

COMPARAISON DES ALGORITHMES RLS ET SGLMS EN COMMUNICATIONS ACOUSTIQUES SOUS-MARINES

Joël LABAT, Joël TRUBUIL, Daniel RIOUALEN

Département : Mathématiques et Systèmes de Communication

École Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne B.P. 832 29285 Brest cédex FRANCE

RÉSUMÉ

Dans cet article nous nous proposons d'apporter un certain nombre de résultats relatifs aux transmissions acoustiques sous-marines en mettant notamment l'accent sur l'apport de l'égalisation adaptative aveugle conjointement optimisée avec la "récupération de porteuse". Nous allons de ce point de vue comparer plus particulièrement l'algorithme du "gradient stochastique" (Stochastic Gradient Least Mean Square) et l'algorithme des moindres carrés récursifs (Recursive Least Square). Nous avons constaté que l'algorithme RLS (avec ou sans facteur d'oubli) peut éprouver de sérieuses difficultés de convergence dès lors que le canal devient difficile. La stratégie adoptée a consisté essentiellement à initialiser le processus de convergence en utilisant l'algorithme SGLMS pour basculer ensuite sur l'algorithme RLS. Dans ces conditions, sur les signaux réels pris en compte, les performances de ces deux algorithmes se sont avérées très proches ce qui bien évidemment plaide en faveur de l'utilisation du SGLMS.

I Position du problème

En communications acoustiques sous-marines et notamment dans le cas de communications dites "horizontales", le problème essentiel est celui de l'existence de plusieurs trajets de propagation.

Pour résoudre ce problème délicat une solution consiste notamment à mettre en oeuvre un égaliseur dont le rôle consiste alors schématiquement à synthétiser l'inverse de la fonction de transfert du canal. Par ailleurs, le milieu étant généralement non stationnaire ces techniques se doivent d'être adaptatives.

Les critères d'optimisation les plus couramment rencontrés sont le critère du forçage à zéro (zero forcing), le critère de minimisation de l'erreur quadratique moyenne (Least Mean Square) et le critère des moindres carrés (Least Squares).

Nous allons nous intéresser plus spécialement à l'algorithme du "gradient stochastique" (Stochastic gradient Least Mean Square) et à l'algorithme des moindres carrés récursif (Recursive Least Square).

La modulation utilisée pour transmettre les données est une modulation à quatre états de phase avec codage différentiel et embrouillage des données. La fréquence porteuse est de 60 kHz et la rapidité de modulation de 3 kbaud. Les essais se sont déroulés dans le cadre du projet de téléphonie numérique sous-marine, avec la collaboration de Thomson Sintra, Ifremer, Orca Instrumentation et Subatlantic. Plus précisément ils ont été effectués dans le bassin d'essai de l'Ifremer, c'est-à-dire dans un milieu fortement réverbérant. Avant d'examiner les résultats obtenus, nous allons décrire brièvement ces deux algorithmes.

II Solution de Wiener.

Considérons de manière générale un signal dont l'enveloppe complexe a pour expression :

$$x(t) = \sum_k d_k h(t - kT - \tau) e^{j\theta}$$

Dans cette expression d_k désigne le symbole complexe à transmettre à l'instant kT , θ l'erreur existant entre la phase instantanée de la porteuse et celle du signal de référence généré localement (on supposera dans un premier temps que cette erreur de phase ne dépend pas du temps puis qu'elle varie lentement au cours du temps). Le paramètre τ , quant à lui, caractérise la référence temporelle qu'il convient d'estimer par ailleurs, c'est précisément le rôle du dispositif de "récupération de rythme".

De plus $h(t)$ désigne la réponse impulsionnelle globale du canal de transmission incluant les filtres d'émission et de réception. Dans le cas le plus général $h(t)$ est une fonction complexe de la variable réelle t .

Nous supposons par ailleurs que la cadence d'échantillonnage est égale à la rapidité de modulation soit $1/T$, on parle alors d'égaliseur de type synchrone par opposition aux égaliseurs de type fractionné utilisant une fréquence d'échantillonnage supérieure à $1/T$.

