PERFORMANCES EN SÉPARATION DE SOURCES.

Antoine Souloumiac, Jean-François Cardoso
Télécom Paris, Dépt. Signal, 46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13
email: souloum@montrouge.smr.slb.com, cardoso@sig.enst.fr

Résumé

Nous donnons trois résultats analytiques sur les performances asymptotiques de méthodes de séparation de sources dites 'à blanchiment'.
i) Le critère de Comon-Lacoume et celui de 'diagonalisation conjointe' donnent les mêmes performances.
ii) Celles-ci sont données explicitement à bruit nul. Elles apparaîssent alors ne dépendre que de la distribution des sources et pas de la matrice de mélange.
iii) Il existe à tout niveau de bruit une borne simple aux performances des méthodes à blanchiment.

Abstract

We give three results on the asymptotic performance of source separation methods which are based on data prewhitening.
i) The Comon-Lacoume criterion performs asymptotically as well as the 'joint diagonalization' criterion.
ii) Explicit expressions for the performance in the noiseless case are derived, showing the dependence on the distribution of the sources. In the noiseless case, it is also shown that the performance is independent of the mixing matrix.
iii) A simple universal noise-dependent bound exists on the performance of any separation technique relying on a prewhitening.

Introduction

La séparation de sources considère le modèle suivant :

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{s}(t) + \mathbf{v}(t) \tag{1}$$

c'est-à-dire que l'observation $\mathbf{x}(t)$ est un vecteur de dimension $m \times 1$, dont chaque composante est un mélange instantané, bruité par $\mathbf{v}(t)$, des $n \leq m$ composantes du vecteur $\mathbf{s}(t)$. La matrice de mélange A, de taille $m \times n$, est supposée de rang plein de telle sorte qu'il est possible, en l'absence de bruit, de reconsistuer exactement les 'signaux sources', (i.e. le vecteur $\mathbf{s}(t)$) à partir de l'observation $\mathbf{x}(t)$.

Ce modèle se rencontre en traitement d'antenne lorsque le vecteur $\mathbf{x}(t)$ représente les signaux capteurs dans une bande de fréquence étroite. Le modèle prend la forme simple ci-dessus en considérant des signaux analytiques : dans la suite, nous considérerons donc toutes les quantités dans (1) comme étant à valeurs complexes.

Les traitements d'antenne classiques supposent que les colonnes de A dépendent de la position des sources de façon connue, de telle sorte que la matrice A ne dépend que d'un petit nombre de paramètres de position. L'approche originale de la séparation de sources consiste à renoncer à toute modélisation physique (autre que la linéarité) et ne fait donc pas d'autre hypothèse sur A que celle de rang plein. La séparation de sources fournit donc une méthode d'estimation des signaux sources qui reste applicable lorsque la propagation, la forme de l'antenne, les gains des capteurs, etc... ne peuvent être modélisés ou calibrés avec une précision suffisante.

Le prix à payer pour un tel traitement 'aveugle' est celui d'une hypothèse forte mais souvent plausible : l'indépendance statistique des signaux sources. Si les sources sont temporellement corrélées des techniques au second ordre peuvent être mises en œuvre [1]. Dans le cas contraire de signaux temporellement blancs, il faut exploiter, si elle existe, la non-normalité des signaux et dépasser la seule utilisation du second ordre.

Plusieurs techniques adaptatives de séparation de sources ont été proposées récemment [2, 3, 4, 5, 6], mais cet article ne concerne que les techniques travaillant par blocs de données [7, 8] où l'information du second ordre, représentée par la covariance empirique, est exploitée pour blanchir les observations. Ceci réduit le problème de la séparation à la recherche d'une matrice unitaire qui est identifiée sur la base des cumulants du quatrième ordre. Cet article [1] est consacré à l'analyse des performances asymptotiques de ces méthodes.

