



FILTRAGE ADAPTATIF EN SOUS-BANDES

Michel PECOT et Laurent PERDRIEAU

THOMSON CSF/LER

Avenue de Belle-Fontaine - F 35 510 CESSON-SEVIGNE

RESUME

Dans la plupart des applications de filtrage hiérarchique en sous-bandes, les filtres sont fixés et identiques pour tous les étages de la décomposition. On s'intéresse ici au cas de décompositions successives en 2 bandes où les filtres sont adaptés aux caractéristiques locales de l'image à analyser. Les filtres FIR utilisés sont des structures en treillis assurant la reconstruction parfaite du signal indépendamment de leurs coefficients. Un critère d'optimisation fonction du coût de codage est défini pour le calcul des filtres. Enfin les problèmes liés à la mise en oeuvre d'un filtrage adapté continu sur l'image sont présentés et des solutions proposées.

ABSTRACT

Most hierarchical subband filtering applications use the same filter set for every decomposition level. Our interest lies especially in the two band decomposition structures where filter responses are locally adapted to the image statistics. This presentation deals with FIR filters implemented as lattice structures to ensure perfect reconstruction regardless of the filter coefficients. An optimization criterion based on bit rate cost is derived for filter computation. Finally, the implementation problems of such adaptive filters are reviewed and solutions presented.

1. INTRODUCTION

Ces dernières années les applications de compression de données, et plus particulièrement en imagerie, ont suscité un intérêt croissant. Parmi les méthodes développées, le filtrage en sous-bandes a fait l'objet de nombreuses études. Il a récemment trouvé un cadre mathématique avec le développement de la théorie des ondelettes (orthogonales et bi-orthogonales) et des paquets d'ondelettes. Les techniques d'analyse en sous-bandes sont maintenant parfaitement maîtrisées dans leur versions hiérarchiques par décompositions successives en 2 bandes à l'aide d'une cellule de deux filtres H_0 et H_1 (figure 1) : sous certaines contraintes, ces filtres assurent la reconstruction parfaite du signal en l'absence de codage. Appliqué au filtrage d'images, l'emploi de filtres séparables permet de ramener le problème au cas monodimensionnel.

L'approche adoptée ici est complémentaire, puisqu'elle s'intéresse à l'optimisation locale des filtres H_0 et H_1 de chaque cellule d'analyse tout en conservant la propriété de reconstruction parfaite. Les non stationnarités présentes dans les images conduisent en effet à s'intéresser à de telles solutions visant à adapter les filtres à leurs caractéristiques statistiques locales. Ceux-ci vont alors continuellement évoluer à l'intérieur d'une même image.

Le cadre naturel pour la résolution de ce type de problème est la représentation en treillis de la cellule d'analyse à deux bandes, puisque sous cette forme la propriété de reconstruction parfaite du signal est conservée indépendamment des coefficients du treillis.

Les problèmes de mise en oeuvre, telle que la détermination des filtres de synthèse sans devoir transmettre les coefficients des filtres calculés à l'analyse et les effets de bords sont abordés au paragraphe 5.

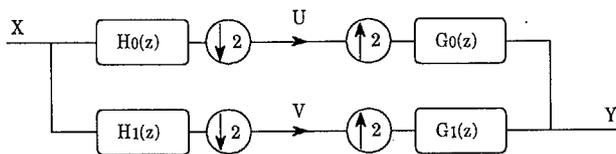


Figure 1. - Filtrage en 2 sous-bandes

Néanmoins, dans la majorité des applications en compression, l'arborescence d'analyse du signal ainsi que les filtres de décomposition sont fixés une fois pour toutes. Les premiers travaux visant à adapter l'analyse au signal ont consisté à rechercher les paquets d'ondelettes optimaux pour un signal donné, sur la base d'un critère d'entropie des coefficients générés [1]. Replacée dans le cadre de l'approche par bancs de filtres, cette optimisation revient à la détermination de l'arborescence de décomposition la mieux adaptée au signal pour une paire de filtres H_0 et H_1 fixée *a priori*. Des études plus récentes cherchent maintenant à adapter l'arbre de décomposition localement à l'intérieur de l'image [2].

