Estimation optimale de la fréquence instantanée de signaux non-stationnaires

F. Auger, I. Vincent

Laboratoire d'Automatique de Nantes, Unité associée au C.N.R.S. n° 823,
Ecole Centrale de Nantes, Université de Nantes, 1 rue de la Noë, 44072 Nantes Cedex 03.
Membre du GdR 134 CNRS "Traitement du Signal et des Images".

Résumé

Le problème de l'estimation de la fréquence instantanée d'un signal discret non-stationnaire déterministe perturbé par un bruit branc stationnaire intervient dans de nombreux domaines du traitement du signal (radar, télécommunications, contrôle des vibrations ...). Pour le résoudre, une grande variété de solutions ont été proposées, certaines d'entres elles même très récemment. On présente dans cet article une nouvelle solution originale qui, sous réserve de la validité d'une approximation sur le signal observé, constitue un estimateur statistiquement optimal. En plus de ces possibilités d'utilisation pratique, que l'on montrera en comparant ses caractéristiques avec celles des autres estimateurs connus, on va voir que ce nouvel estimateur apporte également une justification théorique des méthodes de modélisation paramétrique de la distribution de Wigner-Ville, proposées il y a quelques années.

Abstract

The problem of estimating the instantaneous frequency of a deterministic non-stationary signal embedded in a stationary white noise is encountered in many application fields of digital signal processing, such as telecommunications, target localization or vibration control. After a review of the existing methods, we propose in this article a new method, which leads to a statistically optimal estimator of the instantaneous frequency according to the validity of an approximation on the observed signal. Computer simulation results are shown to evaluate the practical use of this method. Hereafter, we show that this estimator also brings a justification to the application of classical frequency estimators on the instantaneous auto-correlation function considered as a new signal, which was proposed a few years ago to perform a parametrization of the discrete pseudo Wigner-Ville distribution.

Introduction

L'estimation des paramètres caractéristiques (amplitudes, fréquences et phases) d'un signal formé d'une somme de sinusoïdes bruitées noyées dans un bruit blanc additif est un problème classique en traitement du signal. Cependant, dans de nombreuses applications, comme en localisation de cibles (radar, sonar), en télécommunications, ou en mesures de vibrations, un tel modèle ne peut décrire précisément les phénomènes observés que si les différentes fréquences varient au cours du temps. Pour de telles situations, où s'applique donc le concept de fréquences "instantanées" [1,2,3], les méthodes classiques d'estimation fréquentielle [4] se révèlent inappropiées. Différents travaux ont alors proposé leur adaptation, en utilisant des techniques soit adaptatives [5,6,7] soit de fenêtres glissantes [8], mais les résultats expérimentaux présentés ont alors mis en évidence la nécessité d'un compromis difficile entre le biais et la variance des estimations obtenues.

Dans cet article, on se restreindra au cas d'un signal comportant une seule composante élémentaire non-stationnaire noyée dans un bruit blanc stationnaire additif. Pour ce cas particulier, plusieurs méthodes basées sur des techniques spécifiques du traitement des signaux non-stationnaires ont déjà été proposées [9-12,3], certaines d'entre elles même très récemment [13,14]. Celles-ci seront rappelées au §1, en précisant leurs hypothèses sous-jacentes. Dans une seconde partie, on présente un nouvel estimateur, qui sous réserve de la validité d'une approximation sur le signal, constitue un estimateur statistiquement optimal. On évaluera ensuite ses possibilités d'utilisation pratique en comparant notamment la courbe de son erreur quadratique moyenne avec celles obtenues pour les autres estimateurs. Dans une troisième partie, on montre que cet estimateur fournit également une justification théorique des méthodes de paramétrisation AR de la distribution de Wigner-Ville proposées il y a quelques années [15,16,17], montrant en effet la sous-optimalité statistique de ces estimateurs, compensée toutefois par leur utilisation possible pour des signaux multi-composantes.

I) Estimateurs classiques de fréquence instantanée.

