

## SEPARATION DE SOURCES SINUSOIDALES DE FREQUENCES PROCHES

V. Capdevielle - C. Servière - M. Gaeta - J. L. Lacoume

CEPHAG, URA346 CNRS, ENSIEG, BP46, F-38402 St Martin d'Hères Cedex  
CNRS - URA 820, GRECO - TDSI

RÉSUMÉ

Une étude sur la séparation de sources sinusoïdales de fréquences proches est présentée dans cet article. Les résultats et observations sont issus de la mise en œuvre de l'algorithme de séparation de sources élaboré par M. Gaeta et J. L. Lacoume s'appuyant sur le principe du maximum de vraisemblance. L'analyse de ces résultats montre l'intérêt des statistiques d'ordre supérieur dans la séparation de sinusoïdes de fréquences différentes. En effet, deux signaux indépendants à l'ordre 4 ne peuvent contenir tous deux la même fréquence. Cette assertion est justifiée par des démonstrations théoriques, illustrée par différents résultats en simulation et confirmée par une application de l'algorithme sur des signaux réels.

### I - INTRODUCTION

Le problème traité est celui de la séparation de sources sinusoïdales de fréquences très proches dans le cas où une analyse spectrale classique par transformée de Fourier réalisée sur un nombre limité de points ne permet pas de distinguer les 2 sinusoïdes. L'algorithme de séparation employé est basé sur des propriétés statistiques d'indépendance à l'ordre 4 définies par l'annulation des intercumulants des sources considérées. Ainsi, le premier paragraphe est consacré à la description de la méthode, fondée sur une paramétrisation de la matrice de mélange des sources. Le second paragraphe présente deux méthodes d'estimation de ces matrices soit par le principe du maximum de vraisemblance, soit par une expression analytique. Enfin la validité de l'algorithme dans le cas de sources sinusoïdales est justifiée par des démonstrations théoriques pour des mélanges complexes des sources. Puis, afin d'évaluer la robustesse de la méthode vis à vis de certains paramètres tels que l'écart de fréquence des sinusoïdes ou la différence de phase à l'origine, nous traçons l'évolution de la puissance d'erreur résiduelle en fonction de ces mêmes paramètres. Enfin, les conclusions issues de l'observation des résultats en simulation sont confirmées par application de l'algorithme au cas de signaux réels.

### II - PRINCIPE GENERAL

Dans ce paragraphe nous présentons le principe de la méthode et ses principales étapes. L'objectif consiste à partir des signaux observés en différents points à reconstituer le champ de sources supposées stationnaires. Or, le milieu de propagation est supposé linéaire, isotrope et stationnaire. Ainsi, si nous notons  $\underline{A}$  le vecteur des signaux émis par les  $p$  sources

ABSTRACT

An analysis on close frequency sinusoidal sources separation is presented in this paper. This study is an application of the maximum likelihood method [3] developed by M. Gaeta and J. L. Lacoume. In the first part, the main stages of the algorithm are described. Then, after summarizing some ways of bringing the method into use, a theoretical demonstration is developed, simulation results are presented in the two situations: with additive noise or not. The performances of the algorithm are then valued depending on the difference between frequencies or the noise power. Finally, the last paragraph is devoted to the application of the algorithm to the case of rotating machine noises.

$\underline{R}$  le vecteur des signaux reçus  
par les  $n$  capteurs

et  $\underline{S}$  la matrice dont chaque ligne  $i$  caractérise la propagation entre le  $i$ ème capteur et les  $p$  sources, la relation linéaire reliant les sources aux signaux reçus s'exprime à la fréquence  $k$  en notations matricielles par

$$\underline{R}(k) = \underline{S}(k) \underline{A}(k) + \underline{B}(k) \quad (1)$$

où  $\underline{B}$  représente un bruit additif à  $n$  composantes indépendantes.

