



RESEAU DE NEURONES POUR LA DECOMPOSITION EN ONDELETTES D'UN SIGNAL DISCRET

Sylvie Marcos et Messaoud Benidir

Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS-ESE,
Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette, France

RÉSUMÉ

Cette communication propose un réseau de neurones à sigmoïdes qui permet la décomposition en ondelettes d'un signal à temps discret.

ABSTRACT

In this paper a feedforward neural network with sigmoidal activation functions is proposed to perform the wavelet decomposition of a discrete time signals.

1 Introduction

La représentation ou l'approximation d'un signal par une famille de signaux élémentaires est un sujet important en traitement du signal. Une telle représentation a souvent pour but de faire apparaître des propriétés temporelles et fréquentielles d'un signal qui permettent de le caractériser et de le traiter.

La décomposition sur des bases d'ondelettes est apparue comme un moyen de représenter un signal en révélant ses propriétés locales dans le domaine temps-échelle [1]. Dans ce cas, les signaux élémentaires sont obtenus par décalage et dilatation d'une même fonction, appelée ondelette mère. Les problèmes liés à l'existence de bases orthonormées d'ondelettes sur lesquelles on peut décomposer tout signal de $L^2(\mathbb{R})$ ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux récents [1]- [7]. Le calcul des coefficients apparaissant dans une telle décomposition, qui sont des produits scalaires du signal et des éléments de la base considérée, peut se faire de plusieurs façons. La plupart du temps, les signaux à traiter sont discrets. Les produits scalaires sont alors approchés par des sommes de Riemann faisant intervenir une discrétisation de l'ondelette et les échantillons du signal. Le principe de cette dernière consiste à déterminer une ondelette $\psi(t)$ en un nombre fini de points et à utiliser des interpolations éventuelles de $\psi(t)$ pour calculer les produits scalaires du signal avec chaque élément de la base construite à partir de $\psi(t)$ par décalages et dilatations. Pratiquement, deux difficultés majeures apparaissent :

1. la détermination de l'ondelette pour une discrétisation désirée ;
2. le calcul des produits scalaires.

Ces deux points sont généralement résolus par une méthode fondée sur l'analyse multirésolution [2] [4] [7] qui sera rappelée dans la Section 2. Nous proposons une méthode, fondée sur la modélisation de l'ondelette $\psi(t)$ à l'aide d'un réseau de neurones, qui permet de répondre en même temps aux deux questions posées.

Dans le même ordre d'idées, signalons l'existence de travaux récents [11] [10] qui introduisent conjointement les réseaux

de neurones et les ondelettes mais dans un but différent du notre.

2 Décomposition sur une base d'ondelettes

Les travaux de Franklin (1927), de Littlewood-Paley (1930), de Calderón (1960), de Strömberg (1981) et Grossmann-Morlet (1984) présentent beaucoup de similitudes et ont conduit à ce qui est couramment appelé "décomposition en ondelettes". Les travaux plus récents de I. Daubechies, de Y. Meyer et de S. Mallat ont donné plus de précisions sur ces décompositions. En particulier, l'introduction de l'analyse multirésolution a permis la construction de fonctions particulières, dénommées ondelettes à support compact à partir desquelles on peut déduire par un procédé très simples des bases hilbertiennes pour l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions de carré sommable. La définition de la fonction ondelette n'est pas unique et introduit des conditions plus ou moins restrictives. En général, une fonction $\psi(t)$ de la variable réelle sera appelée fonction ondelette de base si elle vérifie les conditions proposées dans [3].

