



# SUR LA LOCALISATION ET LA GEOMETRIE DES DISTRIBUTIONS AFFINES

*Paulo Gonçalves et Patrick Flandrin*

Laboratoire de Physique ( URA 1325 CNRS)  
E.N.S. Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France  
et GDR 134 CNRS TdSI

## RESUMÉ

En contraste avec la distribution de Wigner-Ville qui se concentre sur des lois linéaires de retards de groupe, on sait que la distribution unitaire de Bertrand est adaptée aux lois hyperboliques. Plus généralement, la classe des distributions affines permet d'étendre cette propriété à des lois de puissances quelconques. En nous inspirant des démarches suivies dans le cas de la distribution de Wigner-Ville, nous proposons une interprétation géométrique simple permettant d'expliquer cette localisation à partir de règles interférentielles. Une large place est accordée aux simulations numériques illustrant les règles de construction établies.

## ABSTRACT

In contrast to the localization of the Wigner-Ville distribution on linear group delays, the unitary Bertrand distribution localizes on hyperbolic group delays. In this paper, we derive a condition for an affine class distribution to be localized on an arbitrary group delay in the time-frequency plane. Techniques similar to those applied previously to the Wigner-Ville distribution yield a simple geometrical interpretation of this localization, in terms of a construction rule for interference terms in the distributions. Numerous numerical simulations illustrate both the simplicity and validity of the construction rule.

## 1. INTRODUCTION

Un des verrous des distributions bilinéaires conjointes (temps-fréquence ou temps-échelle) provient de la création de termes interférentiels qui sont autant d'artifices pénalisant l'expertise des images. En ce qui concerne la distribution de Wigner-Ville (DWV), de nombreux travaux ont montré que les principes régissant ces interférences pouvaient se modéliser par des règles de constructions géométriques simples, s'appuyant sur des notions telles que symétrie ponctuelle ou autre moyenne arithmétique [6],[7]. Un corollaire immédiat de cette géométrie exprime la parfaite localisation des DWV sur des signaux modulés linéairement en fréquence [5].

Parallèlement, une famille particulière de distributions bilinéaires affines généralisant la DWV, et désignées sous le terme de classe de Bertrand, offre des propriétés tout-à-fait comparables de localisation sur des lois de modulation de type puissance [1]. Il est donc souhaitable de mieux cerner les règles interférentielles qui sous-tendent la structure de ces distributions, de façon à en faciliter l'interprétation. C'est ce travail de généralisation des règles de composition et de symétrie propres à la DWV que nous nous proposons d'étendre au cas des distributions affines bifréquentielles localisées.

## 2. LE CAS DE LA DISTRIBUTION DE WIGNER-VILLE

C'est par le produit de deux versions symétriquement translatées en temps et en fréquence d'un même signal que la DWV acquiert ses propriétés de covariance relativement aux opérateurs de translations:

$$\begin{aligned} W_x(t, \nu) &= \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \\ &= \int X^*\left(\nu + \frac{f}{2}\right) X\left(\nu - \frac{f}{2}\right) e^{-i2\pi f t} df. \end{aligned} \quad (1)$$

Dans le plan temps-fréquence, chacun des points  $(t, \nu)$  de la signature d'un signal, n'existe que s'il est centre de symétrie d'un ensemble de couples  $(t', \nu')$  et  $(t'', \nu'')$  appartenant eux-mêmes à la structure du signal [7]:

$$\begin{pmatrix} t' \\ \nu' \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} t \\ \nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t'' \\ \nu'' \end{pmatrix} \quad (2)$$

De cette condition, il est facile de dériver une règle de construction géométrique des interférences qui, à son tour justifiera du bon comportement de la DWV sur des lois de modulations linéaires de fréquence. Ainsi, deux composantes quelconques du signal centrées en  $(t_1, \nu_1)$  et  $(t_2, \nu_2)$ , se combinent et interfèrent en une région  $(t_i, \nu_i)$  du plan définie par leur simple moyenne arithmétique [5],[6]:

$$\begin{cases} t_i = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \\ \nu_i = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2). \end{cases} \quad (3)$$

La localisation sur un retard de groupe donné est assurée si, quelque soit le couple de points appartenant à la signature temps-fréquence théorique du signal, le point issu de leur moyenne arithmétique coïncide avec une zone d'existence de ce signal. Dans le cas de la DWV, c'est la structure linéaire qui reste globalement invariante par symétrie ponctuelle:

$$X(\nu) = e^{-i2\pi(t_0\nu + \frac{\alpha}{2}\nu^2)} \Rightarrow W_x(t, \nu) = \delta(t - t_0 - \alpha\nu). \quad (4)$$

Au paragraphe suivant, nous nous proposons d'étendre



l'adéquation entre localisation sur un retard de groupe quelconque et structure particulière de distributions bilinéaires.

