. L'objet était échantillonné sur un réseau cartésien de taille 27×27 et sa résistivité était homogène à l'exception d'un pixel de résistivité infinie. Outre la méthode proposée ici, deux autres techniques de reconstruction ont été mises en œuvre : une méthode de rétroprojections pondérées [3], et une méthode régularisée dans laquelle $x_\infty = 0$ et K est une matrice non-diagonale approximant un terme de gradient.

Le premier résultat illustre le compromis résolution-variance qu'il est possible d'obtenir. Pour un niveau de bruit d'observation correspondant à un rapport signal-à-bruit de 20 dB, la variance moyenne des pixels estimés a été calculée théoriquement pour la méthode de rétroprojection. Pour les deux autres méthodes, le paramètre de régularisation a été ajusté de manière à obtenir la même variance moyenne théorique des pixels de

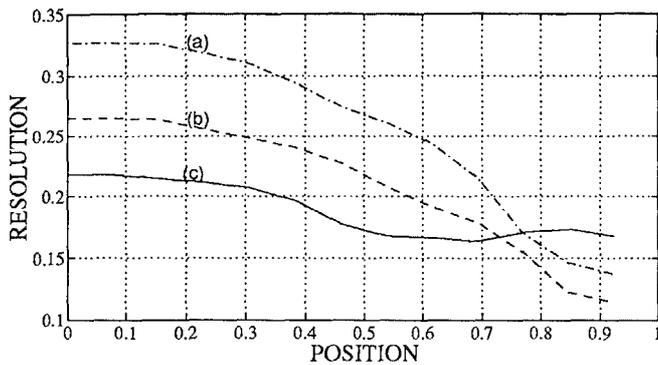


Figure 2: Résolution en fonction de la position de l'inhomogénéité. (a) Rétroprojections. (b) Régularisation par un gradient. (c) Méthode proposée.

l'objet reconstruit. Puis, pour différentes positions radiales de l'inhomogénéité, l'objet a été reconstruit à l'aide des trois méthodes et la résolution, définie comme le rayon à mi-hauteur, a été évaluée dans chaque cas. Les résultats sont présentés à la figure 2. L'on observe que la méthode que nous proposons produit une résolution pratiquement constante quelle que soit la position de l'inhomogénéité, et que cette résolution est généralement meilleure que celle obtenue avec les autres méthodes.

L'allure des objets reconstruits pour une inhomogénéité située en $b = 5/13$ est présentée à la figure 3. Le rapport signal-à-bruit était de 20 dB et, pour les deux méthodes régularisées, la valeur de λ a été déterminée par VCG. On observe que la solution rétroprojetée présente des oscillations de forte amplitude et une résolution médiocre. Les mêmes défauts se retrouvent, mais à un degré moindre, dans la solution régularisée par un terme de gradient. Enfin, le résultat fourni par la méthode proposée ne comporte que de faibles oscillations et une résolution acceptable, dans le sens où elle est comparable à celle fournie par des approches itératives basées sur la méthode des éléments finis. Ces résultats mettent également en évidence la difficulté intrinsèque du problème de TIE, car la résolution des images reconstruites reste très en deçà de celle fournie par des méthodes d'imagerie plus invasives et plus coûteuses, comme par exemple la tomographie à rayons X.

5 Conclusion

Nous avons décrit une méthode de reconstruction en TIE qui présente un compromis intéressant entre complexité numérique et qualité des résultats. Ces caractéristiques ont été obtenues grâce à une linéarisation adéquate du problème direct et à l'emploi de techniques de régularisation. Notons que ces mêmes techniques de régularisation peuvent être employées pour améliorer les performances des méthodes de reconstruction itératives non-linéaires. Enfin, cette étude a permis de mettre en évidence l'influence de la structure de la matrice \mathbf{K} sur la qualité des résultats. Une meilleure compréhension du rôle de \mathbf{K} nous permet d'envisager l'utilisation d'informations *a priori* plus complètes comportant des interactions entre pixels voisins.

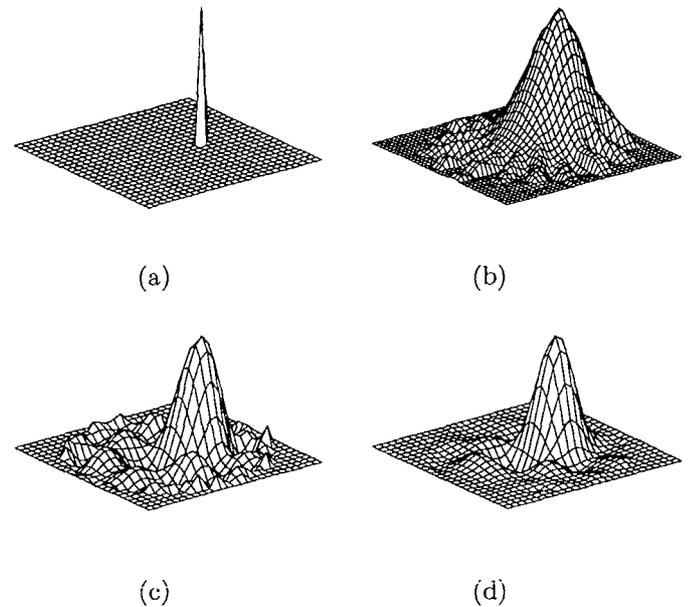


Figure 3: Résultats de reconstruction. (a) Objet original : inhomogénéité située à $b = 5/13$. (b) Reconstruction par rétroprojections pondérées. (c) Reconstruction avec régularisation par un terme de gradient. (d) Reconstruction par la méthode proposée.

Références

- [1] A. Seagar and R. Bates, "Full-wave computed tomography. Pt 4: Low frequency electric current CT," *IEE Proceedings Pt. A*, vol. 132, pp. 455-466, 1985.
- [2] D. Barber and B. Brown, "Recent developments in applied potential tomography-APT," in *Proc. 9th Intl. Conf. Info. Proc. Med. Imaging*, (Washington, DC), pp. 106-121, 1985.
- [3] R. Guardo, C. Boulay, B. Murray, and M. Bertrand, "An experimental study in electrical impedance tomography using backprojection reconstruction," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 38, pp. 617-627, 1991.
- [4] A. Tikhonov and V. Arsenine, *Méthodes de résolution des problèmes mal-posés*. M.I.R., Moscow, 1976.
- [5] M. Lavielle, *Déconvolution 2-D et Détection de Ruptures. Applications en Géophysique*. PhD thesis, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1990.
- [6] G. Golub, M. Heath, and G. Wahba, "Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter," *Technometrics*, vol. 21, pp. 215-253, 1979.
- [7] N. Fortier, G. Demoment, and Y. Goussard, "GCV and ML methods of determining parameters in image restoration by regularization: Fast computation in the spatial domain and experimental comparison," *J. Visual Comm. Image Repres.*, 1993. To appear.