On s'intéresse donc au cas d'un signal discret formé de la somme d'une composante non-stationnaire déterministe et d'un bruit blanc complexe gaussien de variance $2\sigma^2$:

$$x[t] = a[t]\, e^{j\varphi[t]} + v[t] \tag{1}$$

Il est bien entendu possible d'estimer la fréquence instantanée (angulaire) de la composante déterministe $\Delta\varphi[t]$ en utilisant celle du signal observé :

$$\Delta\varphi[t] = (\varphi[t+1]-\varphi[t-1])\,/\,2 \tag{2}$$

$$\Delta\hat{\varphi}[t] = \mathrm{Arg}(\, x[t+1].x^*[t-1]\,)\,/\,2 \tag{3}$$

Son étude statistique [13], analogue à celle effectuée dans le cas continu [18], fait apparaitre une absence de biais et une variance inversement proportionnelle au rapport signal sur bruit :

$$\mathbb{E}\left[\Delta\hat{\varphi}[t]\right] = \Delta\varphi[t] \quad \text{et} \quad \mathbf{V}\mathrm{ar}\left[\Delta\hat{\varphi}[t]\right] = \frac{\sigma^2}{2a^2[t]} \tag{4}$$

Si la composante déterministe peut être considérée comme "lentement" non-stationnaire, on peut alors chercher à construire un estimateur de plus faible variance en utilisant l'une des méthodes classiques d'estimation fréquentielle sur un intervalle centré sur l'instant t [5-8]. Mais, comme dans le cas du spectrogramme [19], la longueur de cet intervalle doit être choisie avec précaution afin de réaliser un compromis entre la diminution de la variance de l'estimation obtenue et la validité de cette hypothèse de stationnarité locale.

Pour tenter de dépasser ce compromis, on peut remplacer cette hypothèse de fréquence constante sur un intervalle par une autre de variation linéaire de fréquence, avec une amplitude considérée comme très lentement variable

$$x[u] = a[u]\, e^{j(\varphi+\theta u+\alpha u^2/2)} + v[u]\ ,\ a[u] \approx a[t]\ ,\ u \in [t-p,t+p] \qquad (5)$$

et chercher à estimer la fréquence instantanée $\theta+\alpha t$. L'estimation par maximum de vraisemblance des paramètres θ et α, dont l'étude théorique fournit leur borne inférieure de Cramer-Rao [10,20], conduit alors à la méthode du "de-chirping" [11] :

$$(\hat{\theta}, \hat{\alpha}) = \underset{a_1,a_2}{\mathrm{Arg\ Max}} \left| \frac{1}{2p+1} \sum_{u=t-p}^{u=t+p} x[u].e^{-j(a_1 u+a_2 u^2/2)} \right|^2 \qquad (6)$$

mais le caractère hautement non-linéaire du critère J, présentant de nombreux extrema locaux, ne permet pas à cette approche de conduire à un algorithme rapide et sûr, et suggère donc d'explorer d'autres voies.

Une première solution consiste à utiliser le maximum de la représentation pseudo Wigner-Ville discrète [3,10], adoptant ainsi une démarche analogue à l'estimation par maximum du périodogramme dans le cas stationnaire [4] :

$$\Delta\hat{\phi}[t] = \underset{\theta>0}{\mathrm{Arg\ Max}} \sum_{\tau=-p}^{\tau=p} x[t+\tau].x^*[t-\tau]\, e^{-2j\theta\tau} \qquad (7)$$

qui fournit une estimation non biaisée de la fréquence instantanée d'un signal modulé linéairement en fréquence, mais dont le biais et la variance augmentent de façon importante lorsque la validité de cette modélisation du signal diminue [10].

Pour améliorer ce dernier point, l'estimateur précédent peut servir d'initialisation à une procédure itérative [11,3] utilisant la distribution de Wigner-Ville croisée entre le signal et une référence unimodulaire construite à l'aide d'une estimation de la fréquence instantanée :

$$WV[x.r_n;\, t, \theta] = \sum_{\tau=-p}^{\tau=p} x[t+\tau].r_n^*[t-\tau]\, e^{-2j\theta\tau} \qquad (8)$$

$$r_n[t] = \mathrm{Exp}\Big(j \sum_{u=-\infty}^{t} \Delta\hat{\phi}_n[u]\Big) \quad \text{et} \quad \Delta\hat{\phi}_{n+1}[t] = \underset{\theta>0}{\mathrm{Arg\ Max}}\, WV[x.r_n;\, t, \theta]$$