### 3. LOCALISATION SUR UN RETARD DE GROUPE QUELCONQUE

#### 3.1. Structure et contraintes sur la distribution

Les fonctions par lesquelles sont composées les variables temporelles (ou fréquentielles) définissant les arguments de  $x$  et de  $x^*$  (resp.  $X$  et  $X^*$ , eq. (1)) décident des propriétés de covariance des distributions associées et par conséquent de leur type de localisation. En se plaçant dans le cadre de la covariance affine, on sait que les représentations bilinéaires peuvent se paramétrer à l'aide de deux fonctions arbitraires  $F(\cdot)$  et  $G(\cdot)$  selon [3],[4]:

$$\Omega(t, \nu) = \nu \int X \left( \nu \left( \frac{F(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} - \frac{\gamma}{2} \right) \right) X^* \left( \nu \left( \frac{F(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} + \frac{\gamma}{2} \right) \right) G(\nu_0 \gamma) e^{-i2\pi \nu t \gamma} d\gamma. \quad (5)$$

Etant donné un signal analytique de phase  $\Phi_x(\nu)$  quelconque, imposons la relation de localisation suivante:

$$X(\nu) = \nu^{-\frac{1}{2}} e^{i\Phi_x(\nu)} U(\nu) \implies \Omega(t, \nu) = \nu^{-1} \delta(t - t_x(\nu)), \quad (6)$$

où  $t_x(\nu) = (-1/2\pi)\dot{\Phi}_x(\nu)$  est le retard de groupe, et  $U(\cdot)$  l'échelon unité de Heaviside. On montre alors qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (6) soit vérifiée est [8]:

$$\begin{cases} \Phi_x \left( \nu \left( \frac{F(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} + \frac{\gamma}{2} \right) \right) - \Phi_x \left( \nu \left( \frac{F(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} - \frac{\gamma}{2} \right) \right) = \nu \gamma \dot{\Phi}_x(\nu) \\ G(\nu_0 \gamma) = \frac{1}{\nu_0} \sqrt{F^2(\nu_0 \gamma) - \frac{(\nu_0 \gamma)^2}{4}}. \end{cases} \quad (7)$$

La première de ces équations fonctionnelles assure que la distribution est, dans le plan temps-fréquence, centrée sur la trajectoire de  $t_x(\nu)$ . La deuxième relation garantit, quant à elle, que la distribution soit *Dirac* sur cette loi de retard de groupe. Du simple point de vue des implications entre contraintes sur les noyaux de paramétrisation et propriétés des distributions, la deuxième relation impose également la localisation en temps [3].

#### 3.2. Interprétation géométrique

En posant, pour des raisons de commodité,  $\nu \left( \frac{F(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} + \frac{\gamma}{2} \right) = \nu_2$  et  $\nu \left( \frac{F(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} - \frac{\gamma}{2} \right) = \nu_1$ , il est immédiat de réécrire la relation de phase de l'équation (7) sous la forme suivante

$$\frac{\Phi_x(\nu_2) - \Phi_x(\nu_1)}{\nu_2 - \nu_1} = \dot{\Phi}_x(\nu) \Leftrightarrow t_x(\nu) = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \int_{\nu_1}^{\nu_2} t_x(f) df. \quad (8)$$

Cette autre formulation permet une interprétation géométrique simple de ces distributions. En effet, la règle de construction qui s'en déduit revient à dire que l'existence de la distribution  $\Omega$  en un point  $(t, \nu)$  du plan résulte de la composition de tous couples  $(t_1, \nu_1)$  et  $(t_2, \nu_2)$  sur lesquels on ajuste une loi du type particulier  $t_x(\nu)$  et tels que la valeur moyenne de cette fonction entre les bornes  $\nu_1$  et  $\nu_2$  soit égale à  $t_x(\nu)$  (figure 1). La valeur de  $t_x(\nu)$ , et par conséquent les coordonnées  $(t, \nu)$  apparaissent comme une