1 Algorithmes à blanchiment

Nous rappelons d'abord le principe des algorithmes à blanchiment. Nous réécrivons le modèle (1) sous la forme

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{p=1,n} s_p(t)\ \mathbf{a}_p + \mathbf{v}(t) \tag{2}$$

où $\mathbf{a}_p$ est la p-ième colonne de A et $s_p(t)$ est le p-ième signal source. La puissance des sources peut être intégrée dans le vecteur $\mathbf{a}_p$ correspondant ; nous posons donc sans perte de généralité : $E|s_p(t)|^2 = 1$. L'indépendance des signaux et du bruit donne

$$R_x \stackrel{\text{def}}{=} E\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^*(t) = R + E\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^*(t) \tag{3}$$

où la covariance du signal non-bruité est notée R et vérifie

$$R = \sum_{p=1,n} \mathbf{a}_p\mathbf{a}_p^* \tag{4}$$

Pour simplifier l'exposé, nous nous restreignons au cas $m = n$, où le nombre de sources est égal au nombre de capteurs. La covariance R est alors inversible et l'on pose

$$\mathbf{y}(t) \stackrel{\text{def}}{=} R^{-1/2}\mathbf{x}(t) \tag{5}$$

[1] Une partie de ce travail a été effectuée dans le cadre d'une convention CIFRE avec Thomson-CSF/RGS/STS.

qui est le signal 'blanchi' puique sa covariance hors bruit est la matrice identité. On définit les vecteurs blanchis $\mathbf{b}_p, p = 1, n$ par

$$\mathbf{b}_p = R^{-1/2}\mathbf{a}_p \quad \forall p = 1, n \tag{6}$$

de sorte que

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{p=1,n} s_p(t)\ \mathbf{b}_p + R^{-1/2}\mathbf{v}(t). \tag{7}$$

On vérifie aisément l'orthonormalité des vecteurs blanchis : $\mathbf{b}_p^*\mathbf{b}_q = \delta(p,q)$ qui donne

$$\mathbf{b}_p^*\mathbf{y}(t) = s_p(t) + \mathbf{b}_p^* R^{-1/2}\mathbf{v}(t) \tag{8}$$

c'est-à-dire que la projection du signal blanchi sur le p-ième vecteur blanchi founit le p-ième signal source bruité.

Les algorithmes de séparation de sources basés sur le blanchiment procèdent donc de la façon suivante. Une estimée $\hat{R}$ de la covariance de la partie signal permet un blanchiment approché :

$$\hat{\mathbf{y}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{R}^{-1/2}\mathbf{x}(t). \tag{9}$$

On estime ensuite un jeu de vecteurs orthonormés $\hat{\mathbf{b}}_p, p = 1, n$ à partir de statistiques construites sur les signaux blanchis. Pour notre analyse, il sera pratique d'exprimer les $\hat{\mathbf{b}}_p$ en fonction des $\mathbf{b}_p$ bien que ces derniers ne soient pas accessibles à l'algorithme. Ces deux jeux de vecteurs étant orthonormés, on peut écrire

$$\hat{\mathbf{b}}_p = \hat{U}\mathbf{b}_p \tag{10}$$

où la matrice $\hat{U}$ est une matrice unitaire estimée sur T échantillons des signaux blanchis :

$$\hat{U} = \mathcal{U}(\hat{\mathbf{y}}(1), \cdots, \hat{\mathbf{y}}(T)) \tag{11}$$

La fonction $\mathcal{U}$ est spécifique de l'algorithme à blanchiment utilisé.

2 Équivalence de critères

2.1 Critères à cumulants

Nous rappelons le principe de l'estimation de $\hat{U}$ pour les algorithmes du quatrième ordre décrits dans [7, 8, 9]. Soient U une matrice unitaire et $z_p(t)$ le signal défini par

$$z_p(t) = \mathbf{b}_p{}^* U^H \hat{\mathbf{y}}(t). \tag{12}$$

Les cumulants empiriques du quatrième ordre des z_p sont notés:

$$\kappa_{ac}^{bd} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{Cum}(z_a(t), z_b^*(t), z_c(t), z_d^*(t)). \tag{13}$$

Les approches de Comon [10] et de Lacoume et Gaeta [7], proposées indépendamment, sont équivalentes à choisir $\hat{U}$ comme le maximiseur unitaire de la quantité

$$C_{CL} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p=1,n} |\kappa_{pp}^{pp}|^2 \tag{14}$$

Nous proposons quant à nous de maximiser

$$C_{DC} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p,q,r=1,n} |\kappa_{pq}^{pr}|^2. \tag{15}$$