La méthode est fondée sur une paramétrisation de la matrice de transfert  $\underline{S}$  exprimée comme le produit des 3 matrices  $\underline{V}$  unitaire,  $\Delta$  diagonale et  $\underline{\Pi}$  également unitaire.

$$\underline{S}(k) = \underline{V} \Delta^{1/2} \underline{\Pi} \quad (2)$$

Plusieurs méthodes sont envisageables pour estimer ces matrices parmi lesquelles celle du maximum de vraisemblance. Or, il est montré que dans le cas d'un fort rapport signal à bruit, cette fonctionnelle se scinde en 2 contributions disjointes relatives à un traitement à l'ordre 2 (décorrélation) permettant l'estimation de  $\underline{V}$  et  $\Delta$  puis à l'ordre 4 (indépendance à l'ordre 4) pour l'identification de  $\underline{\Pi}$ .

$$\underline{LMV} = \underline{LMV}_2 + \underline{LMV}_4 \quad (3)$$

$\underline{LMV}$  désigne la fonctionnelle de vraisemblance globale,  $\underline{LMV}_2$  la fonctionnelle de vraisemblance estimée à l'ordre 2 et  $\underline{LMV}_4$  la fonctionnelle de vraisemblance estimée à l'ordre 4.

### III - MISE EN OEUVRE

\* Une première étape consiste à décorrélérer les signaux reçus soit de manière classique par l'extraction des vecteurs et valeurs propres de la matrice interspectrale des observations (la matrice des vecteurs propres constitue  $\underline{V}$  unitaire et les valeurs propres de cette matrice constituent  $\Delta$  diagonale) soit par une



méthode de type MISO [1]. La matrice de transfert est alors déterminée à une matrice unitaire près notée  $\Pi$ .

\*  $\Pi$  s'obtient de plusieurs façons par exemple  
 - par maximisation de la fonctionnelle de vraisemblance estimée par un développement de Gram-Charlier [2], [3], [4]

$$LMV = \sum_a \left| \sum_{r \neq s \neq t \neq d} \Pi_{r_a a}^* \Pi_{r_b a}^* \Pi_{r_c a}^* \Pi_{r_d a}^* \overbrace{\text{Kurtosis}_{r_a r_b r_c r_d}} \right|^2 \quad (4)$$

$\Pi$  matrice unitaire à estimer  
 $\overbrace{\text{Kurtosis}}$  estimation du kurtosis des signaux orthogonaux.  
 - Des formules analytiques permettent également d'identifier  $\Pi$  [3]. Nous explicitons l'une d'elles en situation bidimensionnelle. En effet, dans le domaine complexe, toute matrice unitaire peut être paramétrisée de la manière suivante

$$\Pi = \begin{bmatrix} \cos(\tau) & -\sin(\tau) e^{-jk} \\ \sin(\tau) e^{jk} & \cos(\tau) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Soit  $\underline{Y}$ , vecteur des signaux décorrélés et  $\underline{X}$  vecteur des signaux indépendants. IL est clair que  $\underline{Y} = \Pi \underline{X}$ . De plus, le caractère d'indépendance des composantes de  $\underline{X}$  induit l'annulation de tous leurs intercumulants; ce qui simplifie les expressions des cumulants de  $\underline{Y}$  relatifs aux cumulants de  $\underline{X}$ .

Nous définissons

$$C_{2ac}^{2bd}(X) = \text{Cum}_4(X_a X_b X_c X_d)$$

$$C_{21,i}^{21,2}(Y) = \frac{\sin(2\tau)}{2} e^{-jk} \left[ \cos(\tau)^2 C_{21,1}^{21,1}(X) - \sin(\tau)^2 C_{22,2}^{22,2}(X) \right]$$

$$C_{21,i}^{22,2}(Y) = \frac{\sin(2\tau)}{2} e^{-jk} \left[ \sin(\tau)^2 C_{21,1}^{21,1}(X) - \cos(\tau)^2 C_{22,2}^{22,2}(X) \right]$$

$$C_{21,i}^{21,2}(Y) = \frac{\sin(2\tau)}{2} \left[ C_{21,1}^{21,1}(X) + C_{22,2}^{22,2}(X) \right]$$

$$\frac{\tan(2\tau)}{2} e^{jk} = \frac{C_{21,i}^{21,2}(Y)}{C_{21,i}^{21,1}(Y) - C_{21,i}^{22,2}(Y)} \quad (6)$$