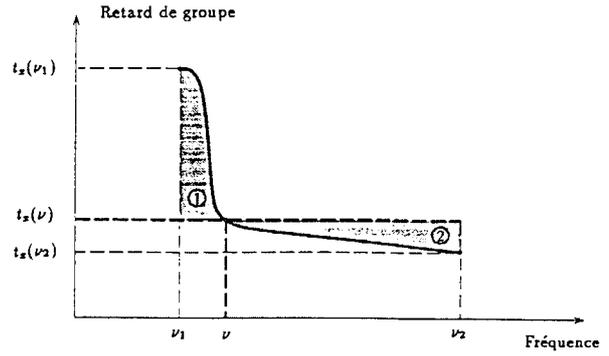


Figure 1: Construction d'une moyenne pondérée par un retard de groupe quelconque, entre deux points  $(t_1, \nu_1)$  et  $(t_2, \nu_2)$  du plan. Les surfaces (1) et (2) sont égales.

moyenne pondérée par la loi de retard de groupe, calculée sur les quantités  $(t_1, \nu_1)$  et  $(t_2, \nu_2)$ . Il s'agit alors d'une généralisation de la moyenne arithmétique du cas Wigner-Ville, que l'on retrouve en spécifiant  $t_x(\nu) = t_0 + \alpha\nu$ . Notons également qu'au point particulier  $(t, \nu)$ , la dérivée de la phase est égale à la différence finie prise sur les valeurs  $\Phi_x(\nu_1)$  et  $\Phi_x(\nu_2)$ .

#### 3.3. Un cas particulier intéressant

Les modulations hyperboliques de fréquence ( $t_x(\nu) = t_0 + c\nu^{-1}$ ) sont d'un intérêt majeur en étude radar puisque ce sont des signaux globalement invariants par effet Doppler (i.e. "Doppler tolerant") [1],[2]. On comprend donc bien l'enjeu de distributions parfaitement localisées sur ces lois de retard de groupe. Nous nous proposons ici de résoudre le système d'équations (7) dans le cas d'un retard de groupe plus général de la forme  $t_x(\nu) = t_0 + c\nu^{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , et ce pour quelques valeurs particulières de  $k$ . En l'occurrence, l'équation des phases du système (7) devient:

$$\left( \frac{F(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} + \frac{\gamma}{2} \right)^k - \left( \frac{F(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} - \frac{\gamma}{2} \right)^k = k\gamma,$$

qu'il s'agit de résoudre pour déterminer l'expression de la fonction  $F(\nu_0 \gamma)$ .

- Wigner-Ville:  $k = 2$ .

$$t_x(\nu) = t_0 + c\nu \Leftrightarrow \begin{cases} F(\nu_0 \gamma) = \nu_0 \\ G(\nu_0 \gamma) = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}. \end{cases}$$

Toutefois, pour retrouver l'expression de la DWV, il nous faut considérer le signal  $X_{1/2} = \nu^{\frac{1}{2}} X(\nu)$ , sur lequel se localise effectivement la distribution. Dans ces conditions, la forme obtenue après substitution de  $F(\nu_0 \gamma)$  et  $G(\nu_0 \gamma)$  dans (5) s'identifie bien à la DWV restreinte au signal analytique associé à  $X_{1/2}$ , [8]:

$$\Omega(t, \nu) = \nu^{-1} W_{X_{1/2}}(t, \nu).$$

- Distribution D:  $k = \frac{1}{2}$ .

$$t_x(\nu) = t_0 + \frac{c}{\sqrt{\nu}} \Leftrightarrow \begin{cases} F(\nu_0 \gamma) = \nu_0 \left( 1 + \left( \frac{\gamma}{4} \right)^2 \right) \\ G(\nu_0 \gamma) = 1 - \left( \frac{\gamma}{4} \right)^2. \end{cases}$$



La représentation obtenue s'écrit alors

$$\Omega(t, \nu) = \nu \int X\left(\nu\left(1 - \frac{\gamma}{4}\right)^2\right) X^*\left(\nu\left(1 + \frac{\gamma}{4}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{\gamma}{4}\right)^2\right) e^{-i2\pi\nu t \gamma} d\gamma.$$

• Unterberger (forme active):  $k = -1$ .

$$t_x(\nu) = t_0 + \frac{c}{\nu^2} \iff \begin{cases} F(\nu_0 \gamma) = \nu_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}} \\ G(\nu_0 \gamma) = 1. \end{cases}$$

Après substitution de cette solution dans (5), on a la forme active de la distribution de Unterberger [8]:

$$\Omega(t, \nu) = \nu \int \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) X(\gamma\nu) X^*\left(\frac{\nu}{\gamma}\right) e^{i2\pi(\gamma - \frac{1}{\gamma})\nu t} d\gamma$$

**Remarque.** Il existe également une forme dite passive de la distribution de Unterberger, différente de la forme active par l'expression de  $G(\nu_0 \gamma)$  ( $G^p(\nu_0 \gamma) = (1 + \gamma^2/4)^{-\frac{1}{2}}$ ), [3]. Dans ce cas, la réponse à une modulation de puissance reste centrée sur la loi de retard de groupe  $t_x(\nu)$ , mais se délocalise par rapport à celle-ci sous l'effet convolutif de la fonction  $fG(\nu_0 \gamma) e^{-i2\pi\nu t \gamma}$ .