Dans ces conditions, le vecteur d'observation complexe $\mathbf{X}(n)$ correspondant aux échantillons de l'enveloppe complexe a pour expression :

$$\mathbf{X}(n) = [x[n+L], \dots, x[n], \dots, x[n-K]]^T \quad \text{avec} \quad x[n] = x(nT - \hat{\tau})$$

expression dans laquelle $\hat{\tau}$ désigne l'estimé de τ , estimation fournie par le dispositif de "récupération de rythme" et T l'intervalle de temps séparant deux symboles consécutifs.

Appelons \mathbf{C} le vecteur des coefficients de l'égaliseur soit :

$$\mathbf{C} = [c_{-L}, \dots, c_0, \dots, c_K]^T$$



Outre les fonctions de synchronisation (rythme et porteuse), le cœur du récepteur comporte alors essentiellement les fonctions d'égalisation et de décision (figure 1), l'égaliseur pouvant être de type adaptatif ou non :

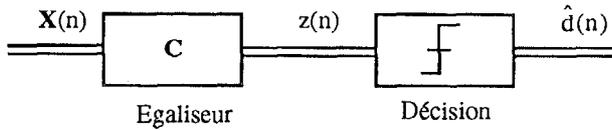


Figure 1 Schéma partiel du récepteur

Le signal $z(n)$ en sortie de l'égaliseur a pour expression :

$$z(n) = \mathbf{C}^T \mathbf{X}(n) = \sum_{k=-L}^K c_k x[n-k]$$

$\hat{d}(n)$ constitue la donnée décidée à partir du signal $z(n)$. Cette donnée décidée, sous l'hypothèse raisonnable d'une transmission correcte, est généralement prise comme signal de référence et la stratégie de l'égaliseur est précisément de fournir l'estimation $z(n)$, combinaison linéaire des observations $x[n+L], \dots, x[n], \dots, x[n-K]$ qui minimise l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) définie de la manière suivante :

$$EQM = E\left\{ |d_n - z(n)|^2 \right\} \approx E\left\{ |\hat{d}(n) - z(n)|^2 \right\}$$

On retombe alors sur un problème classique d'estimation linéaire d'un scalaire d_n et on sait, en vertu du **principe d'orthogonalité**, que le vecteur optimal \mathbf{C}_{opt} est précisément celui qui rend l'erreur d'estimation orthogonale à l'observation $\mathbf{X}(n)$. Il en résulte donc :

$$E\left\{ [\hat{d}(n) - \mathbf{C}_{opt}^T \mathbf{X}(n)] \mathbf{X}^*(n) \right\} = 0$$

soit, d'une manière plus concise :

$$\mathbf{R} \mathbf{C}_{opt} = \mathbf{W}$$

avec :

$$\mathbf{R} = E\left\{ \mathbf{X}^*(n) \mathbf{X}^T(n) \right\}$$

$$\mathbf{W} = E\left\{ \hat{d}(n) \mathbf{X}^*(n) \right\}$$

Ceci constitue précisément la solution de **Wiener**.

\mathbf{R} désigne la matrice d'autocorrélation de l'observation $\mathbf{X}(n)$ et \mathbf{W} le vecteur d'intercorrélacion entre l'entrée et la sortie. Dans l'hypothèse d'un canal stationnaire ces expressions sont indépendantes de n .

La solution optimale est donc unique, sous réserve de l'inversibilité de la matrice hermitienne \mathbf{R} qui sous des hypothèses de stationnarité évoquées précédemment est une matrice de Toeplitz, en général non singulière (définie positive).

Dans ce cas le vecteur \mathbf{C}_{opt} a pour expression : $\mathbf{C}_{opt} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{W}$

II-1 Algorithme du gradient.

L'algorithme du gradient est une technique itérative qui permet de définir une suite vectorielle $\mathbf{C}(n)$ qui, sous réserve de l'unicité de la solution (matrice d'autocorrélation non singulière), converge vers \mathbf{C}_{opt} .