2. DECOMPOSITION EN SOUS-BANDES

Le filtrage en sous-bandes par décomposition hiérarchique en octave a largement été présenté par ailleurs et ne sera pas détaillé de nouveau [3]. On rappelle que les filtres d'analyse et de synthèse d'une structure assurant la reconstruction parfaite du signal en l'absence de quantification vérifient les relations :

$$\begin{cases} G_0(z) = -2 H_1(-z) \\ G_1(z) = 2 H_0(-z) \end{cases} \quad (2.1)$$

et

$$H_0(-z)H_1(z) - H_0(z)H_1(-z) = z^{-k}$$

Deux familles de filtres respectant les relations (2.1) sont intéressantes vis à vis des applications de compression d'images. Il s'agit des filtres CQF correspondant aux ondelettes orthogonales et des filtres bi-orthogonaux à phase linéaire correspondant à une classe des ondelettes bi-orthogonales. La décomposition polyphase des filtres fait apparaître une structure en treillis pour ces deux



catégories de filtres [4,5]. Elles s'avèrent être deux cas particuliers de la structure générale représentée figure 2.

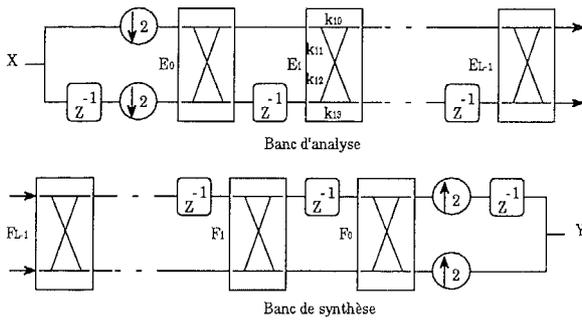


Figure 2. - Structure générale

Le treillis du banc d'analyse est constitué de $L-1$ retards Z^{-1} et de L cellules E_i dont les matrices de transfert sont de la forme :

$$E_i = \begin{bmatrix} k_{i0} & k_{i2} \\ k_{i1} & k_{i3} \end{bmatrix} \quad Z^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$$

Il implante un couple particulier de filtres (H_0, H_1) de longueur $2L$. La matrice de transfert $E(z)$ du treillis s'exprime sous la forme :

$$E(z) = E_{L-1} \cdot Z^{-1} E_{L-2} \cdot Z^{-1} \dots E_1 \cdot Z^{-1} E_0.$$

La matrice de transfert du treillis du banc de synthèse est notée $F(z)$. La reconstruction parfaite à un retard près du signal d'entrée impose aux matrices E et F de satisfaire la relation suivante :

$$E(z) \cdot F(z) = I$$

Cette condition est vérifiée dès lors que pour $i = 0 \dots L-1$

$$F_i = E_i^{-1} \quad (2.2)$$

Lorsque les cellules d'analyse E_i sont normalisées et de déterminant unité, chaque cellule de synthèse se réduit simplement à la matrice transposée des cofacteurs de la matrice E_i correspondante. L'ensemble du banc d'analyse/synthèse introduit alors un retard global de L échantillons.

Les structures en treillis CQF respectent ces conditions et les filtres d'analyse sont liés par la relation

$$H_1(z) = z^{-(N-1)} H_0(-z^{-1})$$

où $N = 2L$ désigne leur longueur. Les matrices de transfert des cellules E_i correspondantes sont unitaires et normalisées ($k_{i0}^2 + k_{i1}^2 = 1$), et de la forme :

$$E_i \text{ CQF} = \begin{bmatrix} k_{i0} & k_{i1} \\ -k_{i1} & k_{i0} \end{bmatrix}$$

Les filtres bi-orthogonaux possèdent également des structures treillis équivalentes et la plus simple à mettre en oeuvre correspond aux filtres de type SAOO. H_0 et H_1 forment alors une paire symétrique et antisymétrique d'ordre impair. Les matrices de transfert normalisées ($k_{i0}^2 - k_{i1}^2 = 1$) des cellules E_i assurent la réalisation de

deux filtres retournés l'un de l'autre, la linéarité de phase des filtres H_0 et H_1 étant obtenue à l'aide d'une cellule terminale T .