#### 4. UN FORMALISME GÉNÉRAL: LA CLASSE DE BERTRAND

A travers ces quelques exemples, nous retrouvons le résultat connu selon lequel l'association des propriétés de localisation en temps et de localisation sur un retard de groupe du type  $t_x(\nu) = t_0 + c\nu^{k-1}$  privilégie, dans le panorama des distributions bilinéaires, les éléments de la classe de Bertrand, [1]:

$$P_x(t, f) = \nu \int X(\lambda_k(u)\nu) X^*(\lambda_k(-u)\nu) e^{i2\nu(\lambda_k(u) - \lambda_k(-u))} (\lambda_k(u)\lambda_k(-u))^{\frac{1}{2}} d(\lambda_k(u) - \lambda_k(-u)). \quad (9)$$

à laquelle tous les exemples cités ci-dessus appartiennent. Il est d'ailleurs facile de vérifier la spécificité *hyperbolique* liée à la classe de Bertrand. Pour cela réécrivons la contrainte de localisation (eq. (7)) exprimée sur les fonctions  $\lambda_k(u)$ , il vient:

$$\Phi_x(\lambda_k(u)\nu) - \Phi_x(\lambda_k(-u)\nu) = \nu(\lambda_k(u) - \lambda_k(-u)) \hat{\Phi}_x(\nu)$$

La résolution explicite de cette relation pour un spectre de phase  $\Phi_x(\nu) = -2\pi(t_0\nu + \frac{c}{k}\nu^k)$ , fait sortir de façon unique la structure de la fonction de paramétrisation  $\lambda_k(u)$ :

$$\begin{cases} \lambda_k^k(u) - \lambda_k^k(-u) = k(\lambda_k(u) - \lambda_k(-u)) \\ \lambda_k(-u) = e^{-u} \lambda_k(u) \end{cases} \quad (10)$$

$$\iff \lambda_k(u) = \left(\frac{1 - e^{-ku} - 1}{k e^{-u} - 1}\right)^{\frac{1}{1-k}},$$

expression identique à celle obtenue par des arguments plus théoriques de covariance sur une extension à trois paramètres du groupe affine [1]. L'avantage majeur de ce formalisme est de pouvoir associer à chaque valeur du coefficient  $k$ , l'expression algébrique d'une distribution affine bilinéaire parfaitement localisée sur le retard de groupe correspondant.

Comme pour la DWV, les propriétés de localisation et une certaine géométrie interférentielle sont intimement

liées. Il est alors important d'identifier cette géométrie afin de pouvoir anticiper sur la position des interférences et faciliter ainsi l'expertise des images.

## 5. INTERFÉRENCES

### 5.1. Règles de construction

Le problème du repérage des interférences est dual de l'interprétation géométrique qui a été faite des distributions localisées. En effet, si on connaît l'origine de l'existence d'une distribution en un point quelconque du plan, réciproquement, en se donnant deux *auto-composantes* du signal, on peut inférer de l'équation (8) le positionnement du terme croisé. Dans le cas particulier des retards de groupe en lois de puissances, la résolution de l'intégrale conduit au résultat remarquable suivant:

$$\theta_i^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{1}{k} \frac{\theta_2^{\frac{k-1}{k}} - \theta_1^{\frac{k-1}{k}}}{\theta_2^{\frac{1}{k-1}} - \theta_1^{\frac{1}{k-1}}}\right)^{\frac{1}{k-1}} \equiv f(\theta_1^{\frac{1}{k-1}}, \theta_2^{\frac{1}{k-1}}), \quad (11)$$

dans lequel on a posé le changement de variable  $\theta = t_x(\nu) - t_0 = \nu^{k-1}$ .