La relation d'actualisation du vecteur $\mathbf{C}(n)$ est la suivante :

$$\mathbf{C}(n) = \mathbf{C}(n-1) - \frac{\beta}{2} \nabla_{\mathbf{C}} \left[E\left\{ |d(n) - \mathbf{C}^T \mathbf{X}(n)|^2 \right\} \right] \Big|_{\mathbf{C}=\mathbf{C}(n-1)}$$

On notera de façon générale qu'à l'itération de rang n , l'égaliseur a pour vecteur de coefficients $\mathbf{C}(n-1)$, ce vecteur est alors actualisé puis utilisé lors de l'itération suivante.

La relation d'actualisation s'écrit alors :

$$\mathbf{C}(n) = [\mathbf{I} - \beta \mathbf{R}] \mathbf{C}(n-1) + \beta \mathbf{W}$$

Dans la pratique cette méthode (algorithme du gradient) est très difficile à mettre en oeuvre dans la mesure où elle suppose la connaissance a priori du canal en termes de matrice d'autocorrélation \mathbf{R} et de vecteur d'intercorrélacion \mathbf{W} . Il faut cependant noter que cet algorithme ne comporte pas l'inversion de la matrice d'autocorrélation comme dans le cas de la solution optimale de **Wiener**, ce qui en réduit fortement la complexité calculatoire.

L'algorithme du "**gradient stochastique**" fournit en revanche une alternative intéressante qui consiste à prendre pour estimé du gradient l'expression :

$$\hat{\nabla}_{\mathbf{C}} \left\{ E\left[|\hat{d}(n) - z(n)|^2 \right] \right\} \Big|_{\mathbf{C}=\mathbf{C}(n-1)} = \nabla_{\mathbf{C}} \left\{ |\hat{d}(n) - z(n)|^2 \right\} \Big|_{\mathbf{C}=\mathbf{C}(n-1)}$$

Cet estimateur est assurément bruité mais non biaisé et dans ce cas l'équation d'actualisation du vecteur s'écrit :

$$\mathbf{C}(n) = \mathbf{C}(n-1) - \frac{\beta}{2} \nabla_{\mathbf{C}(n-1)} \left\{ |\hat{d}(n) - z(n)|^2 \right\}$$

soit :

$$\mathbf{C}(n) = \mathbf{C}(n-1) + \beta \mathbf{X}^*(n) [\hat{d}(n) - z(n)]$$

II-2 Algorithme des moindres carrés récursifs (RLS)

Dans ce type d'algorithme on cherche le vecteur $\mathbf{C}(n)$ qui minimise la fonction coût définie de la manière suivante :

$$E = \sum_{k=0}^n \lambda^{n-k} |\hat{d}(k) - \mathbf{C}^T(n) \mathbf{X}(k)|^2$$

Le scalaire réel λ ($0 < \lambda \leq 1$) constitue le **facteur d'oubli**.

L'annulation du gradient de la fonction E mène au résultat suivant :

$$\sum_{k=0}^n \lambda^{n-k} \mathbf{X}^*(k) \hat{d}(k) = \left[\sum_{k=0}^n \lambda^{n-k} \mathbf{X}^*(k) \mathbf{X}^T(k) \right] \mathbf{C}(n)$$

Définissant $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(n)$ et $\mathbf{W}(n)$ de la manière suivante :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(n) = \left[\sum_{k=0}^n \lambda^{n-k} \mathbf{X}^*(k) \mathbf{X}^T(k) \right]$$

et :

$$\mathbf{W}(n) = \sum_{k=0}^n \lambda^{n-k} \mathbf{X}^*(k) \hat{d}(k)$$

On en déduit alors, sous réserve de la non singularité de la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(n)$, le résultat suivant :

$$C(n) = R_X^{-1}(n) W(n)$$

Tout le problème consiste alors à inverser la matrice $R_X(n)$. On peut montrer que cette inversion peut se faire de manière récursive, cette opération constituant la base de ce qu'il est convenu d'appeler l'algorithme des moindres carrés récursifs (Recursive Least Squares).

On voit que dans l'hypothèse d'un canal stationnaire et pour le cas où $\lambda=1$, la matrice $R_X(n)$ et le vecteur $W(n)$ apparaissent comme des estimées réalistes, à un facteur multiplicatif près, de la matrice d'autocorrélation R et du vecteur d'intercorrélations W .