La convergence de cet algorithme, que l'on constate expérimentalement, ne peut cependant être démontrée. On peut cependant montrer que dans le cas continu déterministe, la marginale temporelle de la distribution de Wigner-Ville croisée entre un signal et une référence unimodulaire correspond à la demi-somme des deux fréquences instantanées :

$$\mathcal{R}\left\{ r(t).y^*(t) \int \omega\, W.V(y.r;t,\omega)\, \frac{d\omega}{2\pi} \right\} = \frac{1}{2}\left(\varphi_y'(t)+\varphi_r'(t)\right) v_y^2(t) \qquad (9)$$

$$y(t) = v_y(t)\, e^{j\varphi_y(t)} \qquad \text{et} \qquad r(t) = e^{j\varphi_r(t)}$$

un algorithme itératif d'estimation de la fréquence instantanée $\varphi_y'(t)$ construit sur le principe précédent en remplaçant la recherche du maximum par la marginale temporelle converge donc très rapidement.

Enfin, une autre classe d'estimateurs peut être construite par une approche très différente. Pour un rapport signal sur bruit suffisamment élevé, l'approximation proposée par Tretter [21,22] dans le cas d'une sinusoïde s'applique également pour une modulation linéaire de fréquence [23], ce qui permet alors de transformer le bruit additif en une modulation aléatoire :

$$x[u] \approx a[u]\, e^{j(\varphi+\theta u+\alpha u^2/2+w[u])} \qquad (10)$$

$w[u]$ étant un bruit blanc réel gaussien de variance $\sigma^2/a^2[u]$. En se basant sur cette approximation, Djuric et Kay ont proposé un algorithme d'estimation des paramètres (φ,θ,α) beaucoup plus sûr que la méthode du de-chirping, et un second algorithme pour estimer α. Lovell et Williamson ont alors déduit de ce dernier algorithme un estimateur de la fréquence instantanée, en s'imposant de conserver exactement la même séquence de pondération H, ce qui entraine des contraintes opératoires difficilement justifiables.

En effet, si l'on considère tout d'abord le cas d'une sinusoïde complexe ($\alpha=0$), la fonction d'autocorrélation instantanée symétrique est égale pour un retard unitaire à :

$$R[u,1] = x[u+1].x^*[u-1] \approx a[u+1].a[u-1]\, e^{j\psi[u]} \qquad (11)$$

$$\psi[u] = 2\theta+b[u] \qquad \text{avec} \qquad b[u] = w[u+1]-w[u-1]$$

La phase ψ de la fonction d'autocorrélation est donc une variable aléatoire gaussienne dont on peut estimer la valeur moyenne 2θ à l'aide de toutes les valeurs de cette phase contenues dans l'intervalle [t-p,t+p] par un estimateur de Gauss-Markov, c'est à dire un estimateur de maximum de vraisemblance de réalisations non-indépendantes d'une variable aléatoire :

$$\Psi[t] = 2\theta\, \mathbb{1} + B[t] \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \Psi[t]^T &= \left[\psi[t-p+1] \ \ldots\ \psi[t] \ \ldots\ \psi[t+p-1]\right] \\ B[t]^T &= \left[b[t-p+1] \ \ldots.\ b[t] \ \ldots\ b[t+p-1]\right] \\ \mathbb{1}^T &= \left[1\ 1\ \ldots\ldots..\ 1\right] \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}[t] &= \frac{1}{2}\, \underset{x}{\mathrm{Arg\ Max}}\, (\Psi[t] - x\,\mathbb{1})^T.\, \mathbb{E}\left[B^T[t].B[t]\right]^{-1}.(\Psi[t] - x\,\mathbb{1}) \\ &= \frac{1}{2}\, H^T.\, \Psi[t] \end{aligned} \qquad (12)$$

$$H^T = \frac{1^T.C^{-1}}{1^T.C^{-1}.1} \quad \text{avec} \quad C = \frac{\mathbb{E}\left[B^T[t].B[t]\right]}{\mathbb{V}ar[w[t]]} = \begin{pmatrix} 2\ 0\ -1\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 2\ 0\ -1 \ldots 0 \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ 0 \ldots -1\ 0\ 2\ 0 \\ 0 \ldots 0\ -1\ 0\ 2 \end{pmatrix}$$