La motivation du choix de ce critère, qui semble plus compliqué que (14), réside en ce qu'il existe un algorithme efficace pour son optimisation, même dans le cas complexe [2] car il peut en effet être interprété comme un critère de 'diagonalisation conjointe' dans la variante dite 'pondérée' (c.f. [11]). L'emploi de ces deux critères requiert que au plus une source soit distribuée avec un kurtosis k_p nul. Dans le cas complexe, les kurtosis sont définis par

$$k_p \stackrel{\text{def}}{=} Cum(s_p(t), s_p^*(t), s_p(t), s_p^*(t)). \tag{16}$$

On note, en omettant la dépendance en t, les cumulants des signaux blanchis par

$$\hat{q}_{ac}^{bd} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{Cum}(\mathbf{b}_a^*\hat{\mathbf{y}},\ \hat{\mathbf{y}}^*\mathbf{b}_b,\ \mathbf{b}_c^*\hat{\mathbf{y}},\ \hat{\mathbf{y}}^*\mathbf{b}_d). \tag{17}$$

Par la multilinéarité des cumulants et la relation (12), les cumulants empiriques κ_{ac}^{bd} s'expriment simplement en fonction des cumulants empiriques $\hat{q}_{ac}^{bd}$, que nous notons globalement $\hat{Q}$. Les deux critères (14) et (15) sont donc des fonctions de U et des $\hat{Q}$.

2.2 Équivalence asymptotique

Les deux critères C_{CL} et C_{DC} fournissent une estimée $\hat{U}$ par optimisation sous contrainte unitaire:

$$\hat{U}_{CL} = \text{Argmax}_U C_{CL}(U, \hat{Q}) \quad \text{et} \quad \hat{U}_{DC} = \text{Argmax}_U C_{DC}(U, \hat{Q}) \tag{18}$$

Lorsque les signaux sont parfaitement blanchis et que les cumulants sont parfaitement estimés, on a $\hat{q}_{ac}^{bd} = q_{ac}^{bd}$ où q_{ac}^{bd} vaut k_a si $a = b = c = d$ et est nul sinon. Dans ce cas, l'optimisation des critères est obtenue pour $U = I$ (consistance des estimateurs [3]). Pour montrer que l'optimisation de ces deux critères conduit à des estimateurs asymptotiquement équivalents, il suffit de montrer qu'une perturbation des cumulants empiriques autour de q_{ac}^{bd} induit le même écart au premier ordre sur $\hat{U}_{CL}$ et $\hat{U}_{DC}$. Autrement dit, il suffit de comparer les dérivées premières des deux fonctions implicites définies par (18).

Rappelons que si $f(x, y)$ est une fonction de deux variables scalaires et que si la relation

$$\hat{x}(y) \stackrel{\text{def}}{=} Argmax_x f(x, y) \tag{19}$$

définit une fonction dérivable $y \to \hat{x}$, sa dérivée est

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tag{20}$$

Pour comparer les dérivées premières de $\hat{U}_{CL}$ et de $\hat{U}_{DC}$ par rapport à $\hat{Q}$, il suffit donc de connaître les dérivées secondes des critères C_{CL} et C_{DC}. On peut les obtenir par un développement au second ordre des deux critères en posant $\hat{Q} = Q + \delta Q$ et $U = e^{i\phi}$ où ϕ est une petite matrice hermitienne. On vérifiera que

$$\frac{\partial^2 C_{CL}}{\partial \phi^2} = 2\frac{\partial^2 C_{DC}}{\partial \phi^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 C_{CL}}{\partial \phi \partial Q} = 2\frac{\partial^2 C_{DC}}{\partial \phi \partial Q} \tag{21}$$

[2] Un programme de démonstration Matlab est disponible sur demande ou par FTP anonyme à sig.enst.fr

[3] Nous passons ici sous silence les complications provenant des indéterminations inhérentes à l'identification aveugle.

tandis que les critères sont différents dans la double dérivation par rapport à $\hat{Q}$. Conformément à (20), on en déduit l'égalité de $\partial\hat{U}/\partial\hat{Q}$ pour les deux critères considérés. Les performances asymptotiques des deux méthodes sont donc égales au premier ordre en $1/T$.

3 Performances

Nous présentons ici les résultats de l'analyse asymptotique des performances à bruit nul des métodes de séparation de sources obtenues par maximisation de (14) ou (15). Nous supposons disposer de T échantillons i.i.d. du mélange non bruité. Les signaux sources sont ici supposés stationnaires, complexes et circulairement distribués.