2.1 Transformée en ondelettes

Associons à une fonction ondelette de base la famille double et non dénombrable de fonctions $\psi_{a,b}(t)$, définies par

$$\psi_{a,b}(t) \triangleq \sqrt{|a|} \psi[a(t-b)], \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Considérons l'opérateur \mathcal{T} , appelé transformée en ondelettes, de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ qui associe à toute fonction x de $L^2(\mathbb{R})$, la fonction à deux variables, $T_x(a,b)$, définie par

$$T_x(a,b) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{a,b}(t) dt \triangleq \mathcal{T}(x). \quad (2)$$

Pour chaque couple (a,b) fixé, la valeur prise par $T_x(a,b)$ peut donc s'interpréter comme le produit scalaire de x par la fonction $\psi_{a,b}(t)$. On impose généralement à ψ de vérifier la condition suivante dite condition d'admissibilité :

$$A_\psi \triangleq \int_0^\infty \frac{|\tilde{\psi}(\nu)|^2}{\nu} d\nu \neq 0 \quad (3)$$



où $\tilde{\psi}$ désigne la transformée de Fourier de ψ . Si ψ vérifie cette condition d'admissibilité, on peut montrer [7] que l'opérateur \mathcal{T} conserve la norme et que le calcul de x à partir de son image $\mathcal{T}(x)$ est alors toujours possible. Un problème pratique important consiste à trouver les conditions qui permettent de reconstituer exactement $x(t)$ à partir d'un ensemble dénombrable d'échantillons $T_x(a_j, b_k), (j, k) \in \mathbb{Z}^2$. On considère alors la famille double et dénombrable de fonctions $\psi_{j,k}(t)$ définies par

$$\psi_{j,k}(t) \triangleq a_0^{j/2} \psi(a_0^j t - kb_0), \quad (j, k) \in \mathbb{Z}^2 \quad (4)$$

obtenue à partir de ψ pour

$$a \triangleq a_0^j, \quad b \triangleq kb_0 a_0^{-j}. \quad (5)$$

On associe ensuite à $x(t)$ la suite numérique double définie par

$$T_x(j, k) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{j,k}(t) dt. \quad (6)$$

Le problème est de savoir sous quelles hypothèses sur a_0, b_0 et ψ , la suite double $(\psi_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Une analyse générale de ce problème est donnée dans [7]. Dans la suite, on se limite au cas particulier important qui correspond à $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$. On a donc :

$$\psi_{j,k}(t) \triangleq 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad (j, k) \in \mathbb{Z}^2. \quad (7)$$

2.2 Construction d'une base d'ondelette

La construction d'une base d'ondelettes $(\psi_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$ équivaut à celle de la fonction ψ . Cette dernière peut s'obtenir par l'intermédiaire d'une analyse multirésolution [5]. Le procédé comporte les deux étapes suivantes.

1. On construit une fonction ϕ de $L^2(\mathbb{R})$, appelée fonction échelle, vérifiant l'identité temporelle :

$$\frac{1}{2} \phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \phi(t - k) \quad (8)$$

où les h_k sont astreints à des conditions générales [5] [6].

2. On construit une fonction ψ à partir de la fonction ϕ par l'identité :

$$\frac{1}{2} \psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \phi(t - k) \quad (9)$$

où les g_k sont tels que les deux suites $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ soient les réponses impulsionnelles de deux filtres miroirs en quadrature (*Quadrature Mirror Filters* : QMF).

L'algorithme qui permet de construire numériquement la fonction échelle à partir d'une suite $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est fondé sur la relation (8). Cette relation signifie que la fonction ϕ est un point fixe de l'opérateur \mathcal{H} de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$, défini par

$$\mathcal{H}(\phi(t)) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \phi(2t - k). \quad (10)$$

En général la suite $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est supposée finie, i.e. $h_k = 0$ pour $k < 0$ ou $k > N$. Si de plus, cette suite vérifie les conditions nécessaires à l'existence d'une analyse multirésolution, ce point fixe existe et il est unique. On peut

alors le calculer de manière itérative comme limite de la suite de fonctions définie par :

$$\phi_{n+1}(t) \triangleq \mathcal{H}[\phi_n(t)] \quad (11)$$

la fonction de départ ϕ_0 pouvant être prise égale à la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, 1]$. On obtient des ondelettes à support compact [6]. On peut établir facilement à partir des relations (8) et (9) les récurrences suivantes :

$$\phi_{j-1,k}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{n-2k} \phi_{j,n}(t) \quad (12)$$

et

$$\psi_{j-1,k}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{n-2k} \phi_{j,n}(t) \quad (13)$$

où les $\phi_{j,k}$ sont définies à partir d'une même fonction ϕ selon la relation (7).