**IV - ETUDE THEORIQUE**

**IV-1 Modélisation**

La modélisation adoptée pour le système est classique; deux sinusoïdes  $A(t)$  et  $B(t)$  respectivement de fréquence  $f_1$  et  $f_2$  caractérisées par un déphasage à l'origine  $\Delta\Phi$  se propagent à travers un milieu linéaire, isotrope.

$$A(t) = 2 \cos(2\pi f_1 t)$$

$$B(t) = 2 \cos(2\pi (f_2 t + \Delta\Phi)) \quad (7)$$

L'objectif consiste à partir de

$$R_1(t) = a A(t) + b B(t) + B_1(t)$$

$$R_2(t) = c A(t) + d B(t) + B_2(t) \quad (8)$$

(les coefficients  $a, b, c, d$  étant a priori complexes,  $B_1$  et  $B_2$  étant les deux composantes indépendantes du bruit)

à remonter aux sources  $A(t)$  et  $B(t)$  par un traitement des observations sur un nombre de points inférieur au nombre de points que requiert une méthode par analyse spectrale.

N.B. Dans toute la suite, les résultats théoriques sont développés pour le cas de mélanges instantanés des signaux. En effet, le spectre des signaux traités étant par excellence à bande étroite, l'approximation consistant à considérer la matrice de transfert  $S$  constante sur toute la plage des fréquences est parfaitement fondée (cf. (1)) y compris dans le

cas de mélanges convolutifs. Cette constatation justifie notre démarche. Nous choisissons une approche temporelle.

**IV-2 Intérêt des ordres supérieurs à 2**

- Les 2 signaux  $R_1$  et  $R_2$  sont décorrélés ssi:

$$a^* c P_A + b^* d P_B = (0,0)$$

$P_A$  (resp  $P_B$ ) est la puissance de la source A (resp B)

- Ils sont indépendants à l'ordre 4 ssi leurs intercumulants s'annulent; en particulier

$$C_{21,2}^{21,2}(R) = 0 \text{ c'est à dire } |a|^2 |c|^2 \text{Cum}(A) + |b|^2 |d|^2 \text{Cum}(B) = 0$$

$\text{Cum}(A)$  (resp  $\text{Cum}(B)$ ) est le cumulants d'ordre 4 de la source A (resp B).

Or, dans le cas de sinusoïdes, nous avons égalité des kurtosis.

Ainsi, 
$$\frac{\text{Cum}(A)}{P_A^2} = \frac{\text{Cum}(B)}{P_B^2}$$

Donc, 
$$|a|^2 |c|^2 P_A^2 + |b|^2 |d|^2 P_B^2 = 0$$

En excluant le cas inintéressant où  $a$  et  $b$  (resp  $c$  et  $d$ ) sont nuls simultanément, nous remarquons que  $(a \text{ et } d)$  ou  $(b \text{ et } c)$  sont nuls.

Ceci montre d'une part l'infinité de solutions déduites de la seule condition de décorrélation et d'autre part que la propriété d'indépendance à l'ordre 4 suffit à assurer la séparation des sinusoïdes.

**IV-3 Etude théorique**

La mise en oeuvre de l'algorithme nécessitant l'indépendance des sources, nous vérifions d'une part que

$$E(A(t)B(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t)B(t) dt$$

d'autre part que

$$\text{Cum}(A^3 B) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A^3(t)B(t) dt$$

De même  $\text{Cum}(AB^3) = \text{Cum}(A^2 B^2) = 0$

Nous avons  $P_A = P_B = 2, E(A^2 B^2) = 4, C(A) = C(B) = -6$

Nous nous plaçons dans le cas d'un mélange bidimensionnel complexe. Après traitement à l'ordre 2 des observations, celles-ci s'expriment linéairement en fonction des sources; ce qui conduit à la paramétrisation des signaux décorrélés et normés temporellement en puissance:

$$\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) e^{-j\alpha} \\ \sin(\phi) e^{j\alpha} & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\nu_1} A(t) \\ e^{j\nu_2} B(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

La matrice unitaire à estimer est alors de la forme (5).