$$E_i \text{ SAOO} = \begin{bmatrix} k_{i0} & k_{i1} \\ k_{i1} & k_{i0} \end{bmatrix} \quad T \text{ SAOO} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. FILTRAGE ADAPTATIF

Les filtres utilisés en pratique dans les applications de codage d'images faisant intervenir les techniques d'analyse/synthèse en sous-bandes sont fixés une fois pour toutes, leurs réponses spectrales étant déterminées à partir de gabarits moyens définis pour l'ensemble des signaux à traiter.

On peut alors penser adapter les filtres (voire même l'arbre de décomposition) aux caractéristiques spécifiques de telle ou telle image [6]. Néanmoins, une optimisation globale image par image ne peut conduire à des résultats satisfaisants étant donné leur caractère non-stationnaire. Il est souhaitable de pouvoir traiter différemment des zones aussi variées que des contours ou des textures. Par conséquent, une adaptation des filtres aux caractéristiques statistiques locales de l'image s'impose.

Ce type d'approche fait apparaître un problème nouveau lié à la commutation des filtres à l'intérieur d'une même image. Lorsque les filtres d'analyse sont modifiés, il existe une phase transitoire où des échantillons issus de l'ancien et du nouveau filtre sont convolués à la synthèse comme le montre la figure 3. Afin de conserver la reconstruction parfaite du signal original, il est donc nécessaire de définir avec précaution les filtres de synthèse au niveau de la transition. Hors de cette phase transitoire, ils sont simplement calculés par les relations (2.2).

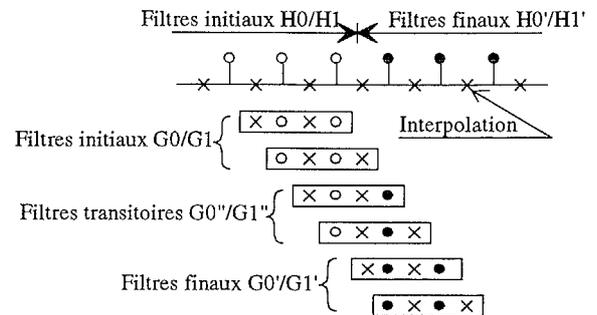


Figure 3. - Commutation des filtres d'analyse ($N = 4$)

Dans le cas d'une évolution continue des filtres d'analyse au cours du temps, le problème de la reconstruction parfaite du signal original peut être reformulé dans le domaine temporel, à partir des implantations transverses des filtres [7]. La condition de reconstruction parfaite peut alors s'exprimer de manière générale sous la forme matricielle suivante :

$$A_{2n} s_{2n} = b \quad (2.3)$$

où n désigne l'indice temporel (i.e. l'ordre de balayage à l'intérieur de l'image) et A_n est la matrice des filtres d'analyse :

$$A_n = \begin{bmatrix} [H^T(n)] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [H^T(n-1)] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [H^T(n-N/2+1)] \end{bmatrix}$$



$$H^{(n)} = \begin{bmatrix} h_0^n(0) & h_0^n(1) & \dots & h_0^n(N-1) \\ h_1^n(0) & h_1^n(1) & \dots & h_1^n(N-1) \end{bmatrix}$$

Les matrices $H^{(n)}$ représentent les filtres à utiliser à l'instant n . Les matrices $\mathbf{0}$ sont de dimension 2×2 . La matrice s_n est associée aux filtres de synthèse G_0^n et G_1^n utilisés à l'instant n :

$$s_n^T = \left[[G_0^{T(n)}], [G_1^{T(n)}], \dots, [G_{N/2-1}^{T(n)}] \right]$$

avec

$$G_i^{(n)} = \begin{bmatrix} g_0^n(2i) & g_0^n(2i+1) \\ g_1^n(2i) & g_1^n(2i+1) \end{bmatrix} \quad \text{avec } i = 0, \dots, N/2-1$$

La matrice \mathbf{b} quant à elle est définie par :

$$\mathbf{b}^T = \left[[0], \dots, [0], [J], [0], \dots, [0] \right] \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice J occupe la position k correspondant au retard global du banc de filtres.