Par suite, en tenant compte de la dépendance fonctionnelle entre  $\theta$  et  $\nu$ , il vient

$$\nu_i = \left(\frac{1}{k} \frac{\nu_2^k - \nu_1^k}{\nu_2 - \nu_1}\right)^{\frac{1}{k-1}} = f(\nu_1, \nu_2), \quad \forall k \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

La figure 2 montre le lieu des positions d'une interférence ponctuelle pour différentes valeurs de  $k$ .

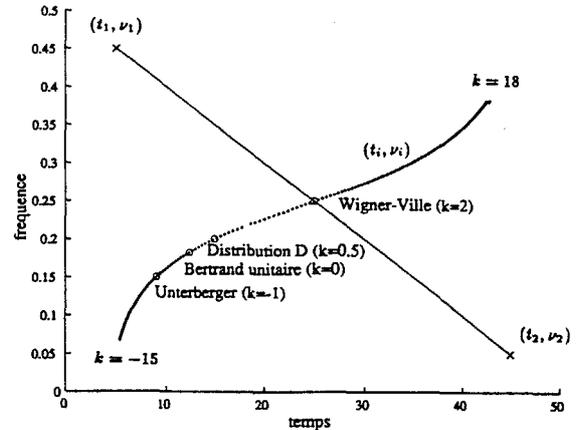


Figure 2: Trajectoire de l'interférence ponctuelle  $(t_i, \nu_i)$  entre deux points fixes  $(t_1, \nu_1)$  et  $(t_2, \nu_2)$  pour différentes distributions bilinéaires affines localisées  $(-15 \leq k \leq 18)$ .

De plus, pour certaines de ces valeurs  $k$ , il est possible d'étendre la notion de moyenne arithmétique du cas Wigner-Ville en introduisant une non-linéarité sur les arguments de cette moyenne, c'est-à-dire en définissant une moyenne généralisée du type  $g(w_i) = \frac{1}{2}(g(w_1) + g(w_2))$ , avec  $w = \nu$  ou  $w = \theta^{\frac{1}{k-1}}$ .

$k$	distributions	$g(w)$
2	Wigner-Ville	$w$
0.5	distribution D	$w^{1/2}$
-1	Unterberger (forme active)	$g(w) = \log w$



**Remarque.** On ne sait pas, dans le cas de la distribution unitaire de Bertrand ( $k = 0$ ), exprimer algébriquement la fonction  $g(\cdot)$ . Cependant, une approximation raisonnable de celle-ci (en accord avec certaines simulations numériques) semble être  $g(w) = w^{1/3}$ .

## 5.2. Exemples

Les illustrations des figures 3 et 4 permettent de valider les règles de construction géométrique, en comparant, pour certaines valeurs particulières du coefficient  $k$ , le lieu théorique des zones interférentielles et les résultats de simulations numériques correspondantes.

## 6. CONCLUSIONS

En termes de localisation, la distribution de Wigner-Ville apparaît donc comme un cas particulier d'une classe très générale de distributions affines paramétrées par un scalaire  $k$ . La structure des retards de groupe sur lesquels ces distributions se concentrent se généralise à l'ensembles des lois de puissances elles-mêmes exponentiées par une image de  $k$ .

L'originalité de ce travail provient de l'extrapolation de règles de constructions géométriques des interférences, fondées sur des notions de moyennes arithmétiques jusqu'alors identifiées pour quelques valeurs isolées de  $k$ , à une quelconque valeur de ce paramètre. De plus, comme conséquence intéressante de cette généralisation, on peut interpréter chacune des trajectoires de localisation comme le lieu des points globalement invariants par une opération de symétrie, qui est duale de la moyenne proposée.