- Démonstration par le principe du maximum de vraisemblance  
 Compte tenu de la définition de la fonctionnelle de vraisemblance, nous avons  $LMV_4 = |T(1)|^2 + |T(2)|^2$ . Or, le calcul des kurtosis des signaux orthogonaux conduit aux expressions suivantes:

Nous notons  $K(i, j^*, k, l^*) = \text{Kurtosis}(Y_i, Y_j^*, Y_k, Y_l^*)$

$$K(1^*, 1, 1, 1^*) = K(2, 2^*, 2, 2^*) = -3/2 + 3/4 \sin(2\phi)^2 = A$$

$$K(2^*, 1, 2^*, 1) = K(1^*, 2, 1^*, 2) = -3/4 \sin(2\phi)^2 e^{-2j\alpha} = B$$

$$K(1^*, 1, 2^*, 2) = K(1^*, 1, 1^*, 2)^* = -K(2^*, 1, 2^*, 2) = \quad (10)$$

$$-K(1^*, 2, 2^*, 2)^* = -3/8 \sin(4\phi) e^{-j\alpha} = C$$

$$K(1^*, 1, 2^*, 2) = -3/4 \sin(2\phi)^2 = D$$



Ainsi, dans le cas particulier des sinusoides,

$$T(1)=T(2)$$

Soit  $c=\cos(\tau)$   $s=\sin(\tau)$  et  $\exp=e^{j\kappa}$

$$T(1)=A(c^4+s^4)-2(c^3s-cs^3)(\exp C+\exp^* C^*)+c^2s^2(4D+\exp^2B+(\exp^2B)^*) \quad (11)$$

Enfin, les conditions requises pour que  $\tau$  et  $\kappa$  estimés correspondent à un maximum de  $LMV_4$  sont:

$$\frac{\delta LMV_4}{\delta \tau} = \frac{\delta LMV_4}{\delta \kappa} = 0$$

$$\frac{\delta^2 LMV_4}{\delta \tau^2} \frac{\delta^2 LMV_4}{\delta \kappa^2} - \frac{\delta^2 LMV_4}{\delta \tau \delta \kappa} > 0 \text{ et } \frac{\delta^2 LMV_4}{\delta \tau^2} < 0 \quad (12)$$

Nous en déduisons que  $\sin(\kappa-\alpha)=0$

Si  $\kappa=\alpha$  [2Π]  $\rightarrow \tau=\phi$  ou  $\tau=\phi+\Pi/2$

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{j\psi_1 A} \\ e^{j\psi_2 B} \end{bmatrix} \text{ ou } X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{j(\psi_2 \alpha)} B \\ -e^{j(\psi_1 \alpha)} A \end{bmatrix} \quad (13)$$

Si  $\kappa=\alpha + \Pi$  [2Π]  $\rightarrow \tau=-\phi$  ou  $\tau=-\phi+\Pi/2$

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{j\psi_1 A} \\ e^{j\psi_2 B} \end{bmatrix} \text{ ou } X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -e^{j(\psi_2 \alpha)} B \\ e^{j(\psi_1 \alpha)} A \end{bmatrix} \quad (14)$$

- Démonstration à partir de la formule analytique

Nous retenons les expressions des kurtosis suivants (cf 10):

$K(1,1,2,2)$ ,  $K(1,2,2,2)$  et  $K(1,1,1,2)$  intervenant dans la formule (6), il en découle

$$\tan(2\tau) e^{j\kappa} = \tan(2\phi) e^{j\alpha} \quad (15)$$

Donc  $\tau=\phi$  ou  $\tau=\phi+\Pi/2$  et  $\kappa=\alpha$

Les solutions analytiques sont alors exprimées par la formule (13).

Ainsi, qu'elle que soit la méthode d'estimation utilisant des critères d'indépendance à l'ordre 4, la séparation de 2 sinusoides de fréquences proches est totale.

## V - RESULTATS DE SIMULATIONS

### V-1 Mélange non bruité

Le mélange traité est instantané complexe non bruité. Nous montrons sur les figures ci-dessous les représentations temporelles des signaux estimés après la première étape à l'ordre 2 (cf fig. 1) puis celles obtenues à l'ordre 4 (cf fig. 2). Nous vérifions ainsi qu'après décorrélation, les deux sources sont encore mélangées, tandis qu'à l'ordre 4 nous séparons correctement les deux sources de fréquences réduites 0.01 et 0.0105.