En outre, cet estimateur peut être facilement mis en oeuvre, sans aucun calcul matriciel, puisque les coefficients de pondération peuvent être exprimés analytiquement :

$$H^T = \left[h[-p+1] \ \ldots\ h[0] \ \ldots\ h[p-1]\right]$$

$$h[i] = \frac{6\, u\, (u-|i|)}{p\,(p+1)\,(2p+1)} \qquad \text{avec} \qquad u = (p+|i|-1) \operatorname{div} 2 + 1 \qquad (13)$$

Ce résultat, que l'on montre par récurrence, permet de conclure que sous réserve de la validité de l'approximation de Tretter, cet estimateur est non-biaisé et sa variance atteint la borne inférieure de Cramer-Rao :

$$\mathbb{E}\left[\hat{\theta}[t]\right] = \theta \quad \text{et} \quad \mathbb{V}ar\left[\hat{\theta}[t]\right] = \frac{\sigma^2}{2a^2[t]}\ \frac{6}{p(p+1)(2p+1)} \qquad (14)$$

Mais $\hat{\theta}[t]$ est un estimateur fréquentiel, basé sur une hypothèse de stationnarité sur l'intervalle [t-p+1,t+p-1], et souffre donc des mêmes défauts que le spectrogramme. Dans le cas général d'un signal non-stationnaire, $\hat{\theta}[t]$ est égal à une combinaison linéaire des valeurs de la fréquence instantanée comprise dans la fenêtre :

$$\hat{\theta}[t] = \frac{1}{2} \sum_{i=-p+1}^{p-1} h[i]\ \mathrm{Arg}\left[e^{2j\Delta\hat{\phi}[t+i]}\right] \tag{15}$$

Dans le cas particulier d'une modulation linéaire de fréquence, $\hat{\theta}[t]$ fournit alors une estimation non-biaisée de la fréquence instantanée, à condition toutefois qu'une discontinuité n'apparaisse pas dans la fonction :

$$2(\theta+\alpha u) \bmod 2\pi \quad u \in [t-p,t+p]$$

Enfin, Lovell et Williamson affirment obtenir de meilleurs résultats en inversant l'ordre des opérations de sommation et d'extraction de la phase :

$$\hat{\theta}[t] = \frac{1}{2} \mathrm{Arg}\left[\sum_{i=-p+1}^{p-1} h[i]\ \frac{x[t+i+1].x^*[t+i-1]}{\|x[t+i+1].x^*[t+i-1]\|}\right] \tag{16}$$

qui constitue un estimateur fréquentiel non-biaisé, mais dont on ne peut calculer théoriquement la variance.

II) Estimateur proposé.

Par un calcul différent, on peut constuire un estimateur de fréquence instantanée du signal, en conservant les hypothèses précédantes de modulation linéaire de fréquence dans l'intervalle d'observation et de validité de l'approximation de Tretter. On utilise pour cela le produit conjugué entre deux valeurs de la fonction d'autocorrélation symétrique $R[t,\tau]$ calculée pour deux valeurs successives du retard [24] :

$$R[t,\tau] = x[t+\tau].x^*[t-\tau] \approx a[t+\tau].a[t-\tau]\ e^{j(2(\theta+\alpha t)\tau+w[t+\tau]-w[t-\tau])}$$

$$M_4[t,\tau] = R[t,\tau].R^*[t,\tau-1] \approx a[t+\tau].a[t+\tau-1].a[t-\tau+1].a[t-\tau]\ e^{j\psi[t,\tau]}$$

$$\psi[t,\tau] = \mathrm{Arg}\left(M_4[t,\tau]\right) = 2(\theta+\alpha t)+b[t,\tau]$$

$$b[t,\tau] = w[t+\tau] - w[t+\tau-1] + w[t-\tau+1] - w[t-\tau]$$

qui constitue un moment du quatrième ordre du signal dont la valeur moyenne de la phase est égale à la fréquence instantanée à l'instant t. A l'aide de p valeurs successives de cette phase, on peut donc construire [24] un estimateur de maximum de vraisemblance de la fréquence instantanée :