Le facteur d'oubli, lorsqu'il est inférieur à 1, a essentiellement pour effet de privilégier le présent au détriment du passé. Cette propriété est a priori intéressante dans le cas de signaux non stationnaires (parole, canal acoustique sous-marin).

A partir de l'expression de $R_X(n)$, on obtient sans difficultés les expressions suivantes :

$$R_X(n) = \left[\sum_{k=0}^n \lambda^{n-k} X^*(k) X^T(k) \right] = \lambda R_X(n-1) + X^*(n) X^T(n)$$

$$W(n) = \left[\sum_{k=0}^n \lambda^{n-k} X^*(k) \hat{d}(k) \right] = \lambda W(n-1) + X^*(n) \hat{d}(n)$$

Des relations précédentes on en déduit notamment que :

$$R_X(n)C(n) = [R_X(n) - X^*(n)X^T(n)]C(n-1) + X^*(n) \hat{d}(n)$$

soit après simplifications:

$$C(n) = C(n-1) + R_X^{-1}(n)X^*(n) [\hat{d}(n) - X^T(n)C(n-1)]$$

Dès lors l'inversion de la matrice $R_X(n)$ peut se faire de manière récursive conformément à la formule suivante [1] :

$$R_X^{-1}(n) = \frac{1}{\lambda} \left[R_X^{-1}(n-1) - \frac{R_X^{-1}(n-1)X^*(n)X^T(n)R_X^{-1}(n-1)}{\lambda + X^T(n)R_X^{-1}(n-1)X^*(n)} \right]$$

On posera par la suite $P(n) = R_X^{-1}(n)$ et :

$$K(n) = \frac{R_X^{-1}(n-1)X^*(n)}{\lambda + X^T(n)R_X^{-1}(n-1)X^*(n)} = \frac{P(n-1)X^*(n)}{\lambda + X^T(n)P(n-1)X^*(n)}$$

Le vecteur $K(n)$ désigne le **gain a posteriori** ou encore le **gain de Kalman**. Dès lors les équations d'actualisation de la matrice $P(n)$ et du vecteur $C(n)$ s'écrivent :

$$P(n) = \frac{1}{\lambda} [P(n-1) - K(n)X^T(n)P(n-1)]$$

$$C(n) = C(n-1) + P(n)X^*(n) [\hat{d}(n) - X^T(n)C(n-1)]$$

On peut par ailleurs remarquer que :

$$P(n)X^*(n) = K(n)$$

On en déduit la relation permettant l'actualisation du vecteur $C(n)$:

$$C(n) = C(n-1) + K(n) [\hat{d}(n) - X^T(n)C(n-1)]$$

En définitive l'algorithme des moindres carrés récursifs (RLS) peut se résumer de la manière suivante:

1 Calcul de l'erreur

$$e(n) = \hat{d}(n) - z(n) = \hat{d}(n) - X^T(n)C(n-1)$$

2 Calcul du gain a posteriori (gain de Kalman)

$$K(n) = \frac{P(n-1)X^*(n)}{\lambda + X^T(n)P(n-1)X^*(n)}$$

3 Actualisation de P(n)

$$P(n) = \frac{1}{\lambda} [P(n-1) - K(n)X^T(n)P(n-1)]$$

4 Actualisation des coefficients de l'égaliseur

$$C(n) = C(n-1) + K(n)e(n)$$

4bis

$$C(n) = C(n-1) + P(n)X^*(n) [\hat{d}(n) - z(n)]$$

La relation 4bis est à comparer avec la relation d'actualisation résultant de l'algorithme du gradient stochastique soit :

$$C(n) = C(n-1) + \beta X^*(n) [\hat{d}(n) - z(n)]$$

On voit notamment que dans l'algorithme du gradient tous les coefficients du filtre sont actualisés avec le même pas en l'occurrence β , alors qu'a contrario dans l'algorithme des moindres carrés le scalaire β est remplacé par une matrice $P(n)$ ce qui permet d'actualiser les divers coefficients de façon optimale. C'est ce qui explique précisément la supériorité de cet algorithme en terme de rapidité de convergence. Bien entendu, lorsque la matrice d'autocorrélation inverse se rapproche de la matrice identité alors les deux algorithmes sont sensiblement équivalents.