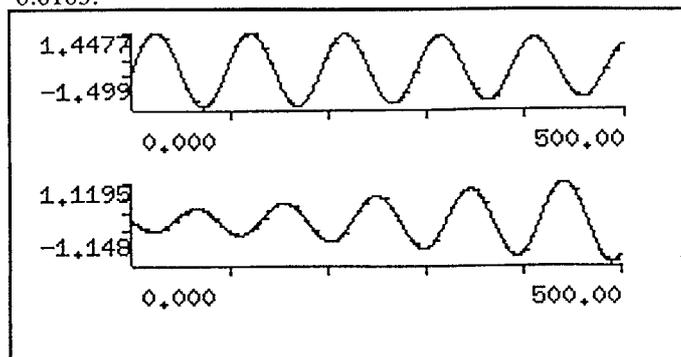


fig. 1: Signaux estimés après décorrélation (seule la partie réelle est représentée)

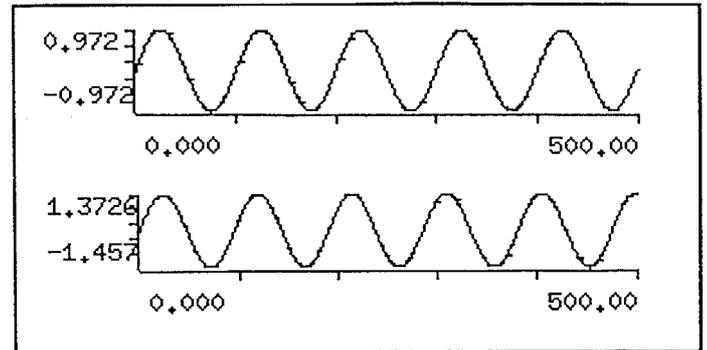


fig. 2: Signaux estimés après ordre 4 (partie réelle)

### V-2 Mélange bruité

Le mélange considéré est instantané, complexe, additivement bruité. Les bruits sont blancs et gaussiens. Le rapport signal à bruit défini par le rapport entre la dsp de la source A et la dsp du bruit  $B_1$  est fixé à 0.27 dB. Les densités spectrales en puissance des signaux obtenus après traitements d'ordres 2 et 4 sont représentées ci-dessous. Afin d'affiner la résolution spectrale, nous considérons une durée des observations supérieure à la durée de traitement (la durée de traitement D étant définie par la durée sur laquelle les trois paramètres matriciels  $V$ ,  $\Delta$  et  $\Pi$  sont estimés). Ces observations sont projetées sur les vecteurs propres de la matrice d'intercorrélation estimée sur D points seulement. Ainsi, les représentations de densités spectrales en puissance met en évidence (cf fig. 3) la présence simultanée des deux sinusoides sur chacun des deux signaux décorrélés. Enfin, la rotation par  $\Pi$  estimée préalablement par un traitement sur D points de ces signaux orthogonaux et normés temporellement en puissance génère des signaux indépendants à l'ordre 4 (cf fig. 4). Il est clair que les deux sinusoides sont séparées.