Le système d'équations (2.3) doit être constamment vérifié ; en particulier, chacun des deux vecteurs de la matrice \mathbf{b} doit appartenir au sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice A afin d'assurer l'existence de filtres de synthèse vérifiant les conditions de reconstruction parfaite.

Cette contrainte n'est pas nécessairement vérifiée quels que soient les filtres $H_0^{(n)}$ et $H_1^{(n)}$ utilisés aux différents instants à l'analyse, ce qui fait apparaître la nécessité d'une phase transitoire à l'analyse entre deux jeux de filtres (H_0, H_1) et (H_0', H_1') prédéterminés, phase pendant laquelle on ne peut contrôler la valeur des filtres.

Ces quelques remarques montrent la difficulté de résolution du problème lorsque les filtres sont exprimés dans leur structure transverse. Tout au plus permet-elle de résoudre le cas $N = 4$ lorsque les filtres d'analyse sont en plus contraints à être de type CQF (cas des LOT - *Lapped Orthogonal Transform* - d'ordre 2), pour lequel on montre que les filtres d'analyse peuvent être commutés tous les deux échantillons. Les filtres de synthèse ne possèdent néanmoins plus la propriété CQF.

En fait, pour des filtres de longueur supérieure ou de type différent, le cadre adéquat pour la résolution de ce problème de commutation des filtres d'analyse consiste à considérer la représentation en treillis de la figure 2. En effet, une observation détaillée du mécanisme de propagation de l'information à travers le treillis montre rapidement que les coefficients des cellules peuvent être modifiés de façon quelconque à l'analyse sous réserve que cette modification soit répercutée à la synthèse à un instant approprié. Plus précisément, si les coefficients de la cellule E_i sont modifiés à l'instant n (le temps étant supposé compté après sous-échantillonnage), la propriété de reconstruction parfaite sera conservée pourvu que les coefficients de la cellule de synthèse F_i soient mis à jour selon la relation (2.2) à l'instant $n+L-1-i$.

Lorsque l'ensemble des cellules d'analyse est globalement modifié à l'instant n , de même il suffit de mettre successivement à jour les coefficients des cellules F_i aux instants $n-L-1-i$. On voit ainsi clairement apparaître durant la mise à jour, $L-1$ filtres de synthèse transitoires. Par ailleurs, bien que les coefficients du treillis d'analyse ne changent qu'une seule fois, il existe virtuellement des filtres

transversaux transitoires à l'analyse dus à "l'effet mémoire" du treillis.

Cette approche permet de mettre à jour les filtres d'analyse soit de manière progressive (en modifiant une à une les cellules successives du treillis pour chaque groupe de deux échantillons du signal original), soit globalement (toutes les cellules étant commutées d'un seul coup). Dans tous les cas, pour s'assurer que les échantillons seront parfaitement filtrés à la synthèse, la relation suivante, où n représente l'indice temporel (après sous-échantillonnage) doit être vérifiée :

$$F_i(n) = E_i^{-1}(n-L+1+i) \quad \forall i \in [0, L-1]$$

4. OPTIMISATION DES FILTRES

Le calcul des filtres d'analyse en fonction des caractéristiques statistiques locales de l'image conduit à définir un critère d'optimisation. Dans un contexte de compression d'images, ce choix doit faire intervenir le coût de codage des signaux sous-bandes. Or, un résultat classique indique que le coût de codage de deux signaux stationnaires centrés et indépendants est proportionnel au logarithme du produit de leurs variances. Dans ces conditions, un critère naturel d'optimisation des deux filtres d'analyse H_0 et H_1 peut être exprimé selon :