2.3 Décomposition d'une fonction sur une base d'ondelettes

Le problème consiste à déterminer les projections d'un signal sur la base orthonormée $(\psi_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$. Si l'on désigne par $\bar{x}_{j,k}$ et $x_{j,k}$ les projections de $x(t)$ sur $\phi_{j,k}$ et $\psi_{j,k}$ respectivement, on obtient à partir de (12) et (13) les relations suivantes :

$$\bar{x}_{j-1,k} = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{n-2k} \bar{x}_{j,n} \quad (14)$$

et

$$x_{j-1,k} = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{n-2k} \bar{x}_{j,n}. \quad (15)$$

Ces relations permettent donc de calculer toutes les suites $(x_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ pour $j = j_0 - 1, j_0 - 2, \dots, -\infty$ à partir d'une suite particulière $(\bar{x}_{j_0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$. Comme les $\bar{x}_{j_0,k}$ sont définis par

$$\bar{x}_{j_0,k} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi_{j_0,k}(t) dt \quad (16)$$

leur calcul nécessite la connaissance de la fonction ϕ . Mais les récurrences (14) et (15) ne permettent pas le calcul des suites $(x_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ pour $j = j_0 + 1, j_0 + 2, \dots, +\infty$ à partir de $(\bar{x}_{j_0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$. La décomposition totale :

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (17)$$

d'un signal $x(t)$ sur la base $\psi_{j,k}$ ne peut donc pas être déterminée récursivement à partir de la connaissance d'une suite particulière $(x_{j_0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$. Néanmoins, pour des fonctions échelles ϕ à support compact, on peut choisir l'indice j_0 suffisamment grand pour que les $\phi_{j_0,k}$ puissent être identifiées à des distributions de Dirac [8] [9]. Dans ce cas, les produits scalaires initiaux $\bar{x}_{j_0,k}$, définis par (16), peuvent être approximés par les échantillons du signal et la décomposition (17) peut être déterminée récursivement. On constate alors que les effets de bord et les conditions initiales ont une grande influence sur la précision de l'analyse obtenue par cette méthode.



3 Décomposition utilisant des réseaux de neurones

3.1 Présentation du réseau

Le réseau proposé dans cette communication pour décomposer tout signal à temps discret sur une base orthonormée d'ondelettes est représenté sur la Figure 1. Il est constitué de deux parties, un réseau principal et un réseau auxiliaire. L'apprentissage du réseau auxiliaire est réalisé préalablement au traitement principal afin d'identifier l'ondelette mère désirée. Cette phase repose sur la propriété qu'à un réseau de neurones à une couche cachée d'approximer avec une précision désirée n'importe quelle fonction continue [12]. On obtient alors la représentation explicite suivante de l'ondelette mère:

$$\psi(t) = \sum_i \gamma_i \sigma(\alpha_i t - \beta_i) \quad (18)$$

où $\sigma(t)$ est la fonction sigmoïdale, les paramètres α_i et γ_i sont respectivement les poids de la première et de la deuxième couche, et les β_i sont les termes de biais.

Le réseau de neurones principal proposé pour réaliser à proprement parler la décomposition sur la base d'ondelettes du signal donné est constitué du réseau auxiliaire dont les paramètres sont fixés, dupliqué pour toutes les échelles 2^j et tous les retards $2^{-j}k$. Les paramètres échelle et retard apparaissent donc dans les poids fixes 2^j et les biais k de la première couche du réseau principal (cf. Fig.1). Les coefficients $x_{j,k}$ de la décomposition (17) sont alors les poids de la dernière couche du réseau principal après qu'il ait été optimisé.