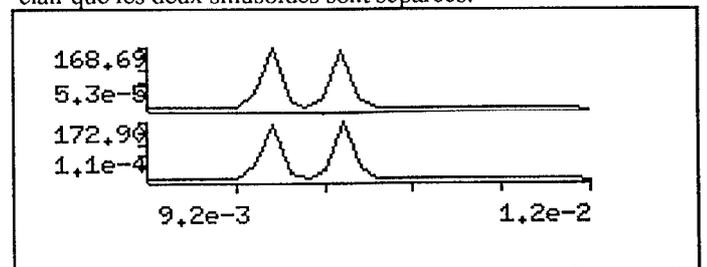


fig. 3: dsp des signaux estimés après ordre 2

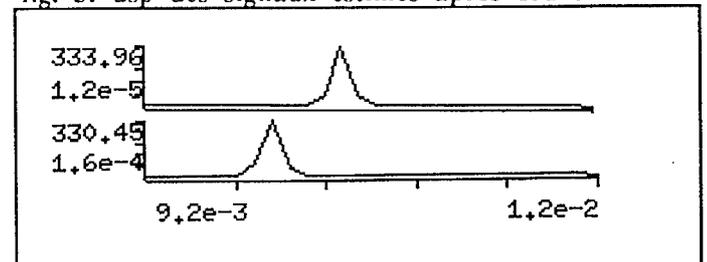


fig. 4: dsp des signaux estimés après ordre 4

### V-3 Influence de divers paramètres

\* Afin d'étudier le comportement de l'algorithme vis à vis de certains paramètres tels que la durée de traitement, l'écart de fréquence des sinusoides ou la différence de phase à l'origine, nous choisissons pour critère la diaphonie (valeur de la dsp lue au canal de fréquence de l'une des sinusoides dans la composante estimée qui ne doit pas la contenir).

La courbe ci-dessous (cf fig. 5) paramétrée par  $f_2-f_1$  présente l'évolution de la diaphonie en fonction de D. La décroissance



observée aux faibles abscisses tend à montrer logiquement qu'il est nécessaire d'identifier les paramètres matriciels sur une durée supérieure à un seuil minimal d'estimation.

L'observation de la courbe (cf fig. 6) paramétrée par D exprimant la diaphonie relativement à l'écart de fréquence des sinusoides noté  $\Delta f$  (fréq. réduites) confirme le fait qu'une durée de traitement trop faible n'autorise pas la séparation de sinusoides de fréquences exagérément proches.

La troisième courbe (cf fig. 7) exprimant l'évolution de la diaphonie en fonction de la différence de phase à l'origine présente deux pics caractéristiques correspondant approximativement à un déphasage à l'origine de  $\Pi$  et de  $2\Pi$ . La séparation des sources serait donc plus délicate lorsque les sinusoides sont en phase ou en opposition de phase à l'origine. En effet, les fréquences à estimer étant choisies très proches, nous nous rapprochons du cas de figure où les signaux reçus seraient proportionnels à une source unique.

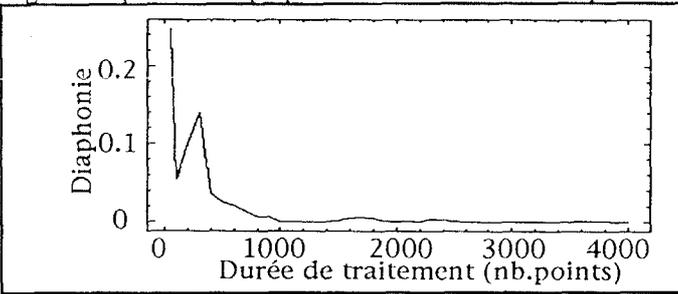


fig. 5: influence de D

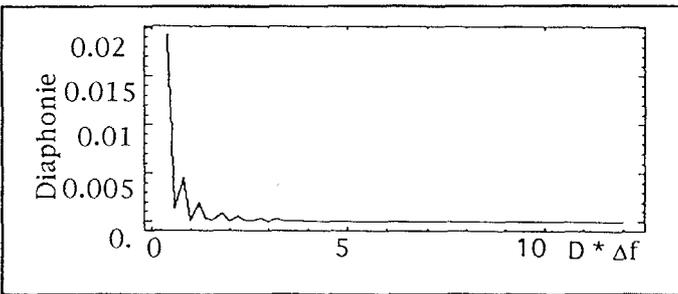


fig. 6: influence de f2-f1

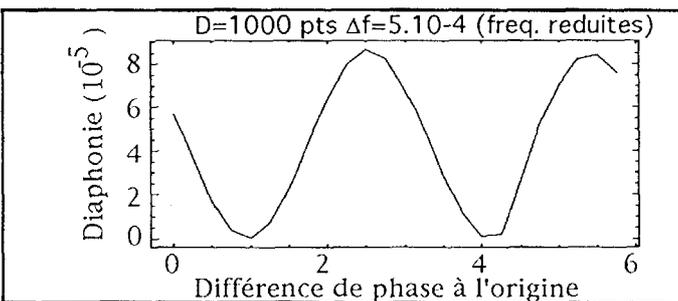


fig. 7: influence de la différence de phase

\* Enfin, dans le cas de mélanges additivement bruités, nous testons l'influence du rapport signal à bruit. Celui est calculé selon l'expression décrite en §V-2. Ainsi, la courbe (cf fig.8)