$$\Psi[t] = 2(\theta+\alpha t)\mathbb{1}+B[t] \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \Psi[t]^T = \left[\psi[1]\ \ \psi[2]\ \ \ldots\ \psi[p]\right] \\ B[t]^T\ = \left[b[1]\ \ b[2]\ \ \ldots\ b[p]\right] \end{array}$$

$$\Delta\hat{\phi}[t] = \frac{1}{2}\ \mathrm{Arg}\ \underset{x}{\mathrm{Max}}\ (\Psi[t] - x\ \mathbb{1})^T.\ \mathbb{E}\left[B^T[t].B[t]\right]^{-1}.(\Psi[t] - x\ \mathbb{1})$$

$$= \frac{1}{2}\ H^T.\ \Psi[t] \tag{17}$$

$$H^T = \frac{1^T C^{-1}}{1^T.C^{-1}.1} \quad \text{avec} \quad C = \frac{\mathbb{E}\left[B^T[t].B[t]\right]}{\mathbb{V}\mathrm{ar}[w[t]]} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & . & . & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & . & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & . & . \\ . & . & . & . & . & -2 \\ . & . & . & . & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

De plus, cet estimateur peut être calculé rapidement sans aucun calcul matriciel, puisqu'on peut montrer par récurrence que les éléments du vecteur H sont donnés analytiquement par

$$h[i] = \frac{3\ [p.(p+1) - i.(i-1)]}{2.p.(p+1).(2p+1)} \quad ,\ i = 1..p \tag{18}$$

ce qui permet de conclure que sous réserve de la validité des hypothèses retenues, $\Delta\hat{\phi}[t]$ est un estimateur non biaisé de la fréquence instantanée, et que sa variance atteint la borne inférieure de Cramer-Rao :

$$\mathbb{E}\left[\Delta\hat{\phi}[t]\right] = (\theta+\alpha t) \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\Delta\hat{\phi}[t]\right] = \frac{\sigma^2}{2a^2[t]}\ \frac{1}{p^2}\ \frac{6.p}{(p+1)(2p+1)} \tag{19}$$

où le premier terme dans l'expression de la variance correspond à (p=1), le deuxième à l'emploi d'une pondération uniforme $h[i] = 1/p$, et le dernier correspond au gain apporté par la pondération optimale, qui asymptotiquement croit linéairement avec p. De plus, il est également possible de calculer analytiquement la corrélaion entre les valeurs de l'estimateur à des instants différents :

$$\Delta\mathring{\hat{\phi}}[t] = \Delta\hat{\phi} - (\theta+\alpha t)$$

$$\mathbb{E}\left[\Delta\mathring{\hat{\phi}}[t].\Delta\mathring{\hat{\phi}}[t-k]\right] = \frac{\sigma^2}{2a^2[t]}\ \frac{24\left[(N^2-1)(N-3|k|)+2|k|(|k|^2-1)\right]}{N^2(N^2-1)^2} \tag{20}$$

$$0 \leqslant |k| \leqslant (N-1) \qquad N=2p+1$$

$\Delta\hat{\phi}[t]$ est donc une variable aléatoire gaussienne dont on connait toutes les caractéristiques statistiques au second ordre.

Afin d'évaluer les possibilités d'utilisation pratique de cet estimateur, la validité de l'approximation de Tretter a tout d'abord été vérifiée. Pour cela, un test du χ^2 a été utilisé pour vérifier que la variable aléatoire $p[u]$ suit une loi gaussienne enroulée [13] :

$$p[u] = \mathrm{Arg}\left(x[u].e^{-j\varphi[u]}\right) \approx \mathrm{Arg}\left(a[u]\ e^{jw[u]}\right) \tag{21}$$

$$f(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{-(p+k2\pi)^2/2\sigma^2} \tag{22}$$

La figure 1 montre l'évolution de la valeur du χ^2 (calculé avec 2048 réalisations de la variable aléatoire centrée réparties sur 10 classes équiprobables, correspondant donc à 8 degrés de liberté) en fonction du rapport signal sur bruit. Elle permet de conclure que l'hypothèse que $p[u]$ suive une loi gaussienne enroulée est quasi improbable en deçà de 5 dB ($\mathrm{Prob}(\chi^2 > 15.5) = 0.05$), et admissible au delà de 6 dB ($\mathrm{Prob}(\chi^2 > 10.2) = 0.25$).