Les avantages d'une telle structure sont les suivants.

1. Le réseau auxiliaire est optimisé avant d'être intégré au réseau principal et donne la représentation explicite et dérivable (18) de l'ondelette choisie, pouvant être dilatée, dilatée et discrétisée à volonté.

2. Une fois l'ondelette mère choisie pour ses propriétés de régularité ou de localisation temps fréquence, son approximation par un réseau de neurones est utilisable pour analyser un signal quelconque.

3. Puisque les pas d'échelle et de retard assurant le caractère orthonormé de la base sont fixés, l'optimisation du réseau principal revient à minimiser une fonction quadratique par rapport aux seuls paramètres $x_{j,k}$ de la décomposition en ondelettes. L'apprentissage ou l'optimisation du réseau principal réalise donc les produits scalaires désirés.

4. Comme conséquence du point précédent, la correspondance entre les données du signal et la fonction réalisée par le réseau se fait soit par un simple processus de moindre carrés soit par apprentissage suivant un algorithme de gradient ou de quasi-Newton. La convergence de ces algorithmes vers un unique minimum est garantie.

5. La décomposition des données sur une base d'ondelettes est ainsi obtenue à l'aide de sigmoïdes connues pour être facilement implémentables.

6. Enfin, nous pouvons mentionner comme un avantage possible de la structure proposée, celui de pouvoir optimiser les paramètres échelle a et retard b lors de l'apprentissage

plutôt que de les maintenir fixés respectivement à 2^j et $2^{-j}k$. Bien que les paramètres obtenus dans ce cas ne conduisent pas forcément à une base orthonormée, il se peut que pour certaines applications ce type d'optimisation trouve son intérêt. On peut citer comme exemple le cas où l'on cherche à minimiser le nombre de termes entrant dans la décomposition. Remarquons encore que la fonction de coût à optimiser pour l'apprentissage du réseau n'est alors plus une fonction quadratique et convexe de tous les paramètres de la décomposition.

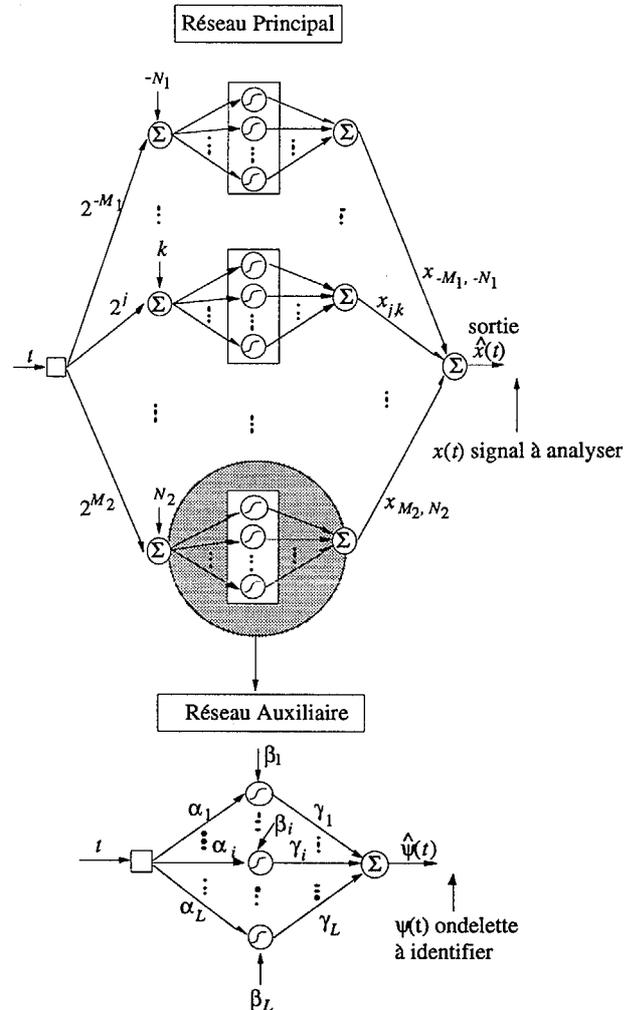


Figure 1: Réseau Principal comprenant le réseau auxiliaire dupliqué pour tous les termes d'échelle et de retard