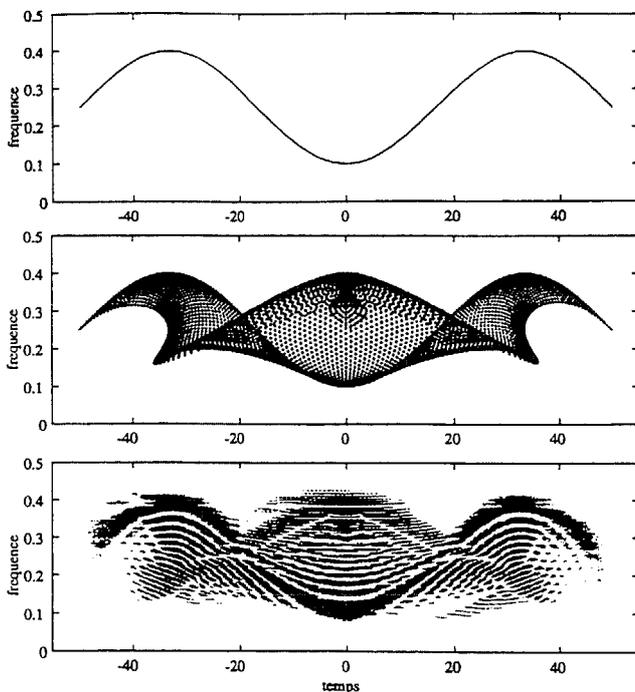


Figure 3: En-haut: fréquence instantanée théorique sinusoidale. Milieu: lieu des points interférentiels calculés par les règles de constructions géométriques (eq. (11) et (12)), appliquées à la distribution de Unterberger ( $k = -1$ ) sur un signal modulé sinusoidalement en fréquence. En-bas: Représentation de Unterberger calculée numériquement sur le même signal (valeur absolue de la distribution).

## REFERENCES

1. J. Bertrand et P. Bertrand, "A class of affine Wigner functions with extended covariance properties", *J. Math. Phys.* vol. 33, pp. 2515-2527, 1992.
2. J.P. Ovarlez, "La transformation de Mellin: un outil pour l'analyse des signaux à large bande", *Thèse, Univ. Paris 6*, 1992.
3. P. Flandrin, "Sur une classe générale d'extensions affines de la distribution de Wigner-Ville", *13ème Colloque GRETSI sur le Trait. du Signal et des Images*, pp 17-20, 1991.
4. F. Hlawatsch and G.F. Boudreaux-Bartels, "Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations", *IEEE Signal Proc. Mag.* 9, pp 21-67, 1992.
5. F. Hlawatsch and P. Flandrin, "The interference structure of Wigner distribution and related time-frequency signal representations", à paraître dans *The Wigner Distribution - Theory and Applications in Signal Processing*, W. Mecklenbräuker (ed.), Elsevier, 1993.
6. Grossmann A., "Parity operator and quantization of  $\delta$ -functions", *Commun. Math. Phys.*, vol. 48, pp. 191-194, 1976.
7. Royer A., "Wigner function as the expectation value of a parity operator", *Phys. Rev. A* 15, pp. 449-450, 1977.
8. P. Flandrin and P. Gonçalves, "From Wavelets to Time-Scale Energy Distributions", à paraître dans *Recent Advances in Wavelet Analysis*, L.L. Schumaker and G. Webb (eds.), Academic Press, pp. 309-334, 1993

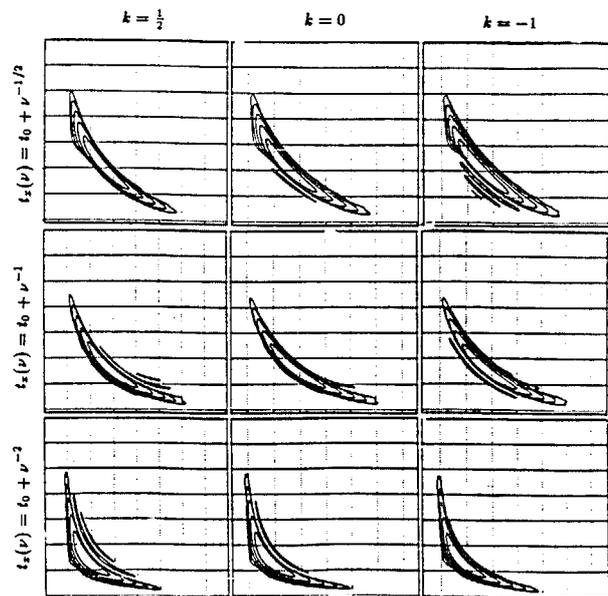


Figure 4: En colonnes, simulations numériques de distributions affines - col. 1: distribution D ( $k = \frac{1}{2}$ ) - col. 2: distribution unitaire de Bertrand ( $k = 0$ ) - col. 3: distribution active de Unterberger ( $k = -1$ ).

En ligne, signaux modulés en lois de puissances  $t_x(\nu) = t_0 + c\nu^K$  - lig. 1:  $K = -\frac{1}{2}$  - lig. 2:  $K = -1$  - lig. 3:  $K = -2$ . Sur la diagonale principale ( $K = k - 1$ ), les distributions sont parfaitement localisées sur les lois de modulation. Au dessus de la diagonale ( $K > k - 1$ ), les interférences se situent du côté convexe des lois de puissances. En dessous de la diagonale ( $K < k - 1$ ), les interférences se situent du côté concave de ces lois.