Nous définissons d'abord un indice de performance. À partir des estimées $\hat{\mathbf{b}}_p$ des signatures blanchies $\mathbf{b}_p$, on peut estimer le signal émis par la p-ième source par $\hat{s}_p(t) = \hat{\mathbf{b}}_p^* \hat{\mathbf{y}}(t)$, donnant, par (2) et (9) :

$$\hat{s}_p(t) = \sum_{q=1,n} s_q(t)\, i_{pq} \quad + \quad \hat{\mathbf{b}}_p^* \hat{R}^{-1/2} \mathbf{v}(t) \tag{22}$$

où i_{pq} est défini par

$$i_{pq} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{b}}_p^* \hat{R}^{-1/2} \mathbf{a}_q \tag{23}$$

Ces quantités sont en fait les éléments du produit de la matrice de mélange et de la matrice de séparation qui serait construite à partir du blanchisseur et des $\hat{\mathbf{b}}_p$. La qualité de l'identification peut donc se mesurer par la norme des i_{pq}, qui est le taux de réjection de s_q dans $\hat{s}_p$. Il doit tendre vers 0 pour $T \to \infty$ si $p \neq q$ (nous supposons ici que les signaux estimés sont 'numérotés' dans le même ordre que les signaux sources, ce qui ne correspond bien sûr à rien d'observable) Pour quantifier les performances asymptotiques, nous définissons donc

$$I_{pq} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \to \infty} T\, E|i_{pq}|^2 \quad \forall p \neq q \tag{24}$$

L'analyse à bruit nul pour le critère C_{DC} (15) (nous avons vu que le critère (14) donnerait le même résultat) donne

$$I_{pq} = \frac{k_q^4 + l_p k_p^2 + l_q k_q^2}{(k_p^2 + k_q^2)^2} \quad \forall p \neq q \tag{25}$$

où $l_p \stackrel{\text{def}}{=} E|s_p(t)|^6 - E^2|s_p(t)|^4$. Rappelons que les signaux sont normalisés : $E|s_p(t)|^2 = 1$ et qu'alors, dans le cas circulaire, $k_p = E|s_p(t)|^4 - 2$. On vérifie aisément que $l_p \geq 0$ avec $l_p = 0$ lorsque $s_p(t)$ ne prend que deux valeurs : zéro et une constante.

Cette formule appelle les commentaires suivants. **i)** Les performances à bruit nul ne dépendent que des distributions des sources et *pas* de la matrice de mélange. On trouve la même propriété dans [3]. Il est clair que cette agréable propriété ne tiendra pas à bruit non nul (cf. section 4). **ii)** Un cas particulier est celui où la source p est à module constant ($k_p = -1$, $l_p = 0$) et la source q est gaussienne ($k_q = 0$) donnant $I_{pq} = 0$ ce qui montre que I_{pq} n'est pas borné inférieurement autrement que par 0. Dans ce cas particulier, c'est le terme du second ordre en $1/T$ qui prend la relève (cf. simulations). On attend néamoins une excellente réjection des sources gaussiennes. **iii)** En utilisant $k_p \geq -1$ et $l_p \geq 0$, on obtient aisément

$$I_{pq} + I_{qp} \geq \frac{1}{2} \tag{26}$$

cette borne étant atteinte lorsque les sources p et q sont de module constant. **iv)** La remarque la plus importante est que les performances peuvent être excellentes puisque pour des distributions circulaires à module constant, on trouve que chaque source est estimée en rejetant chacune des autres à un niveau de puisssance $1/4T$. Pour $T = 100$ échantillons, par exemple, c'est une réjection de chaque source à -26 dB.

Nous comparons les valeurs théoriques I_{pq}^t données par (25) aux valeurs expérimentales I_{pq}^e estimées sur 500 tirages indépendants avec $n = m = 2$. Sauf mention contraire, on a dans la suite $T = 500$ échantillons, et le mélange est caractérisé par les 2 valeurs propres de $A^H A$ valant $\lambda_1 = 3.1756$ et $\lambda_2 = 0.8244$.

La table 1 montre l'effet de la distribution des signaux. Le symbole CM (Constant Modulus) désigne la distribution à module constant et phase uniforme sur cercle. La prédiction des performances est très bonne pour les distributions qui sont strictement circulaires. Il n'est pas toujours aussi bon pour les couples impliquant QAM4 ou QAM16 car ces distributions ne sont circulaires qu'à l'ordre 2 (par exemple, elles ne vérifient pas $Es^4(t) = 0$). Toutefois, cet écart ne dépasse pas 10 % sauf pour la paire Gauss/QAM16.