Pour toutes ces raisons, le réseau de neurones proposé peut être vu comme une implémentation intéressante de la décomposition en ondelettes d'un signal à temps discret. Une comparaison plus approfondie entre cette approche et l'approche par l'analyse multirésolution est à l'étude. La section suivante propose une illustration du mode de fonctionnement du réseau et de ses performances.

3.2 Illustration

L'ondelette $\psi(t)$ choisie pour cette illustration est l'ondelette de Daubechies de régularité 9 [6]. Elle a été approximée par le réseau auxiliaire comprenant 36 neurones et optimisé par un algorithme de quasi-Newton. Les paramètres ainsi obtenus pour la représentation explicite (18) de l'ondelette mère avec une erreur relative inférieure à -40 dB, sont donnés dans les trois tableaux suivants



12.7651	-7.4259	12.2808	3.1095	12.9977	-22.9296	16.6754	-6.6066	6.5432	-3.5114	34.9941	-26.8374
-33.4078	3.0175	45.4375	-11.4561	16.7186	-32.8291	23.5567	-12.7666	21.4436	3.5283	26.4789	-41.0829
25.0219	-16.1334	36.7933	3.9195	25.2215	-48.7679	26.5296	-12.1518	25.5247	4.6338	28.7348	-41.3067
-29.3577	15.6784	-28.1874	1.9250	-24.1484	59.1450	-14.4257	7.5860	-9.7258	6.1742	-25.7250	25.0021
-3.8381	-1.8494	6.6022	1.7573	-9.3523	-2.3945	7.9261	-6.2186	5.4121	1.9252	18.3826	-5.6932
19.7288	-16.2279	29.0061	3.7438	29.3708	-36.9503	33.4108	-16.3726	32.3208	5.6953	46.9113	-50.9606
0.7181	-1.2725	-0.8823	0.1202	-1.1173	0.1112	-4.3549	-12.5863	-7.2962	-1.3739	-3.7220	-1.0378
-6.2410	1.4891	-14.6479	-26.0223	-10.4717	8.6328	-3.1266	-56.7138	-3.23105	-0.3326	-25.9676	-5.0234
-0.0299	-191926	-19.1948	0.4101	-8.7196	-8.3416	-3.7937	-7.8157	-6.5285	-0.7081	-1.0570	-4.2716

Tableau 1: Paramètres du réseau auxiliaire identifiant l'ondelette de Daubechies.

(Tableau 1) donnant respectivement les valeurs des α_i , des β_i et des γ_i . Remarquons que nous n'avons pas cherché à optimiser le nombre de neurones; ce nombre aurait pu être réduit avec un réseau auxiliaire à deux couches cachées. Nous avons dans un premier travail [13] cherché à décomposer un signal constitué par une combinaison linéaire de termes de la base d'ondelettes de Daubechies, soit :

$$x(t) = 1.3\psi(t-1) - 1.5\psi(t-1) + 0.5\psi(4t) \\ \psi(2t-3) + \psi(2t+3) + \psi(4t-2).$$

Les résultats étaient très bons puisque les coefficients $x_{j,k}$ ont bien convergé vers les vraies valeurs [13]. Dans un deuxième temps, nous avons cherché à analyser le signal suivant :

$$x(t) = \psi(t+1) - 0.8\psi(t-1) - 1.2\psi(4t-2) \\ \psi(4t+3) - 0.25\psi(1.8t-0.3) + \psi(2t+1).$$