Enfin, les qualités statistiques des différents estimateurs présentés (expressions 3, 7, 8, 12, 16, 17) on été comparés sur des résultats de simulation. La figure 2 montre l'évolution du logarithme de l'inverse de l'erreur quadratique moyenne

$$EQM = \frac{1}{t_f - t_i} \sum_{t=t_i}^{t=t_f} \left|\ \Delta\hat{\phi}[t] - \Delta\varphi[t]\ \right|^2$$

en fonction du rapport signal sur bruit. Contrairement à [13], ces estimateurs de fréquence instantanée sont comparés sur un signal non-stationnaire, qui est une modulation linéaire de fréquence d'amplitude constante et dont la fréquence normalisée varie de 0.1 à 0.45 en 256 points. On peut alors constater que l'estimateur (17) se rapproche de la borne inférieure de Cramer-Rao à partir de 8 dB. Il semble que l'estimateur (8) obtienne les meilleurs résultats pour ces simulations, suivi de l'estimateur (12). La comparaison avec l'estimateur (3) permet également de mettre en évidence la diminution importante de la variance apportée par ces estimateurs, calculés pour p=6.

III) Paramétrisation de la distribution de Wigner-Ville.

En plus de ses possibilités d'utilisation pratique pour l'estimation de la fréquence instantanée d'un signal non-stationnaire entachée d'un bruit, cette méthode présente également un intérêt sur le plan théorique. En reprenant les éléments de démonstration donnés dans [22], on peut montrer simplement qu'en inversant dans l'expression (17) l'ordre des opérations de sommation et d'extraction de la phase et en prenant une pondération uniforme, on construit un estimateur non-biaisé sous-optimal de la fréquence instantanée, dont le comportement est identique au précédent pour un rapport signal sur bruit élevé. Or cet estimateur correspond au pôle d'une modélisation effectuée par une méthode de Prony ou de Pisarenko à l'ordre 1 en utilisant la fonction d'autocorrélation symétrisée comme un nouveau signal dont on calcule de nouveau une fonction d'autocorrélation :

$$\Delta\phi[t] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arg}\,[-a_1] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arg}\left(\frac{K_4[t,1]}{K_4[t,0]}\right) \qquad \mathcal{H}(z) = \frac{1}{1+a_1.z^{-1}}$$

$$\text{avec } K_4[t,n] = \frac{1}{p-n+1}\sum_{\tau=n}^{p} R[t,\tau].R^*[t,\tau-n]$$

Le raisonnement de Kay fait donc apparaitre la paramétrisation de la distribution de Wigner-Ville discrete comme une technique d'estimation sous-optimale de la fréquence instantanée, mais qui offre cependant la possibilité d'analyser des signaux multi-composantes. On trouvera dans [15,16,17,24] des illustrations de cette possibilité.

Conclusion

Dans cet article, on a tout d'abord présenté différentes techniques d'estimation de la fréquence instantanée d'un signal non-stationnaire entaché d'un bruit. Celles-ci s'appuient pour la plupart sur une hypothèse de stationnarité locale ou de modulation linéaire de fréquence dans un intervalle centré sur l'instant d'analyse, et pour certaines sur une transformation du bruit additif en une modulation aléatoire. Les résultats de simulation obtenus montrent le bon comportement statistique de ces estimateurs, et la validité de cette transformation pour un rapport signal sur bruit supérieur à 6 dB. La solution originale que l'on a proposé, dont les résultats pratiques semblent très comparables aux autres estimateurs, présente cependant deux avantages sur le plan pratique. Elle montre en effet que les techniques de paramétrisation de la distribution pseudo Wigner-Ville discrète correspondent à des estimateurs sous-optimaux des fréquences instantanées des composantes d'un signal non-stationnaire. Enfin, la connaissance de la totalité des caractéristiques statistiques du second ordre de cet estimateur nous permet d'envisager son utilisation pour effectuer de la classification bayésienne de signaux non-stationnaires.

Bibliographie

[1] J. Ville, Théorie et applications de la notion de signal analytique, Câbles et Transmissions, Vol 2A, pp 66-74, 1948.

[2] P. Flandrin, Représentation Temps-Fréquence des Signaux Non-Stationnaires, Thèse de Doctorat d'état, INPG, 1987.