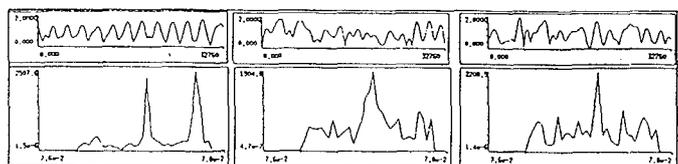


fig. 9: dsp des signaux après décorrélation

présentant l'évolution de l'erreur quadratique entre les signaux estimés et réels en fonction du rapport signal à bruit met en évidence le fait que l'estimation des sources est assurée dès lors que la puissance du signal reste supérieure ou égale à celle du bruit.

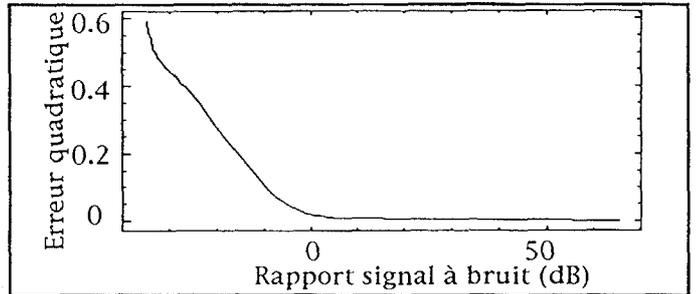


fig. 8: influence du rapport signal à bruit

### VI - APPLICATION AU CAS DE SIGNAUX REELS

Dans le cadre de cette expérience [5], un certain nombre de capteurs ont été disposés sur un ensemble de machines tournantes et ont permis l'enregistrement de signaux. L'objectif consistait à partir des signaux mesurés à reconstituer les vibrations propres à chaque machine. Ainsi, l'observation des dsp des signaux estimés aux ordres 2 (cf fig. 9) et 4 (cf fig. 10) confirme nos résultats. En effet, la raie fréquentielle apparaissant de façon prépondérante sur le troisième signal estimé à l'ordre 4 était présente simultanément sur les trois capteurs à l'ordre 2. Enfin, le premier signal identifié peut être interprété comme un bruit résiduel étant donnée la faible amplitude de sa dsp.

### VII - CONCLUSION

Les résultats théoriques et expérimentaux que nous avons présentés montrent qu'un algorithme de séparation de sources basé sur des critères d'indépendance à l'ordre 4 permet la séparation de sinusoides de fréquences très proches à partir d'observations relativement courtes car les estimations sur ces durées de leurs intercumulants d'ordre 4 sont nuls. Nous avons étudié les performances de cet algorithme (influence du rapport signal à bruit, de la différence de fréquence etc...) et l'avons ensuite validé sur des signaux expérimentaux issus de machines tournantes.

### REFERENCES

- [1] Bendat-Piersol "Random Data Analysis and measurement Procedures". Wiley Interscience, 1986
- [2] M. Gaeta, J. L. Lacoume "source separation vs hypothesis", 2cd Workshop HOS, July 1991, Chamrousse.
- [3] M. Gaeta "Les statistiques d'ordre supérieur appliquées à la séparation de sources", thèse INPG 1991.
- [4] M. Gaeta, J. L. Lacoume "Estimateurs du maximum de vraisemblance étendus à la séparation de sources non gaussiennes". Traitement du signal. Volume 7. n°5 spécial.
- [5] M. Gaeta, F. Harroy, J. L. Lacoume "Réalisation d'une séparation de sources par les statistiques d'ordre supérieur". Rapport CEPHAG n°8/92.

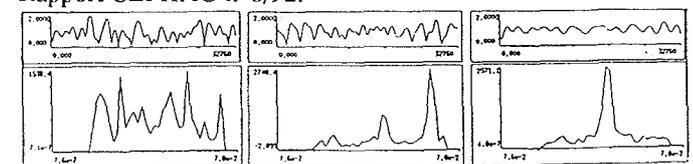


fig. 10: dsp des signaux estimés