III RESULTATS

Le schéma du démodulateur retenu est celui initialement proposé par **Falconer [2]**, l'égaliseur pouvant être de type linéaire ou à retour de décision (Decision Feedback Equaliser).

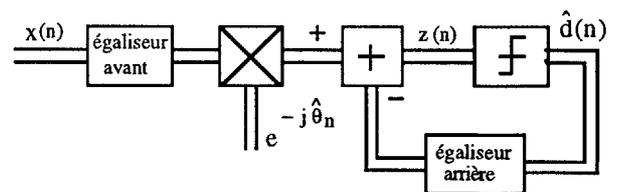


Figure 2 - Principe de l'égaliseur DFE

Par rapport au cas précédemment étudié il suffit de remplacer le vecteur $X(n)$ par le vecteur $X_\theta(n)$ défini comme suit :

$$X_\theta(n) = [X^T(n), \hat{d}(n-1), \dots, \hat{d}(n-M)]^T$$

Les fichiers de données réelles ont été obtenus par l'intermédiaire du système de développement d'un processeur de signal (Motorola DSP 56001) qui avait à charge d'assurer la distribution des instants d'échantillonnage ("récupération de rythme"). Ces fichiers ont alors été traités sur le logiciel MATLAB.

D'une manière générale nous pouvons dire que sur les fichiers examinés, l'algorithme SGLMS a affiché des performances au moins équivalentes à celles de l'algorithme RLS même en ce qui concerne le temps de convergence (lorsque ce dernier parvenait à



converger). Pour pouvoir réellement les comparer nous avons même été contraints, sur certains fichiers, d'initialiser le processus de convergence par l'algorithme SGLMS pour basculer ensuite sur l'algorithme RLS après un certain nombre d'itérations (typiquement 300). En réalité nous n'avons pas noté d'améliorations substantielles de ce dernier en dépit de sa complexité calculatoire.

Dans un premier temps, nous avons procédé à l'estimation de la réponse impulsionnelle discrète du canal avant et après égalisation (figure 3a et 3b). Cette réponse est naturellement de type complexe. Le filtre d'identification utilisé est de type FIR, en outre il compte 5 coefficients dans sa partie anticausale et 24 dans sa partie causale. On remarque notamment la présence de "pics" qui rendent compte de la présence de trajets indirects dont les retards par rapport au trajet principal sont en l'occurrence respectivement de 8T et de 11T.

Pour ce qui concerne le fichier examiné dans l'article, le rapport entre la valeur propre maximale et la valeur propre minimale de la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée est de 16.