Source 1	Source 2	I_{12}^t	I_{12}^e	I_{21}^t	I_{21}^e
CM	CM	0.25	0.249	0.25	0.2589
QAM4	QAM4	0.25	0.261	0.25	0.261
QAM16	QAM16	0.485	0.531	0.485	0.484
Gauss	QAM4	1	1.059	0	0.029
Gauss	QAM16	1.471	1.665	0.471	0.633
Gauss	CM	1	1.089	0	0.065
QAM4	CM	0.25	0.246	0.25	0.250
QAM16	CM	0.515	0.52	0.147	0.152
QAM4	QAM16	0.147	0.151	0.515	0.477

Table 1: Taux de réjection en fonction des distributions.

Dans la table 2, on fait varier la matrice de mélange en repérant cette variation par λ_1/λ_2. L'indice de performances à bruit nul apparaît expérimentalement indépendant du conditionnement de la matrice de mélange et bien prédit par la formule (25). Les distributions sont QAM4 (source 1) et QAM16 (source 2).

λ_1/λ_2	I_{12}^t	I_{12}^e	I_{21}^t	I_{21}^e
39.9	0.147	0.151	0.515	0.526
9.5	0.147	0.149	0.515	0.499
3.9	0.147	0.145	0.515	0.534

Table 2: Réjection indépendante du mélange.

La table 3 montre que l'annulation de I_{12}^t donne en fait un taux de réjection en $1/T^2$ d'une source gaussienne dans l'estimée d'une source de module constant.

T	I_{12}^e	$T\ I_{12}^e$
300	0.0657	19.7
500	0.0387	19.35
2000	0.0095	19.0

Table 3: Super-réjection d'une source gaussienne.

4 Une borne asymptotique

Nous esquissons la preuve de l'existence et le calcul d'une borne aux performances asymptotiques de toute méthode de séparation de sources basée sur un pré-blanchiment. Cette borne est indépendante du critère utilisé pour estimer la partie unitaire $\hat{U}$. Elle s'applique donc aux méthodes du second ordre comme du quatrième ordre.

En combinant (6), (10) et (23), on peut écrire

$$i_{pq} = \mathbf{b}_p{}^* \hat{U}^H \hat{R}^{-1/2} R^{1/2} \mathbf{b}_q \tag{27}$$

où l'on insère la factorisation polaire suivante

$$\hat{R}^{-1/2} R^{1/2} = VH \tag{28}$$

dans laquelle V est une matrice unitaire et H une matrice hermitienne, pour obtenir

$$|i_{pq}|^2 + |i_{qp}|^2 = |\mathbf{b}_p^* \hat{U}^H VH \mathbf{b}_q|^2 + |\mathbf{b}_q^* \hat{U}^H VH \mathbf{b}_p|^2 \tag{29}$$

Dans le contexte asymptotique, $\hat{U}$ est voisin de l'identité et $\hat{R}$ est voisin de R ce qui implique que V et H sont aussi voisins de l'identité. On pose donc $U^H V = I + i\phi - \phi^2/2$ et $H = I + \epsilon$ pour obtenir un développement au second ordre :

$$|i_{pq}|^2 + |i_{qp}|^2 \approx |\mathbf{b}_p^* \phi \mathbf{b}_q|^2 + |\mathbf{b}_q^* \phi \mathbf{b}_p|^2 + |\mathbf{b}_p^* \epsilon \mathbf{b}_q|^2 + |\mathbf{b}_q^* \epsilon \mathbf{b}_p|^2. \tag{30}$$

L'absence de termes croisés entre ϕ et ϵ montre que le choix optimal (mais impossible à un algorithme qui ignore R et donc V) serait de prendre $\phi = 0$. Ceci donne donc, ϵ étant hermitien

$$|i_{pq}|^2 + |i_{qp}|^2 \geq 2 |\mathbf{b}_p^* \epsilon \mathbf{b}_q|^2 \tag{31}$$

qui ne fait plus intervenir qu'une quantité dépendant de $\hat{R}$.