$$C(H_0, H_1) = \lambda_1 E\{X_h^2\} \cdot E\{X_g^2\} + \lambda_2 \|R_{hg}\|^2$$

où, X_h et X_g désignent les deux signaux sous-bandes générés par H_0 et H_1 , et $\|R_{hg}\|$ une norme de leur fonction d'intercorrélation. Le premier terme tend à minimiser le coût de codage sous une hypothèse d'indépendance, tandis que le second terme cherche à décorrélérer les deux signaux sous-bandes. Les coefficients λ_1 et λ_2 permettent de moduler la contribution de chacun de ces termes. La norme L^2 classique peut être considérée par le terme d'intercorrélation :

$$\|R_{hg}\|^2 = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M [R_{hg}(k)]^2$$

où l'ordre maximum d'intercorrélation M peut typiquement être limité à 1 ou 2.

L'optimisation de ce critère dans le cadre du treillis général de la figure 2 reste toutefois très délicate puisqu'elle conduit à résoudre numériquement un problème de minimisation sous-contrainte (la contrainte correspond à la non dégénérescence de chaque cellule, i.e. $(\det E_i)^2 = 1$).

Il est préférable de se limiter au cas particulier de cellules dont la matrice de transfert est de la forme :

$$E_i = \begin{bmatrix} k_0 & \pm k_1 \\ \pm k_1 & k_0 \end{bmatrix}$$

Elles correspondent aux cellules rencontrées dans les filtres de type CQF et SAOO. L'optimisation peut alors être réalisée en considérant chaque cellule dans sa version dénormalisée [4,5], paramétrée par un unique coefficient α_i . Cette solution permet de prendre en compte naturellement la contrainte de non dégénérescence. Selon les cas, l'une des trois formes suivantes est donc utilisée :



$$E_{i\text{ CQF}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i) \\ -\sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{bmatrix} \quad E_{i\text{ SAOO}} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha_i) & \text{sh}(\alpha_i) \\ \text{sh}(\alpha_i) & \text{ch}(\alpha_i) \end{bmatrix}$$

ou

$$E_{i\text{ SAOO}} = \begin{bmatrix} \text{sh}(\alpha_i) & \text{ch}(\alpha_i) \\ \text{ch}(\alpha_i) & \text{sh}(\alpha_i) \end{bmatrix}$$

L'optimisation procède alors cellule par cellule selon une méthode de type Newton. Pour chaque cellule, la solution optimale est recherchée parmi les trois formes précédentes, celle conduisant à la plus faible valeur du critère étant retenue.

5. CONTRAINTES DE MISE EN OEUVRE

La structure en treillis adoptée et le critère défini permettent d'envisager une adaptation locale des filtres. La procédure d'optimisation nécessite l'estimation des statistiques d'ordre 2 (fonction de corrélation) du signal d'entrée de chaque cellule d'analyse/synthèse. Dans le cas d'images, un masque doit donc être défini pour le calcul de ces statistiques, celui-ci devant prendre en compte l'environnement causal le plus proche du point à traiter.

Avec des filtres de longueur N , la fonction de corrélation doit être estimée jusqu'à l'ordre $2N$; au moins $4N$ points sont donc indispensables pour obtenir des informations significatives. En conséquence, si l'on souhaite conserver à l'optimisation son caractère local, les filtres devront rester relativement courts.

La transmission des coefficients des filtres optimisés en chaque point de l'image originale entraînerait inévitablement un surcoût prohibitif. Il est donc nécessaire de mettre en oeuvre une technique permettant de les recalculer automatiquement à la synthèse à partir du signal transmis. En l'absence de quantification des signaux, cela revient à correctement placer le masque d'estimation de la fonction de corrélation à l'analyse, du fait du retard apporté par le banc de filtre; les échantillons servant à ce calcul doivent en effet aussi être disponibles à la synthèse.

Dans le cas d'une décomposition hiérarchique à M niveaux à l'aide de filtres de longueur N , le retard apporté par le banc de filtrage est de $L = M.N$ échantillons, par conséquent, le masque servant au calcul des filtres d'analyse à l'instant n ne peut utiliser que les échantillons antérieurs à $n-L$ afin d'autoriser le calcul des filtres à la synthèse.