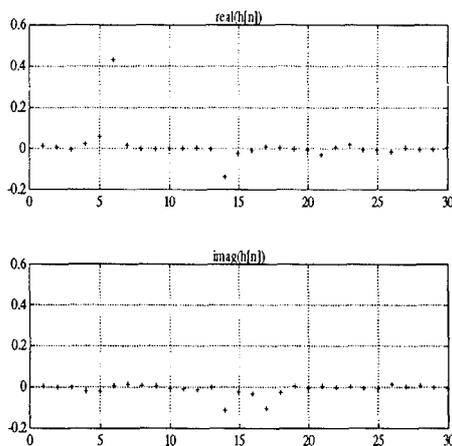


Figure 3a Réponse impulsionnelle discrète avant égalisation

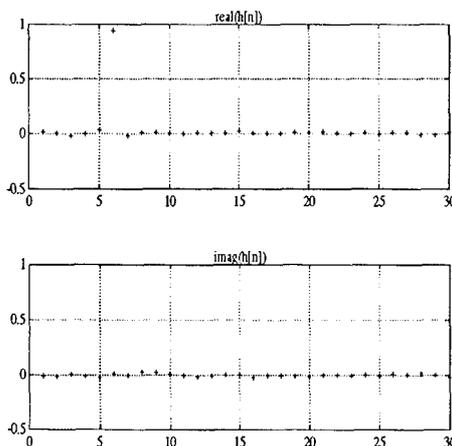


Figure 3b Réponse impulsionnelle discrète après égalisation

Nous examinons maintenant les constellations correspondant aux signaux $x(n)$ et $z(n)$. La figure 4 (partie gauche) nous donne la constellation du signal à l'entrée de l'égaliseur, elle atteste de la sévérité du canal. Il faut néanmoins souligner que ces signaux ont été rejoués en laboratoire à partir d'un enregistreur DAT sur lequel on avait préalablement enregistré les voies en phase et quadrature. Nous avons de bonnes raisons de penser que dans des conditions d'enregistrement plus rigoureuses les résultats seront assez nettement supérieurs.

Parallèlement la partie droite de la figure 4 correspond au signal égalisé $z(n)$ présent à l'entrée du circuit de décision. L'erreur quadratique moyenne (EQM) estimée sur la base des 2000 derniers points est de l'ordre de 11.5 dB.

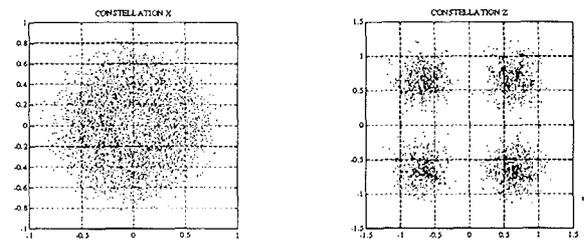


Figure 4 Constellations d'entrée et de sortie

Sur la figure 5 nous donnons l'évolution de l'erreur de phase et l'évolution du Doppler. Le temps de convergence est de l'ordre de 300 T ce qui, dans notre application, correspond à 0.1 s. L'évolution de l'erreur de phase est quasiment linéaire, ceci traduit essentiellement le décalage en fréquence des oscillateurs locaux, en l'occurrence ce décalage est de l'ordre de 0.4 Hz.

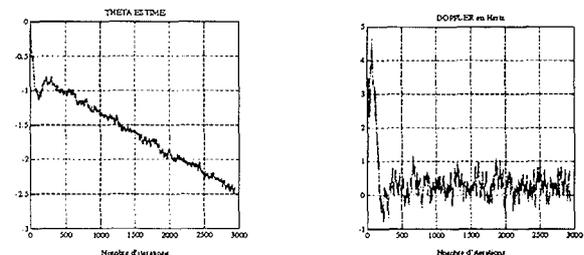


Figure 5 Estimation de l'erreur de phase et du Doppler

IV CONCLUSIONS

Hormis les canaux peu sévères pour lesquels l'algorithme RLS s'est comporté de façon tout à fait conforme à la théorie, nous avons malheureusement constaté de sérieuses difficultés de convergence sur les canaux plus délicats. En effet, pour assurer la convergence de l'algorithme RLS, il a souvent été nécessaire de l'initialiser par un algorithme SGLMS pendant un certain nombre d'itérations (typiquement 300). Ceci est vraisemblablement lié au fait que l'on cherche à optimiser conjointement le vecteur des coefficients de l'égaliseur et la "récupération de porteuse".

En tout état de cause sur la plupart des fichiers examinés nous avons constaté que l'algorithme SGLMS affichait des performances au moins équivalentes à celles de l'algorithme des moindres carrés récursifs (RLS), ce qui nous paraît être un résultat assurément différent de ce qui est généralement admis. Il va sans dire que ce résultat plaide alors bien évidemment en la faveur de l'algorithme SGLMS.

Références bibliographiques :

- [1] J. G. Proakis *Digital Communications*, McGraw-Hill, New York, 2nd Edition (1989).
- [2] D. D. Falconer "Jointly adaptive equalization and carrier recovery in two dimensional digital communications systems" *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 55, pp. 317-334, Mar. 1976
- [3] S. U. H. Qureshi "Adaptive equalization" *Proceedings of the IEEE*, vol 73, N0.9, pp.1349-1387, September 1985