Ce signal est composé d'une combinaison linéaire de termes de la base d'ondelettes et du terme $\psi(1.8t-0.3)$. La décomposition de ce signal à l'aide de notre réseau de neurones avec les paramètres échelles et retards maintenus fixés, nous montre qu'un nombre quasiment infini de termes de la base doivent intervenir dans cette décomposition. En effet, nous obtenons une erreur relative de -23 dB sur l'approximation de ce signal en faisant intervenir 11 termes de retard (k allant de -5 à 5) et 5 termes d'échelles (2^j allant de 0.5 à 8) et de -28 dB en passant à 13 termes de retard (k allant de -6 à 6) et 7 termes d'échelle (2^j allant de 0.25 à 16). Par contre, en laissant libre les paramètres retard et échelle du réseau et en les adaptant avec l'algorithme de rétropropagation, l'approximation du signal atteint rapidement une erreur relative inférieure à -36 dB avec beaucoup moins de termes dans la décomposition. Remarquons que lorsque les paramètres échelle et retard sont laissés libres d'évoluer, il se peut qu'il y ait une infinité de solutions, mais il semble que de manière assez générale on atteigne de bonnes performances avec un nombre fixé a priori de termes.

4 Conclusion

Le réseau de neurones proposé peut être vu comme une alternative à l'algorithme de la décomposition en ondelettes d'un signal à temps discret fondé sur l'analyse multirésolution. Le réseau auxiliaire donne une représentation

explicite de l'ondelette désirée. Le réseau principal calcule, lors de son apprentissage, la décomposition en ondelettes ainsi que l'approximation d'un signal. Cette structure permet également, si on le désire, d'optimiser les paramètres échelle et retard par apprentissage. Une comparaison plus approfondie entre notre approche et l'approche par l'analyse multirésolution est à l'étude.

References

- [1] O. Rioul and M. Vetterli, "Wavelets and signal processing", *IEEE SP-Magazine*, pp. 14-38, Oct. 1991.
- [2] Y. Meyer, "Ondelettes, fonctions splines, et analyses graduées", *Univ. of Torino*, 1986.
- [3] Y. Meyer, "Ondelettes et opérateurs", Tome 1, *Hermann, Paris*, 1990.
- [4] S. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation", *IEEE Trans. on PAMI*, Vol. 11, pp. 674-693, Jul. 1989.
- [5] S. Mallat, "Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ ", *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 315, pp. 69-87, Sep. 1989.
- [6] I. Daubechies, "Orthonormal bases of compactly supported wavelets", *Com. Pure and Appl. Math.*, Vol. XLI, pp. 909-996, 1988.
- [7] I. Daubechies, "The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis", *Trans. IT*, Vol. 36, pp. 961-1005, Sep. 90.
- [8] J.E. Odegard, R.A. Gopinath, C.S. Burrus, "Optimal wavelets for signal decomposition and the existence of scale-limited signals", In *Proceedings of ICASSP*, Vol. IV, pp. 597-600, San Francisco, CA, March 1992.
- [9] C.S. Burrus and R.A. Gopinath, "Introduction to wavelets and wavelets transforms", In *Proceedings of ICASSP, Tutorial courses*, Minneapolis, April 1993.
- [10] Y.C. Pati and P.S. Krishnaprasad, "Analysis and synthesis of feedforward neural networks using discrete affine transformations", *Technical Research Report at University of Maryland*, 1990.
- [11] Q. Zhang and A. Benveniste, "Wavelet networks", *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 3, No.6, pp. 889-898 Nov. 1992.
- [12] G. Cybenko, "Approximation by superposition of a sigmoidal function", *Mathematics of control, signals and systems*, Vol. 2, pp. 303-314 1989.
- [13] S. Marcos and M. Benidir, "A feedforward neural network for the wavelet decomposition of discrete time signals", *Proceedings of the 1993 IEEE Workshop on Neural Networks for Signal Processing*, Baltimore, MD, September 1993.