Ce retard de $M.N$ échantillons concerne bien sûr uniquement l'optimisation des filtres du premier étage de la décomposition, pour les filtres de l'étage l , ce décalage est réduit à $(M+1-l).N$ échantillons.

En présence de quantification des signaux sous-bandes (cas d'une chaîne de transmission réelle), les erreurs résultantes viennent perturber le calcul des filtres à la synthèse et une dérive peut apparaître. Afin de limiter cette dérive, cette opération de quantification doit être prise en compte au codeur pour l'optimisation des filtres d'analyse. Une procédure récursive peut alors être mise en oeuvre; celle-ci enchaîne jusqu'à convergence les trois étapes suivantes: optimisation des filtres, quantification, reconstruction locale. Deux ou trois itérations suffisent en pratique pour converger.

Un dernier point à considérer est le traitement des effets de bords. En effet, l'initialisation du processus de recalcul des filtres à la synthèse requiert de les traiter différemment, *i.e.* par un jeu de filtres connus. Afin d'éviter un brusque changement dans la réponse des filtres, le dernier jeu de filtres optimisés peut être maintenu. Il faut noter que dans une décomposition hiérarchique sur plusieurs niveaux, la partie de l'image concernée par ce traitement spécifique peut devenir non négligeable (cas des bandes fortement découpées telles que la bande basse-fréquence notamment).

6. CONCLUSION

Une technique de filtrage adaptatif en sous-bandes utilisant des filtres optimisés sur les statistiques locales du signal a été présentée. Elle permet en l'absence de quantification d'assurer la reconstruction parfaite du signal original. Les filtres de synthèse sont recalculés au décodeur à partir du signal reconstruit évitant ainsi la transmission des coefficients. Lorsque les signaux sous-bandes sont quantifiés, une procédure itérative doit être mise en place au codeur afin de limiter la dérive des filtres au décodeur.

Des résultats ainsi que des images sous-bandes obtenues par filtrage adaptatif seront présentés lors de la conférence.

Ce type d'approche adaptative peut être aussi généralisé à l'arbre de décomposition lui-même qui peut être optimisé soit localement soit globalement à partir d'un critère de blancheur des signaux sous-bandes générés.

De telles solutions couplées à des techniques efficaces de quantification vectorielle peuvent s'avérer tout à fait performantes dans le cadre d'applications de codage très bas débit.

7. BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.R. COIFMAN and M.V. WICKERHAUSER, "Entropy-based algorithm for best basis selection", *IEEE Trans. on I.T.*, Vol. 38, n° 2, pp. 713-718, March 1992
- [2] C. HERLEY, J. KOVACEVIC, K. RAMCHANDRAN and M. VETTERLI, "Time-Varying Orthonormal Tiling of the Time-Frequency Plane", *Submitted to IEEE Trans. on S.P.*
- [3] L. PERDRIEU et M. PECOT, "Filtres en Treillis et Analyse en Sous-Bandes d'Images", *Revue Technique THOMSON-CSF*, Vol. 25, n° 1, pp. 305-333, Mars 1993
- [4] P.P. VAIDYANATHAN and P.Q. HOANG, "Lattice Structures for Optimal Design and Robust Implementation of Two-Channel Perfect-Reconstruction QMF Banks", *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 36, n° 1, pp. 81-94, January 1988
- [5] Q.T. NGUYEN and P.P. VAIDYANATHAN, "Two-Channel Perfect-Reconstruction FIR QMF Structures which Yield Linear-Phase Analysis and Synthesis Filters", *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 37, n° 5, pp. 676-690, May 1989
- [6] P. DELSARTE, B. MACQ and D.T.M. SLOCK, "Signal-Adapted Multiresolution Transform for Image-Coding", *IEEE Trans. on I.T.*, Vol. 38, n° 2, pp. 987-904, March 1992
- [7] K. NAYEBI, T.P. BARNWELL and M.J.T. SMITH, "Analysis-Synthesis Systems with Time-Varying Filter Bank Structures", *ICASSP-92*, pp. IV-617-620, March 23-26 1992