[3] B. Boashash, Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal - Part I : Fundamentals, pp 520-538, Part II : Algorithms and Applications, pp 540-568, Proceedings of the IEEE, Vol 80, n° 4, April 1992.

[4] S.M. Kay, Modern Spectral Estimation : Theory and Applications, Prentice Hall, 1988.

[5] L.J. Griffiths, Rapid measurement of digital instantaneous frequency, IEEE Trans on ASSP, Vol 23, n° 2, pp 207-222, April 1975.

[6] O. Macchi, N.J. Bershad, Adaptive Recovery of a Chirped Sinusoid in Noise : Part 1 : Performance of the RLS Algorithm, IEEE Trans on Signal Processing, Vol 39, n° 3, pp 583-594, Mars 91.

[7] P.J. Parker, B.D.O. Anderson, Frequency tracking of non-sinusoidal periodic signals, Signal Processing, vol 20, n° 2, pp 127-152, June 90.

[8] N. Martin, An AR spectral analysis of non-stationary signals, Signal Processing, vol 10, n° 1, pp 61-74, 1986.

[9] C. Berthomier, Instantaneous Frequency and Energy Distribution of a Signal, Signal Processing, Vol 5, n° 1, pp 31-45, 1983.

[10] K.M. Wong, Q. Jin, Estimation of the Time-Varying frequency of a Signal : The Cramer-Rao Bound and the application of Wigner-Distribution, IEEE Trans ASSP, Vol 38, n° 3, March 90.

[11] P O'Shea, B. Boashash, Some Robust Instantaneous Frequency Estimation Techniques with Application to Non-Stationary Transcient Detection, Signal Processing V: Theories and Application, pp 165-168, Eusipco 90.

[12] G. Jones, B. Boashash, Time-Frequency Analysis of Multi-Component Signals, Signal Processing V : Theories and Applications, pp 141-144, Eusipco 90.

[13] B.C. Lovell, R.C. Williamson, The Statistical Performance of Some Robust Instantaneous Frequency Estimators, IEEE Trans on Signal Processing, Vol 40, n° 7, July 92.

[14] P.J. Kootsookos, B.C. Lovell, B. Boashash, A Unified Approach to the STFT, TFD's and Instantaneous Frequency, IEEE Trans SP, Vol 40, n° 8, August 92.

[15] P. Flandrin, Séparation de Fréquences Modulées Proches par Analyse de Wigner-Ville Autoregressive, Colloque Gretsi 85, pp 471-475.

[16] P.A. Ramamoorthy, V.K. Iyer, Y.Ploysongsang, Autoregressive Modeling of the Wigner Spectrum, Proc IEEE ICASSP, pp 1509-1512, 1987.

[17] E. Verreault, H.T. Huynh, B. Toussignant, Wigner-Ville Distribution Modeling by Signal Reconstruction, Proc Eusipco 88, pp 1425-1428.

[18] M. Dechambre, J. Lavergnat, Statistical properties of the instantaneous frquency for a noisy signal, Signal processing, Vol 2, n° 2, pp 137-150, April 1980.

[19] P. Flandrin, B. Escudié, An Interpretation of the Pseudo Wigner-Ville Distribution, Signal Processing, Vol 6, n° 1, pp 27-36, 1984.

[20] S. Peleg, B. Porat, The Cramer-Rao Lower Bound for Signals with Constant Amplitude and Polynomial Phase, IEEE Trans SP, Vol 39, n° 3, pp 749-752, mars 91.

[21] S.A. Tretter, Estimating the frequency of a noisy sinusoid by linear regression, IEEE Trans Information Theory, Vol IT-31, pp 832-835, Nov 85.

[22] S.M. Kay, A Fast and Accurate Frequency Estimator, IEEE Trans ASSP, vol 37, n° 12, pp 1987-1990, Dec 89.

[23] P.M. Djuric, S.M. Kay, Parameter Estimation of Chirp Signals, IEEE Trans ASSP, Vol 38, n° 12, pp 2118-2126, Dec 90.

[24] F. Auger, Représentations temps-fréquence des signaux non-stationnaires : synthèse et contributions, thèse de doctorat de l'Université et de l'Ecole Centrale de Nantes, déc 1991.