Avec (28) et en posant $\hat{R} = R + \delta R$, on a $H^2 = H^H V^H V H = R^{1/2} \hat{R}^{-1} R^{1/2} \approx I - R^{-1/2} \delta R R^{-1/2}$. Par conséquent $\epsilon \approx -\frac{1}{2} R^{-1/2} \delta R R^{-1/2}$, et l'on obtient

$$E(|i_{pq}|^2 + |i_{qp}|^2) \geq \frac{1}{2} T\ E\ |\mathbf{a}_p^* R^{-1} \delta R R^{-1} \mathbf{a}_q|^2. \tag{32}$$

Sous l'hypotèse de sources i.i.d., on sait calculer l'espérance ci-dessus, mais pour traiter le cas bruité, il faut spécifier la méthode de blanchiment. On supposera un bruit blanc temporellement et spatialement : $E\mathbf{v}(t)\mathbf{v}(t)^* = \sigma I$. On estime σ par la moyenne des $m - n$ plus petites valeurs propres de la covariance empirique. Le reste des calculs se poursuit dans l'espace signal où les différentes matrices considérées sont inversibles. On obtient finalement

$$I_{pq} + I_{qp} \geq \frac{1}{2} \left\{ (1 + \sigma\rho_{pp})(1 + \sigma\rho_{qq}) + \frac{\sigma^2}{m-n} \rho_{pq}\rho_{qp} \right\} \tag{33}$$

où ρ_{pq} est l'élément (p, q) de la matrice $(A^H A)^{-1}$. Ces résultats sont à rapprocher de ceux de la section précédente. On a vu en effet que I_{pq} peut être nul : on ne peut donc espérer le borner inférieurement à une valeur strictement positive, et c'est sur une paire de sources qu'il apparaît une borne inférieure. Par ailleurs, on voit que sur un ensemble de sources de kurtosis -1, les méthodes analysées ci dessus *atteignent à bruit nul la borne inférieure* de performances.

Conclusion

Les performances asymptotiques des méthodes de séparation de sources à blanchiment peuvent être établies théoriquement. Nous avons esquissé les preuves de l'équivalence de deux méthodes et de l'existence d'une borne aux performances induite par le procédé du blanchiment. Ces résultats sont valides indépendamment du niveau de bruit. Les performances communes aux deux algorithmes ont aussi été calculées à bruit nul pour des signaux circulairement distribués. Les résultats complets du calcul en fonction du niveau de bruit seront présentés dans une version étendue de cette contribution.

References

[1] A. Belouchrani and K. Abed-Meraim, "Séparation aveugle au second ordre de sources temporellement corrélées," in *Proc. Gretsi*, 1993.

[2] C. Jutten and J. Hérault, "Blind separation of sources: an adaptive algorithm based on neuromimetic architecture," *Signal Processing*, vol. 24, pp. 1–10, 1991.

[3] D. T. Pham, P. Garrat, and C. Jutten, "Separation of a mixture of independent sources through a maximum likelihood approach," in *Proc. EUSIPCO*, pp. 771–774, 1992.

[4] P. Loubaton and P. A. Regalia, "Blind deconvolution of multivariate signals: a deflation approach," in *Proc. ICC*, p. To appear, 1993.

[5] E. Moreau and O. Macchi, "New self-adaptive algorithms for source separation based on contrast functions," in *Proc. IEEE SP Workshop on Higher-Order Stat., Lake Tahoe, USA*, pp. 215–219, 1993.

[6] B. Laheld and J.-F. Cardoso, "Séparation adpatative de sources en aveugle. implantation complexe sans contraintes," in *Proc. GRETSI*, pp. 0–0, 1993.

[7] M. Gaeta and J.-L. Lacoume, "Source separation without a priori knowledge: the maximum likelihood solution," in *Proc. EUSIPCO*, pp. 621–624, 1990.

[8] P. Comon, "Independent component analysis," in *Proc. Int. Workshop on Higher-Order Stat., Chamrousse, France*, pp. 111–120, 1991.

[9] A. Souloumiac and J.-F. Cardoso, "Comparaison de méthodes de séparation de sources," in *Proc. GRETSI, Juan les Pins, France*, pp. 661–664, 1991.

[10] P. Comon, "Analyse en composantes indépendantes et identification aveugle," *Traitement du Signal*, vol. 7, no. 5, pp. 435–450, 1990.

[11] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, "An efficient technique for blind separation of complex sources," in *Proc. IEEE SP Workshop on Higher-Order Stat., Lake Tahoe, USA*, pp. 275–279, 1993.